TRASFORMAZIONI CANONICHE

In un sistema Hamiltoniano, lo STATO è dato da un pto nello SPAZIO DELLE FASI. Il moto di questo punto nello sp. delle fasi mi dice come evolve il sistema.

Un sist. Hamiltoniano è tale se esiste un sistema di coordinate $(\bar{p}, \bar{q})$ tale che le eq. del moto (cioè eq. diff. nelle funzioni $\bar{p}(t), \bar{q}(t)$) hanno la semplice forma delle eq. di Hamilton

$$\begin{cases} \dot{p}_h = -\dfrac{\partial H}{\partial q_h} \\ \dot{q}_h = \dfrac{\partial H}{\partial p_h} \end{cases} \quad h = 1, \dots, n \qquad e \quad H = H(\bar{p}, \bar{q}, t) \qquad (*)$$

Il moto è descritto dalle funzioni $p_h(t)$, $q_h(t)$ (che soddisf. $*$).

In generale, lo stesso moto può essere descritto scegliendo diverse coordinate $(\tilde{\bar{p}}, \tilde{\bar{q}})$ per lo sp. delle fasi; il moto ora è descritto dalle funz. $\tilde{p}_h(t)$, $\tilde{q}_h(t)$.

La domanda: esiste una Hamiltoniana $K(\tilde{\bar{p}}, \tilde{\bar{q}}, t)$, t.c. le funz. $\tilde{p}_h(t)$, $\tilde{q}_h(t)$ soddisfano delle eq. diff. in forma canonica (eq. di Ham.):

$$\begin{cases} \dot{\tilde{p}}_h = -\dfrac{\partial K}{\partial \tilde{q}_h} \\ \dot{\tilde{q}}_h = \dfrac{\partial K}{\partial \tilde{p}_h} \end{cases} \qquad ?$$

Le trasf. di coord. che rispondono affermativamente a questa domanda, sono dette TRASF. CANONICHE

Consideriamo una trasf. di coord. nello spazio delle fasi, data da

$$(\star)\quad \begin{cases} p_h = u_h(\tilde{p},\tilde{q},t) \\ q_h = v_h(\tilde{p},\tilde{q},t) \end{cases}$$

$[= \vec{\tilde{p}}, \vec{\tilde{q}}]$ Notazione semplificata

Coordinate q e momenti p si mescolano

Nella notazione compatta

$$x_i = w_i(\tilde{x}, t)$$

$J_{ij} = \dfrac{\partial w_i}{\partial \tilde{x}_j}$ ha detto

Def. La trasf. di coordinate $(\star)$, regolare e invertibile, si dice CANONICA, se comunque si prende un'Hamiltoniana $H(p,q,t)$, ESISTE sempre un'Hamiltoniana $K(\tilde{p},\tilde{q},t)$ " $\forall H$

t.c. le equazioni canoniche relative ad H

$$\dot{p}_h = -\frac{\partial H}{\partial q_h} \qquad \dot{q}_h = \frac{\partial H}{\partial p_h} \qquad h = 1,\dots,n \qquad (\#)$$

Sono mutate nelle eq. canoniche relative a K

$$\dot{\tilde{p}}_k = -\frac{\partial K}{\partial \tilde{q}_k} \qquad \dot{\tilde{q}}_k = \frac{\partial K}{\partial \tilde{p}_k} \qquad k = 1,\dots,n \qquad (\circ)$$

H e K si dicono canonicamente coniugate.

data $\tilde{p}_k(t)$, $\tilde{q}_k(t)$ che risolvono $(\circ)$, allora

$$p_h(t) = u_h(\tilde{p}(t), \tilde{q}(t), t) \quad \text{e} \quad q_h(t) = v_h(\tilde{p}(t), \tilde{q}(t), t)$$

risolvono $(\#)$

Esempi di trasf. canoniche:

1) $p_h = \underbrace{\tilde p_h + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{cost.}}}{a_h}}_{= u_h(\tilde p, \tilde q, t)}$ $\qquad q_h = \tilde q_h + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{cost.}}}{b_h}$ $\qquad K(\tilde p, \tilde q, t) = H(\tilde p + a, \tilde q + b, t)$

2) $p_h = \alpha \tilde p_h \qquad q_h = \beta \tilde q_h \qquad \alpha, \beta \neq 0 \qquad K(\tilde p, \tilde q, t) = \frac{1}{\alpha\beta} H(\alpha \tilde p, \beta \tilde q, t)$

6) $p_h = \tilde p_h \qquad q_h = \tilde q_h + \alpha t \tilde p_h \qquad K(\tilde p, \tilde q, t) = H(\tilde p, \tilde q + \alpha t \tilde p, t) - \frac{\alpha}{2} \tilde p \cdot \tilde p$

Particella libera $\quad H(p,q) = \frac{\tilde p^2}{2m} \quad$ e $\alpha = 1/m$ allora $\quad K(\tilde p, \tilde q) = \frac{\tilde p^2}{2m} - \frac{1}{2m} \tilde p \cdot \tilde p = 0$

$$\dot{\tilde p}_h = -\frac{\partial K}{\partial \tilde q_h} = 0 \Rightarrow \tilde p_h(t) = \tilde p_h^{(0)} \Rightarrow p_h(t) = \tilde p_h^{(0)}$$

$$\dot{\tilde q}_h = \frac{\partial K}{\partial \tilde p_h} = 0 \Rightarrow \tilde q_h(t) = \tilde q_h^{(0)} \qquad q_h(t) = \tilde q_h^{(0)} + \frac{\tilde p_h^{(0)}}{m} t$$

Esempio di trasf. NON-canonica: (troveremo che $\exists H$ t.c. $\nexists K$ tale che le nuove eq. del moto siano canoniche)

$$p = \tilde p \cos \tilde q \qquad q = \tilde p \,\text{sen}\, \tilde q$$

H particella libera (m=1) $\quad \begin{cases} \dot p = 0 \\ \dot q = p \end{cases} \xrightarrow[\text{sostituisco}]{} \begin{cases} \dot{\tilde p} \cos \tilde q - \dot{\tilde q}\, \tilde p \,\text{sen}\, \tilde q = 0 \\ \dot{\tilde p}\, \text{sen}\, \tilde q + \dot{\tilde q}\, \tilde p \cos \tilde q = \tilde p \cos \tilde q \end{cases} \Longleftrightarrow$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \dot{\tilde p} = \tilde p \cos \tilde q \,\text{sen}\, \tilde q & ? = -\frac{\partial K}{\partial \tilde q} \ ? \\ \dot{\tilde q} = \cos^2 \tilde q & ? = \frac{\partial K}{\partial \tilde p} \ ? \end{cases}$$

Condiz. necessaria affinché la risp. sia SI è che $\frac{\partial^2 K}{\partial \tilde q \partial \tilde p} = \frac{\partial^2 K}{\partial \tilde p \partial \tilde q}$

Proviamo: $-\frac{\partial}{\partial \tilde p}(\tilde p \cos \tilde q \,\text{sen}\, \tilde q) \overset{?}{=} \frac{\partial}{\partial \tilde q}(\cos^2 \tilde q) \to$ NO!

7) La trasf. sopra diventa canonica se prendo

$$p = \sqrt{2\tilde{p}}\cos\tilde{p} \qquad q = \sqrt{2\tilde{q}}\,\mathrm{sen}\,\tilde{q} \qquad K = H(\sqrt{2\hat{p}}\cos\hat{p}, \sqrt{2\tilde{p}}\,\mathrm{sen}\,\tilde{p}, t)$$

8) Trasformazioni puntuali estese

$$q_h = v_h(\tilde{q}, t) \qquad (\text{non dip. da } \tilde{p})$$

$$p_h = \underbrace{\sum_{k=1}^{\tilde{n}} \tilde{p}_k \frac{\partial v_k}{\partial q_h}}_{u_h(\tilde{p}, \tilde{q}, t)} \qquad (\text{non-generica})$$

Trasf. canoniche in formalismo compatto

$$\dot{x}_i = \sum_\ell E_{i\ell} \frac{\partial H}{\partial x_\ell}$$

$x_i = w_i(\tilde{x}, t)$ è CANONICA se $\forall H \ \exists K$ t.c.

$$\dot{\tilde{x}}_j = \sum_m E_{jm} \frac{\partial K}{\partial x_m} \qquad \dot{\tilde{x}} = E\,\nabla_{\tilde{x}} K$$

$\tilde{J}_{jk} = (J^{-1})_{jk}$ (*)

$$\dot{\tilde{x}}_j = \sum_k \underbrace{\frac{\partial \tilde{x}_j}{\partial x_k}}_{\tilde{J}_{jk}} \dot{x}_k + \frac{\partial \tilde{x}_j}{\partial t} = \sum_k \tilde{J}_{jk}\dot{x}_k + \frac{\partial \tilde{x}_j}{\partial t} =$$

Invertiamo le trasf. coord

$\tilde{x}_j = \tilde{x}_j(x, t)$

$$= \sum_k \tilde{J}_{jk} \sum_\ell E_{k\ell} \frac{\partial H}{\partial x_\ell} + \frac{\partial \tilde{x}_j}{\partial t}$$

In forma vettoriale $\dot{\tilde{x}} = \tilde{J} E \nabla_x H + \frac{\partial \tilde{x}}{\partial t}$

Quindi la trasf. è canonica se $\forall H$, $\exists K$ t.c.

$$\tilde{J} E \nabla_x H + \frac{\partial \tilde{x}}{\partial t} = E \nabla_{\tilde{x}} K$$

$\downarrow$

(*) $x_i = w_i(\tilde{x}(x))$ deriviamo per x da entrambi i lati

$$\frac{\partial x_i}{\partial x_j} = \sum_m \frac{\partial w_i}{\partial \tilde{x}_m}\frac{\partial \tilde{x}_m}{\partial x_j} \leftrightarrow \delta_{ij} = \sum_m J_{im}\tilde{J}_{mj} \Leftrightarrow J\tilde{J} = \mathbb{1}$$

$$\Leftrightarrow \tilde{J} = J^{-1}$$

Prop. Se la trasf. è canonica, allora $\exists c$ (dip. al più dal tempo) t.c.

$$K = c\tilde{H} + K_0$$

dove $\tilde{H}(\tilde{p},\tilde{q},t) = H(u(\tilde{p},\tilde{q},t), v(\tilde{p},\tilde{q},t),t)$ e

K_0 è l'Ham. corrispondente ad $H=0$, cioè t.c.

$$E\nabla_{\tilde{x}} K_0 = \frac{\partial \tilde{\tilde{x}}}{\partial t}$$

($K_0 \neq 0$ quando la trasf. canonica dip. da t)

e c è t.c. $-\tilde{J}E\tilde{J}^T E = c\mathbb{1}_{2n}$.

$$\sum_i J^T_{ij}\frac{\partial H}{\partial x_j} = \sum_i \underbrace{\frac{\partial x_j}{\partial \tilde{x}_i}\frac{\partial H}{\partial x_j}}= \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{x}_i}$$

Dim.

$$E\nabla_{\tilde{x}}K \overset{\text{trasf. canonica per ipotesi}}{=} \tilde{J}E\nabla_x H + \frac{\partial \tilde{\tilde{x}}}{\partial t} = E^{-1}E\tilde{J}E\tilde{J}^T(\tilde{J}^T)^{-1}\nabla_x H + \frac{\partial \tilde{\tilde{x}}}{\partial t} =$$

$$= -EE\tilde{J}E\tilde{J}^T\nabla_{\tilde{x}}\tilde{H} + \underbrace{E\nabla_{\tilde{x}}K_0}_{=\frac{\partial \tilde{\tilde{x}}}{\partial t}}$$

$\tilde{J}^{-1} = J$

$E^{-1} = -E$

moltiplico per E a dx e sx

$$\Rightarrow \quad -E\tilde{J}E\tilde{J}^T\nabla_{\tilde{x}}\tilde{H} = \underbrace{\nabla_{\tilde{x}}(K-K_0)}_{\text{è irrotazionale (rotore nullo)}}$$

[Lemma. Sia $(\tilde{x},t) \in \mathbb{R}^{2n}\times\mathbb{R}$ e $M(\tilde{x},t)$ una matrice $2n\times 2n$. Se $M\nabla_x f$ è irrotazionale $\forall f:\mathbb{R}^{2n}\to\mathbb{R}$, allora $\exists c:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ t.c. $M = c\mathbb{1}_{2n}$]

$\Downarrow$

$$-E\tilde{J}E\tilde{J}^T = c\mathbb{1}_{2n} \quad (\text{equiv. a } -\tilde{J}E\tilde{J}^T E = c\mathbb{1}_{2n})$$

e

$$c\mathbb{1}_{2n}\nabla_{\tilde{x}}\tilde{H} = \nabla_{\tilde{x}}(K-K_0) \Rightarrow K = c\tilde{H} + K_0$$

a meno di una cost. irrilevante

//

CONDIZIONE DI LIE

<u>Def.</u> La trasformazione $\begin{cases} p_h = u_h(\tilde{p},\tilde{q},t) \\ q_h = v_h(\tilde{p},\tilde{q},t) \end{cases}$ soddisfa

la CONDIZIONE DI LIE se $\exists$ una cost $c \neq 0$

e una funzione $F(\tilde{p},\tilde{q},t)$ tali che sia identicam. soddisf.

$$c \sum_{h=1}^{n} u_h \, dv_h = \sum_{h=1}^{n} \tilde{p}_h \, d\tilde{q}_h + dF - K_0 \, dt$$

$c \underbrace{\bar{u} \cdot d\bar{v}}_{\bar{p} \cdot d\bar{q}} = \tilde{\bar{p}} \cdot d\tilde{\bar{q}} + dF - K_0 dt$ con $K_0 = \frac{\partial F}{\partial t} - c \sum_{k=1}^{n} u_k \frac{\partial v_k}{\partial t}$

<u>Prop.</u> Se la trasf. di coord. ($\star$) soddisfa la CONDIZ. DI LIE, allora essa è CANONICA con

$$K = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{"valenza"}}}{c} \, \tilde{H} + K_0$$

Viceversa, se la trasf. ($\star$) è canonica, allora $\exists c \neq 0$ e $\exists F$ t.c. la condiz. di Lie è soddisf.

<u>Dim.</u> Usiamo il principio variazionale. Consideriamo il moto

$$(\bar{p}(t), \bar{q}(t)) \longleftrightarrow (\tilde{\bar{p}}(t), \tilde{\bar{q}}(t))$$

cioè $\bar{p}(t) = \bar{u}(\tilde{p}(t), \tilde{q}(t), t)$ $\quad \bar{q}(t) = \bar{v}(\tilde{p}(t), \tilde{q}(t), t)$

I corrispondenti funzionali azione sono

$$S = \int_{t_0}^{t_1} (\bar{p} \cdot \dot{\bar{q}} - H) \, dt \qquad \tilde{S} = \int_{t_0}^{t_1} (\tilde{\bar{p}} \cdot \dot{\tilde{\bar{q}}} - K) \, dt$$

$$cS = \int_{t_0}^{t_1} (c \, \bar{p} \cdot d\bar{q} - cH \, dt) = \int_{t_0}^{t_1} (c \, \bar{u} \cdot d\bar{v} - cH \, dt) =$$

$$\overset{\text{condiz. di Lie}}{=} \int_{t_0}^{t_1} (\tilde{\bar{p}} \cdot d\tilde{\bar{q}} - K_0 \, dt + dF) - c \int_{t_0}^{t_1} H \, dt$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \left(\tilde{\bar{p}} \cdot \dot{\tilde{\bar{q}}} - \underline{K_0} + \dot{F} \right) dt - \underline{c} \int_{t_0}^{t_1} \underline{H}\, dt =$$

$$c S = \int_{t_0}^{t_1} \left(\tilde{\bar{p}} \cdot \dot{\tilde{\bar{q}}} - \underline{K} \right) dt + F \Big|_{t_0}^{t_1} = \tilde{S} + F \Big|_{t_0}^{t_1}$$

$\Rightarrow \quad c\, \delta S = \delta \tilde{S}$ per variaz. nulle agli estremi.

$(p(t), q(t))$ soddisfa eq. di Ham. con Ham. H se è t.c.
$\delta S = 0 \quad \forall (\delta q, \delta p)$ con δq nulle agli estremi

Questo è vero $\Longleftrightarrow$ $(\tilde{p}(t), \tilde{q}(t))$ soddisfa eq. di Ham con Ham. K
(cioè è t.c. $\delta \tilde{S} = 0 \;\; \forall\, \delta \hat{q}, \delta \hat{p}$) //

Negli esempi precedenti

1) $c = 1 \qquad F = \bar{a} \cdot \tilde{\bar{q}}$

2) $c = \dfrac{1}{\alpha \beta} \qquad F = 0$

6) $c = 1 \qquad F = \frac{1}{2} \alpha t \; \tilde{\bar{p}} \cdot \tilde{\bar{p}}$

7) $c = 1 \qquad F = \tilde{p} \operatorname{sen} \tilde{q} \cos \tilde{q}$

TRASFORMAZIONI CANONICHE E PARENTESI DI POISSON

$$\{ f, g \} = \sum_{h=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial q_h} \frac{\partial g}{\partial p_h} - \frac{\partial f}{\partial p_h} \frac{\partial g}{\partial q_h} \right)$$

$$= \sum_{i,j=1}^{2n} \frac{\partial f}{\partial x_i} E_{ij} \frac{\partial g}{\partial x_j} \qquad\qquad E = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbb{1}_n \\ \mathbb{1}_n & 0 \end{pmatrix}$$

Parentesi di Poisson fondam. : $\{ x_i, x_j \} = E_{ij}$

Def. Una trasf. di coord. $x_i = w_i(\tilde{x}, t)$ PRESERVA LE PARENTESI di POISSON se $\forall\, f(\bar{x}, t),\ g(\bar{x}, t)$, e indicando

$$F(\tilde{x}, t) = f(w(\tilde{x}, t), t) \qquad G(\tilde{x}, t) = g(w(\tilde{x}, t), t),$$

si ha

$$\underbrace{\underbrace{\{f, g\}}_{\text{funzione nelle } \bar{x}}(w(\tilde{x}, t), t)} = \underbrace{\{F, G\}(\tilde{x}, t)}$$

Prop. Tutte le parentesi di Poisson sono preservate se sono preservate le parent. di Poisson fondamentali, cioè se

$$\underline{E_{ij}} = \underline{\{w_i, w_j\}} \qquad \text{ovvero} \qquad \{u_h, u_k\} = 0 = \{v_h, v_k\}$$
$$\{u_h, v_k\} = -\delta_{hk}$$

Dim

$$\{F, G\} = \sum_{ij=1}^{2n} \frac{\partial F}{\partial \tilde{x}_i} E_{ij} \frac{\partial G}{\partial \tilde{x}_j} = \sum_{ij} \left(\sum_m \frac{\partial f}{\partial x_m} \frac{\partial w_m}{\partial \tilde{x}_i} \right) \cdot E_{ij} \cdot \left(\sum_l \frac{\partial g}{\partial x_l} \frac{\partial w_l}{\partial \tilde{x}_j} \right) =$$

$$= \sum_{m,l} \frac{\partial f}{\partial x_m} \overbrace{\left(\sum_{ij} \frac{\partial w_m}{\partial \tilde{x}_i} E_{ij} \frac{\partial w_l}{\partial \tilde{x}_j} \right)}^{\{w_m, w_l\}} \frac{\partial g}{\partial x_l} =$$

$$= \sum_{ml} \frac{\partial f}{\partial x_m} \{w_m, w_l\} \frac{\partial g}{\partial x_l} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Par. P. fondam.} \\ \text{sono preserv.}}}{=} \sum_{m,l} \frac{\partial f}{\partial x_m} E_{ml} \frac{\partial g}{\partial x_l} = \{f, g\} \quad //$$