meccanica delle vibrazioni

laurea magistrale
ingegneria meccanica

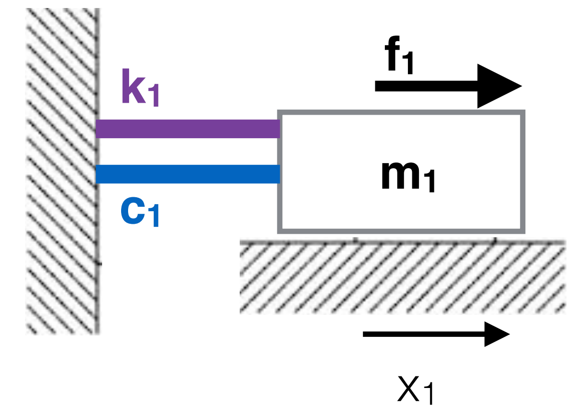
parte XX
Esercizi

Luigi BREGANT
bregant@units.it

Derivazione soluzione generale sistema 1DOF

Luigi BREGANT
bregant@units.it

Consideriamo un sistema a 1DOF



Scriviamo le equazioni del moto :
(diagramma corpo libero / equilibrio forze)

$$m_1\ddot{x}_1 + c_1\dot{x}_1 + k_1 x_1 = f_1$$

semplifichiamo, eliminiamo i pedici, consideriamo un sistema non forzato (f=0) e non smorzato

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

con la soluzione di primo tentativo $x = Xe^{st}$ e le sue derivate scriviamo

$$m\left(Xs^2e^{st}\right) + k\left(Xe^{st}\right) = 0$$

$$Xe^{st}\left(ms^2 + k\right) = 0$$ ci interessa la soluzione non banale!

$$\left(ms^2+k\right)=0$$

equazione caratteristica!

$$s^2=-\frac{k}{m}$$

$$s=\sqrt{-\frac{k}{m}}=\pm j\sqrt{\frac{k}{m}}=\pm j\omega_n$$

[rad/s]

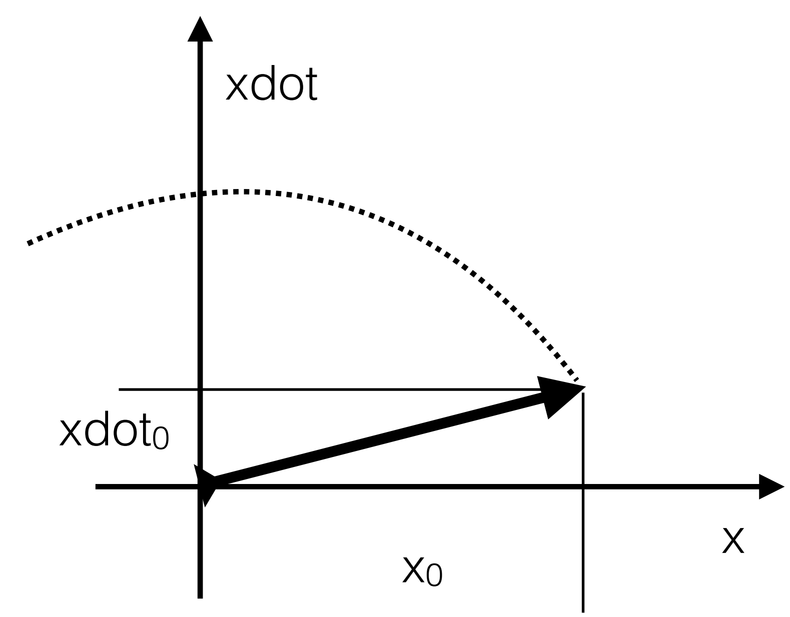
[(N/m)/kg]=[((kg*m/s2)/m)/kg]=[1/s^2]

da cui, la risposta generale del sistema, come CL delle soluzioni

$$x=X_1e^{s_1t}+X_2e^{s_2t}=X_1e^{+j\omega_nt}+X_2e^{-j\omega_nt}$$

X1 e X2 dipendono dalle condizioni iniziali..

$$x\left(0\right)=x_0 \qquad \dot{x}\left(0\right)=\dot{x}_0$$



$$x(0) = X_1 e^0 + X_2 e^0 = X_1 + X_2$$

$$\dot{x}(0) = j\omega_n X_1 e^0 - j\omega_n X_2 e^0 = j\omega_n X_1 - j\omega_n X_2$$

moltiplico la I equazione per $j\omega_n$ e la sommo alla II (sparisce il termine in X_2), derivo i termini incogniti:

$$X_1 = \frac{\omega_n x_o - j\dot{x}_0}{2\omega_n} \qquad X_2 = \frac{\omega_n x_o + j\dot{x}_0}{2\omega_n}$$

(che sono complessi coniugati)

da cui la soluzione generale (una delle sue possibili forme)

$$\boxed{x = \frac{\omega_n x_0 - jx_0}{2\omega_n} e^{+j\omega_n t} + \frac{\omega_n x_0 + jx_0}{2\omega_n} e^{-j\omega_n t}}$$

Se considerariamo X_1 costituito da una parte reale una immaginaria.

$$X_1 = \frac{\omega_n x_o}{2\omega_n} + j\frac{-\dot{x}_0}{2\omega_n} = a + jb$$ possiamo derivare modulo e fase

$$A = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad \phi = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$$

da cui $X_1 = Ae^{j\phi}$ $\qquad X_2 = Ae^{-j\phi}$

e sostituirli nella soluzione generale

$$x = X_1 e^{+j\omega_n t} + X_2 e^{-j\omega_n t} = Ae^{+j\phi}e^{+j\omega_n t} + Ae^{-j\phi}e^{-j\omega_n t}$$

$$\boxed{x = A\left(e^{+\left(j\omega_n t + j\phi\right)} + e^{-\left(j\omega_n t + j\phi\right)}\right)}$$

(una delle sue possibili forme)

oppure ancora

$$A = \sqrt{\left(\frac{\omega_n x_o}{2\omega_n}\right)^2 + \left(\frac{-\dot{x}_0}{2\omega_n}\right)^2} \qquad \phi = \tan^{-1}\left(\frac{-\dot{x}_0}{\omega_n x_0}\right)$$

$$\boxed{x = 2A\left(\cos(\omega_n t + \phi)\right)}$$

(una delle sue possibili forme)

Quello che ritorna sempre è la necessità di definire due costanti (visto che partiamo da un eq.diff di ordine II)che definiscono univocamente nella soluzione!

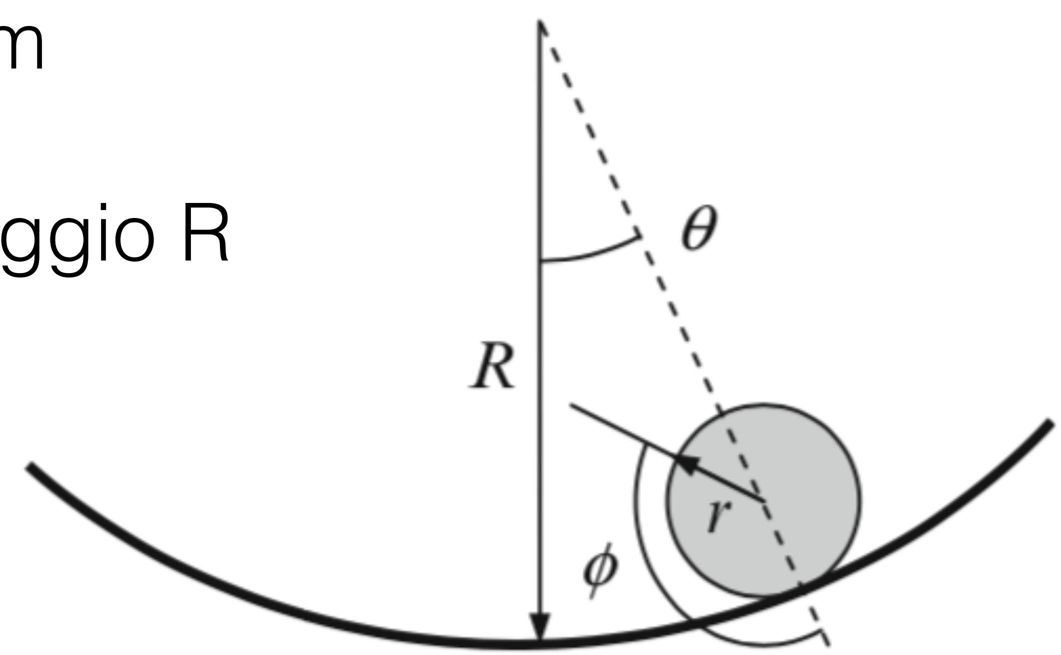
Derivazione soluzione sistema 1DOF con metodi energetici

Luigi BREGANT
bregant@units.it

Gli approcci energetici partono dal concetto che (senza smorzamento) la somma di energia cinetica e potenziale resta costante nel tempo!

diventano particolarmente utilizzando la massa e la rigidezza non sono facilmente identificabili oq quanto il sistema è costituito da diversi elemente collegati

Proviamolo l'approccio energetico
su un sistema come quello di figura :
un cilindro di raggio r e massa m
rotola senza strisciare
su una superfice cilindrica di raggio R

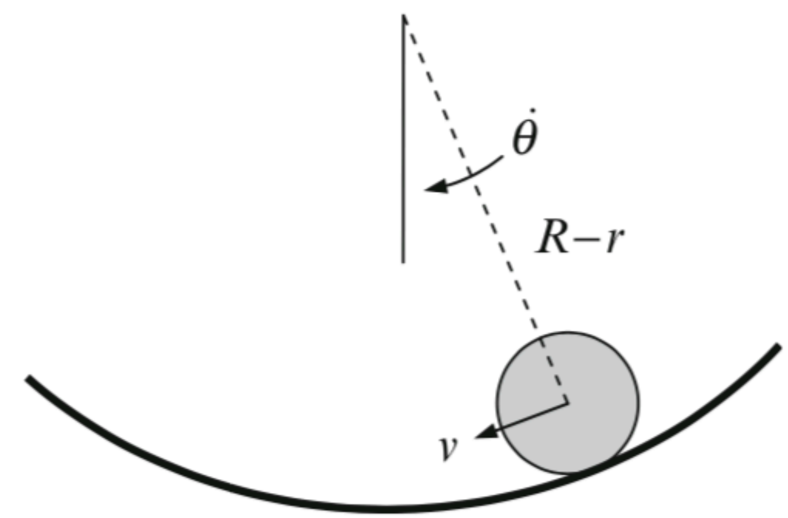


Se il cilindro rotola senza strisciare vengono le seguenti relazioni:

$$R\theta = r\phi \qquad R\dot{\theta} = r\dot{\phi}$$

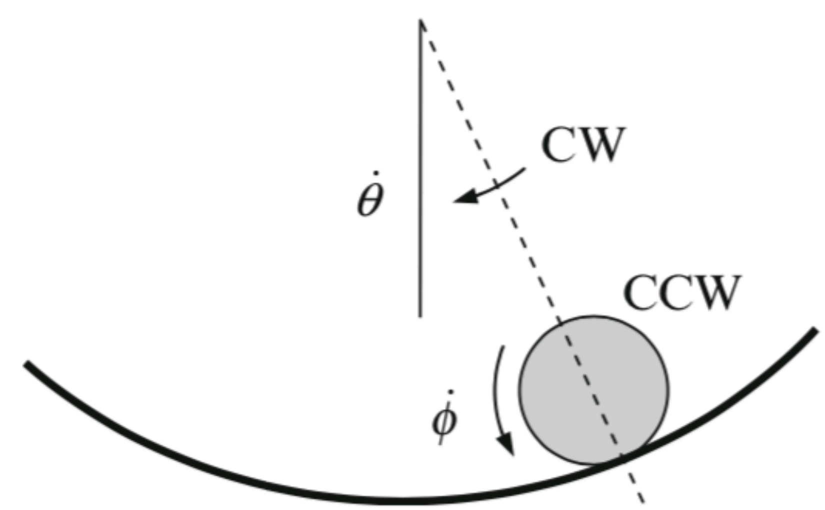
Troviamo le espressioni dell'energia cinetica e potenziale

Il cilindro ruota rispetto
alla superficie cilindrica



$$v = (R-r)\dot{\theta}$$

e rispetto al suo asse



$$\Phi = \dot{\phi} - \dot{\theta} = \frac{R}{r}\dot{\theta} - \dot{\theta} = \left(\frac{R-r}{r}\right)\dot{\theta}$$

L'energia cinetica quindi sarà composta da due termini:

$$K = \frac{1}{2} m \left(\left(R - r \right) \dot{\theta} \right)^2 + \frac{1}{2} J \left(\left(\frac{R - r}{r} \right) \dot{\theta} \right)^2$$

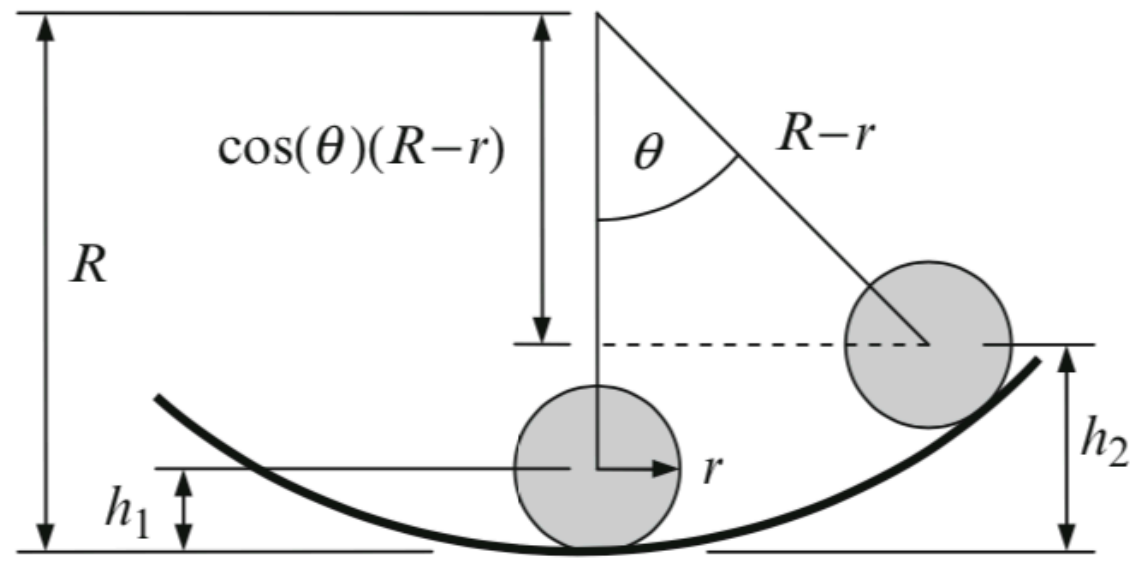
se il momento d'inerzia del cilindro è $J = \dfrac{mr^2}{2}$

$$K = \frac{1}{2} m \left(\left(R - r \right)^2 \dot{\theta}^2 + \frac{r^2}{2} \left(\frac{R - r}{r} \right)^2 \dot{\theta}^2 \right)$$

$$\boxed{K = \frac{1}{2} m \left(R - r \right)^2 \left(\dot{\theta}^2 + \frac{\dot{\theta}^2}{2} \right) = \frac{3}{4} m \left(R - r \right)^2 \dot{\theta}^2}$$

L'energia potenziale dipenderà solamente dalla quota del cilindro:

$$h_1 = r$$



$$h_2 = R - \cos\theta\left(R - r\right)$$

$$P = mg\left(h_2 - h_1\right) = mg\left(R - \cos\theta\left(R - r\right) - r\right)$$

$$\boxed{P = mg\left(R - r\right)\left(1 - \cos\theta\right)}$$

In un sistema conservativo la derivata della somma K+P deve esser nulla! (nel caso, anche la somma delle derivate)

$$\frac{d}{dt}\left(K\right)=\frac{3}{4}m\left(R-r\right)^2\left(2\dot{\theta}\right)\ddot{\theta}$$

$$\frac{d}{dt}\left(P\right)=mg\left(R-r\right)\left(\sin\theta\right)\dot{\theta}$$

ottenendo:

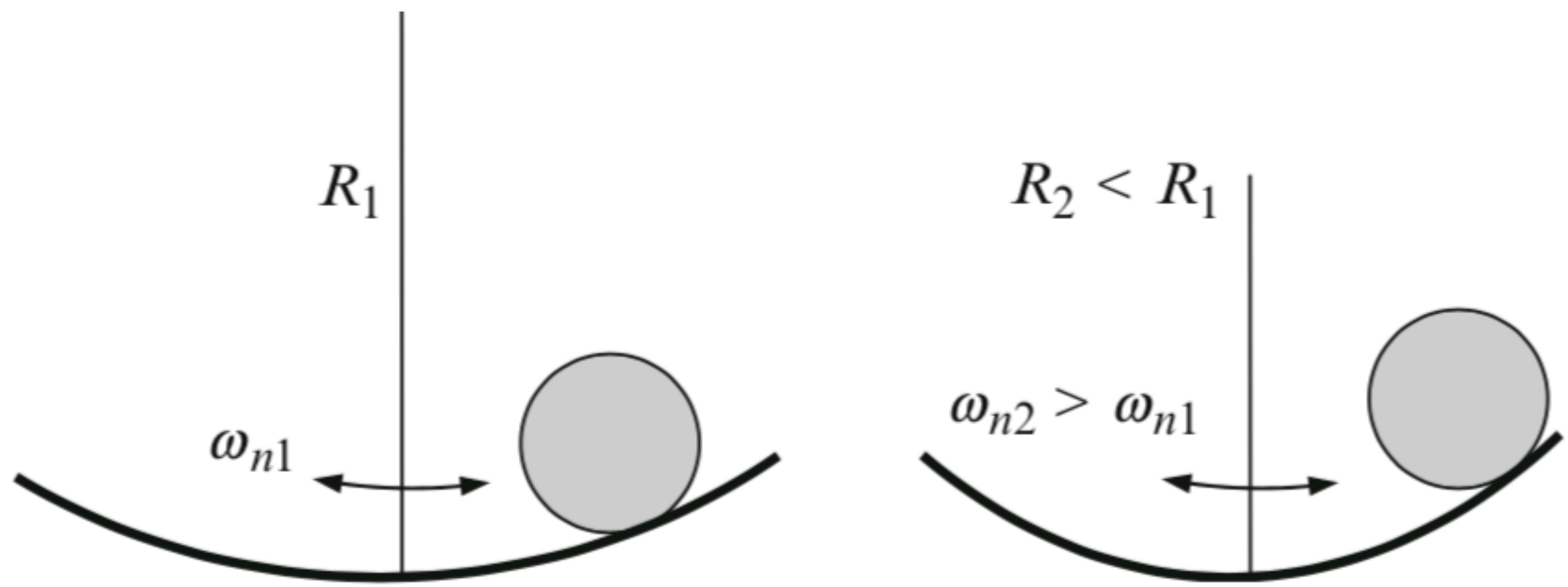
$$\frac{3}{2}\left(R-r\right)^2\ddot{\theta}+g\left(R-r\right)\sin\theta=0 \qquad \ddot{\theta}+\frac{2}{3}\frac{g}{\left(R-r\right)}\sin\theta=0$$

o nella approssimazione di piccoli spostamenti sinθ=θ:

$$\ddot{\theta}+\frac{2}{3}\frac{g}{\left(R-r\right)}\theta=0$$

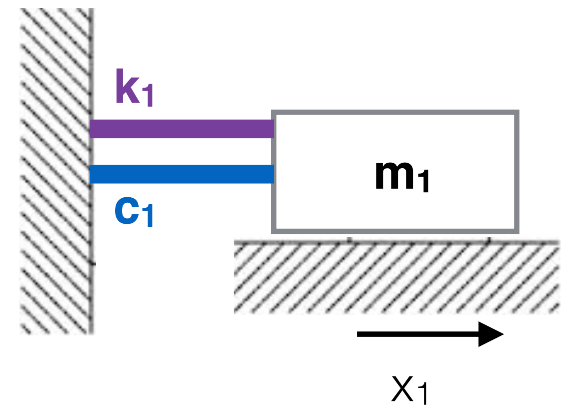
si osserva come la pulsazione naturale dipenda dai raggi che descrivono il sistema!

raggi R, grandi > frequenza ω_n , basse e viceversa!



Soluzione omogenea per un sistema SDOF, nel tempo - con Matlab

Consideriamo un sistema a 1DOF



scriviamo le equazioni del moto …
(diagramma corpo libero / equilibrio forze)

$$m_1\ddot{x}_1 + c_1\dot{x}_1 + k_1 x_1 = 0$$

ipotizziamo di avere delle condizioni iniziali
per spostamento e velocità

$$x(0) = x_0 = 1 \qquad \dot{x}(0) = \dot{x}_0 = 0$$

sappiamo già che la soluzione in questo caso è:

$$x(t) = e^{-\zeta\omega_n t}\left[x_0\cos(\omega_d t) + \left(\frac{\dot{x}_0 + \zeta\omega_n x_0}{\omega_d}\right)\sin(\omega_d t)\right]$$

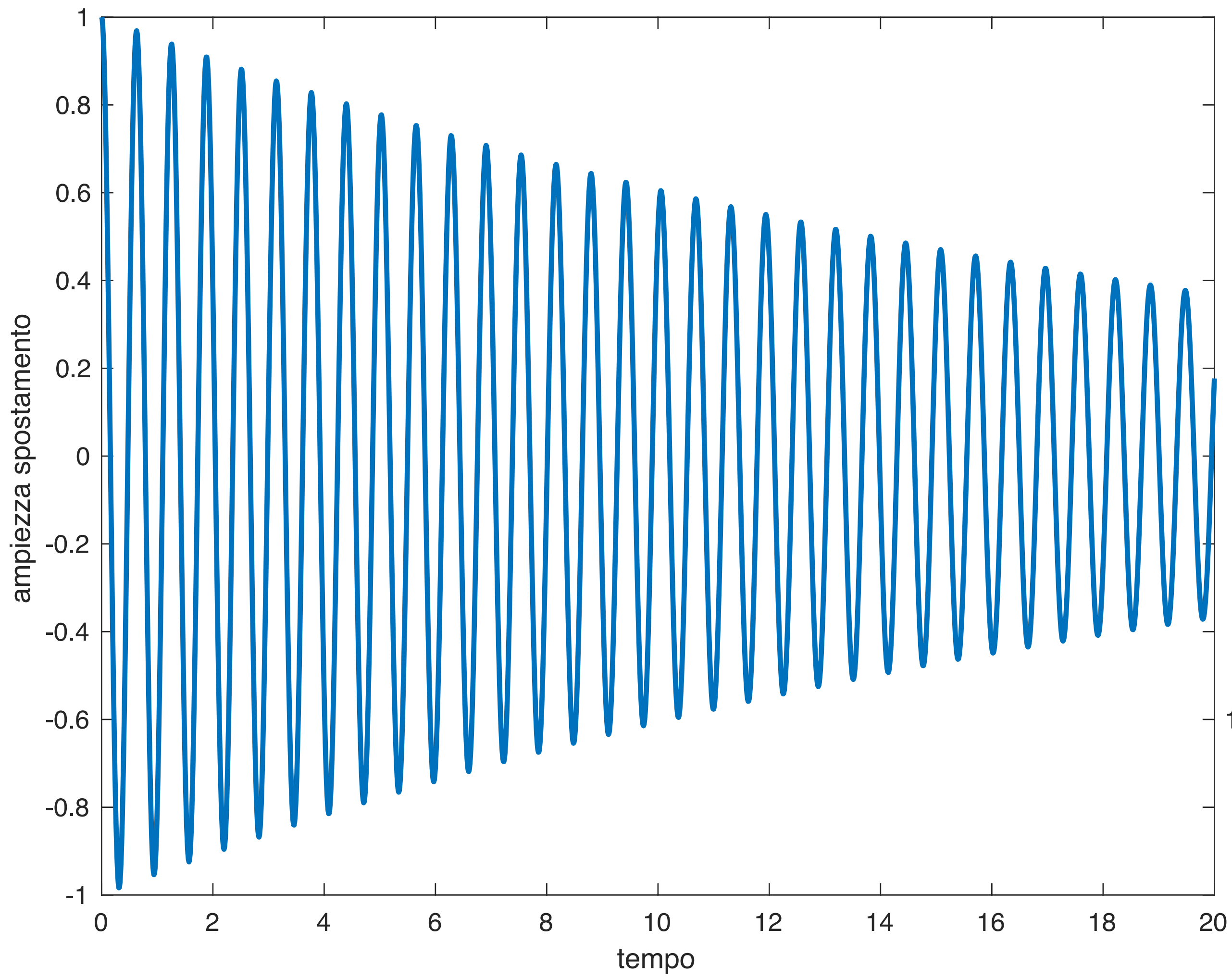
con le solite sostituzioni:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad c_c = 2\sqrt{km} \qquad \zeta = \frac{c}{c_c} \qquad \omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

per ottenere la risposta in Matlab dovremmo:

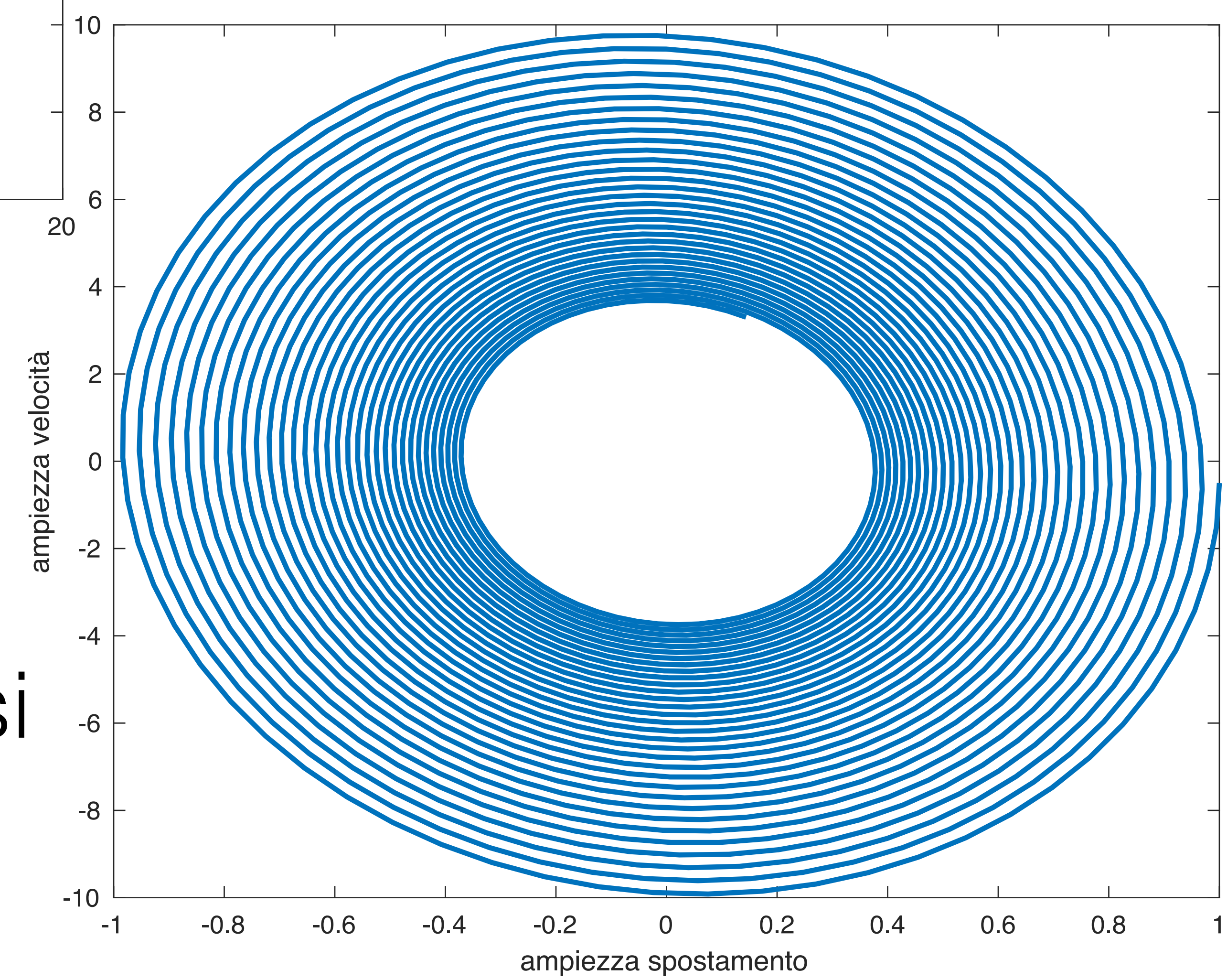
- definire i parametri del sistema (costanti fisiche)
- calcolare i valori caratteristici
- definire l'asse dei tempi (su cui calcolare la soluzione)
- calcolare lo spostamento
- plottare quello che serve…

```
% definisco i parametri del sistema
m1=10;
c1=1;
k1=1000;

%definisco condizioni al contorno
x0=1;
xdot0=0;

% calcolo i valori caratteristici
om_n=sqrt(k1/m1);
c_c=2*sqrt(k1*m1);
csi=c1/c_c;
om_d=om_n*sqrt(1-csi^2);

% definisco l'asse dei tempi
t=0:.01:20;

% calcolo lo spostamento
x1=exp(-csi*om_n.*t).*(x0*cos(om_d.*t)+((xdot0+csi*om_n*x0)/om_d)*sin(om_d.*t));

% calcolo la velocità
% NB si può esprimere in forma chiusa
% oppure usando formule più o meno approssimate
xdot1=diff(x1)/.01      % calcola la differenza tra due punti
                        % e divide per dt definito nell'asse dei tempi
```



spostamento x(1)
funzione del tempo

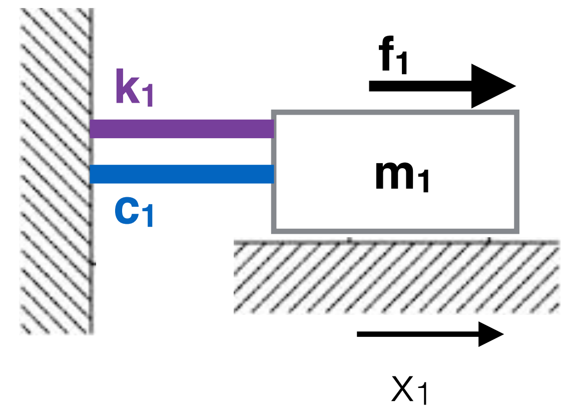
spazio delle fasi
x(1) vs x(2)



Soluzione particolare per un sistema SDOF, nel tempo - con Matlab (forzante costante nel tempo)

Luigi BREGANT
bregant@units.it

Consideriamo un sistema a 1DOF



scriviamo le equazioni del moto …
(diagramma corpo libero / equilibro forze)

$$m_1\ddot{x}_1 + c_1\dot{x}_1 + k_1x_1 = f_1$$

isoliamo la derivata di ordine massimo :

$$\ddot{x}_1 = \frac{1}{m_1}\left[f_1 - c_1\dot{x}_1 - k_1x_1\right]$$

Possiamo partire da questa espressione con l'integrazione numerica diretta (ODE) in Matlab o con l'integrazione "*grafica*" utilizzando Simulink

NB *grafica.. intendendo che l'equazione differenziale è riportata in forma grafica!*

Con l'integrazione numerica diretta:

Serve fare un po' di cose :

- definire le variabili e le loro derivate
- definire l'intervallo di tempo su cui calcolare la soluzione
- definire le condizioni all'istante iniziale
- definire la funzione da integrare
- definire la tecnica di integrazione numerica adatta

Per la tecnica di integrazione si utilizzerà, in questo esempio, ode45 un tecnica approssimata di integrazione del tipo RungeKutta del 4 ordine, di buona accuratezza, adatta a problemi non stiff

cercate..how to choose an ODE solver..

In questo esempio abbiamo una variabile e le sue derivate:

$$x_1 \quad \dot{x}_1 \quad \ddot{x}_1$$

risolvere l'equazione significa trovare l'andamento nel tempo dello spostamento e della velocità! (l'accelerazione è CL di queste).

Definiamo:

$$y = x(1) = x_1 \qquad ydot = x(2) = \dot{x}_1$$

Ed esprimiamo la nostra equazione del moto in funzione di queste:

$$dxdt(1) = ydot$$

$$dxdt(2) = \frac{1}{m_1}\left[f_1 - c_1 ydot - k_1 y \right]$$

Con questo passaggio
trasformiamo l'equazione del moto di ordine2
in due equazioni di ordine1

Siamo pronti a creare una funzione contenete i parametri del sistema, le variabili, le forzanti.

```
function dxdt=mdvODEexample1(t,x)

% definisco i parametri del sistema
m1=10;
c1=1;
k1=1000;

% definisco le variabili del sistema
y=x(1);
ydot=x(2);

% definisco le forzanti del sistema
f1=100;

% scrivo le equazioni del moto
dxdt=zeros(size(x));
dxdt(1)=ydot;
dxdt(2)=(1/m1)*(f1-c1*ydot-k1*y);    % this is ydotdot
```

Posso anche inserire forzanti dipendenti dal tempo
es f1=100*sin(2*pi*10*t)

Salviamo la funzione mdvODEexample1.m

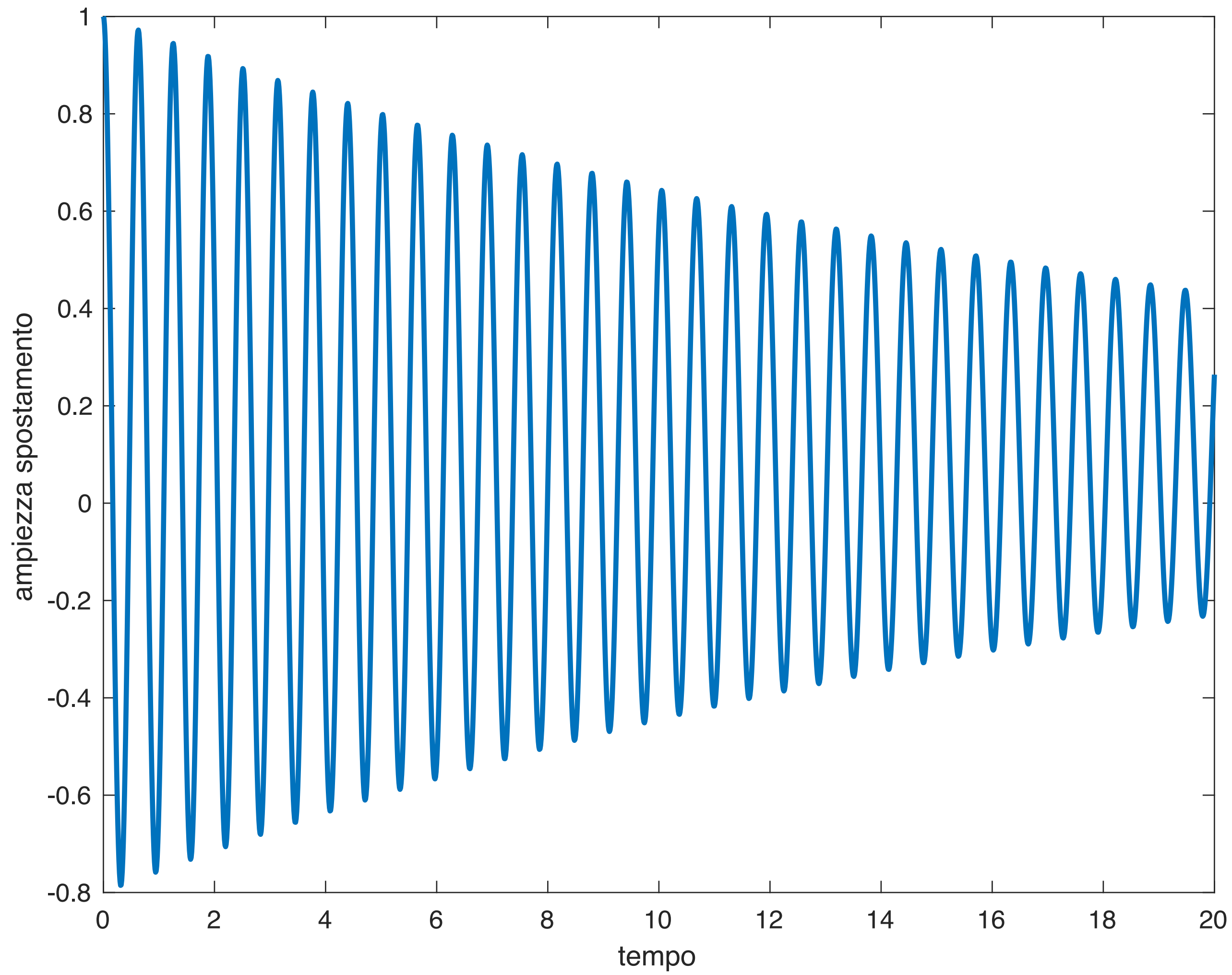
Definita la funzione posso calcolare la soluzione in Matlab, definendo l'intervallo di tempo su cui integrarla e le condizioni iniziali (su spostamento e velocità)

[TOUT,YOUT] = ode45(ODEFUN,TSPAN,Y0)

[t,x]=ode45(@mdvODEexample1,[0:.01:20],[1; 0]);

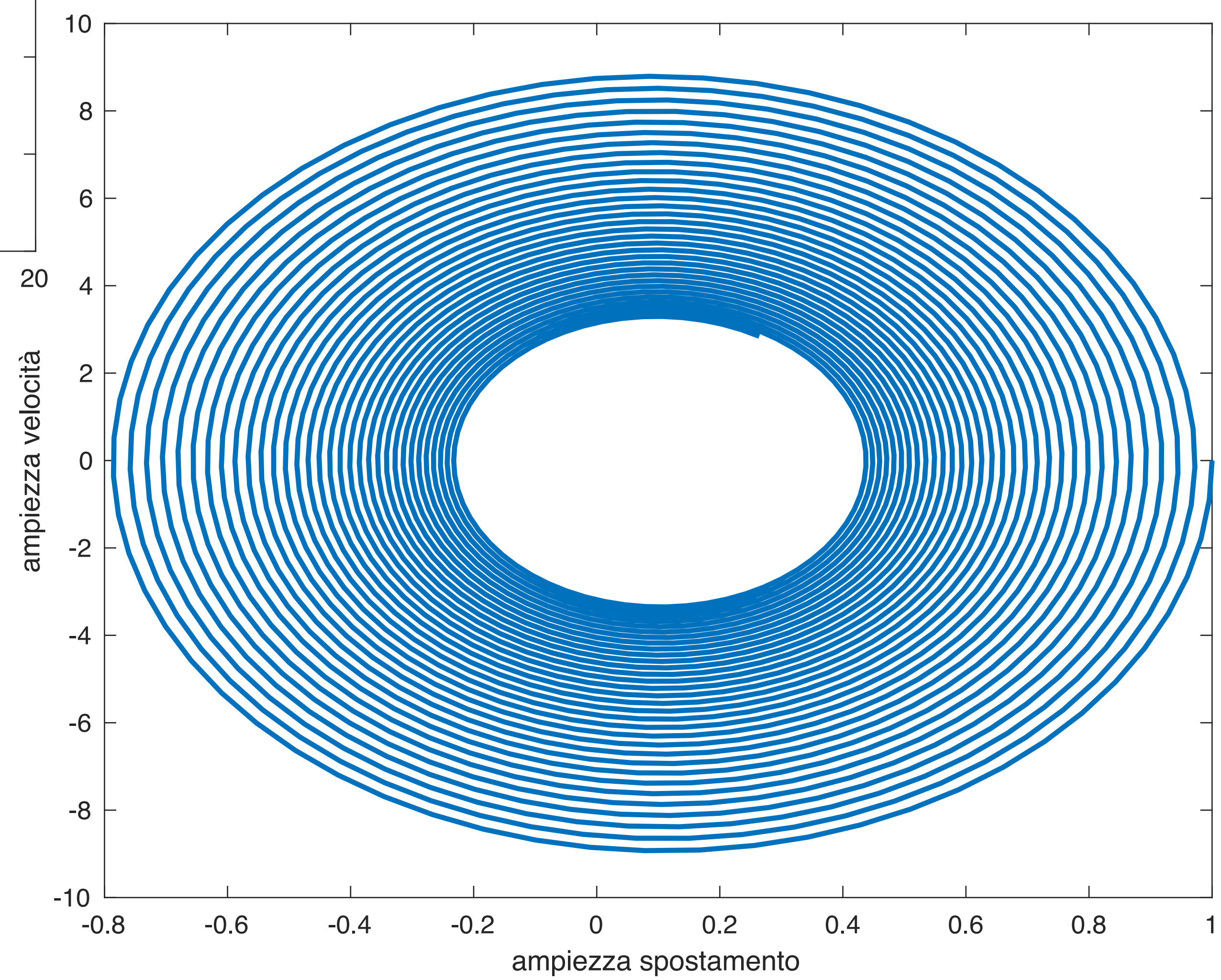
come risultato abbiamo: il vettore dei tempi **t**
e la matrice dei risultati **x** contenete il vettore spostamento ed il vettore velocità.

Plottiamo i risultati come riteniamo utile..



spostamento x(1)
funzione del tempo

spazio delle fasi
x(1) vs x(2)



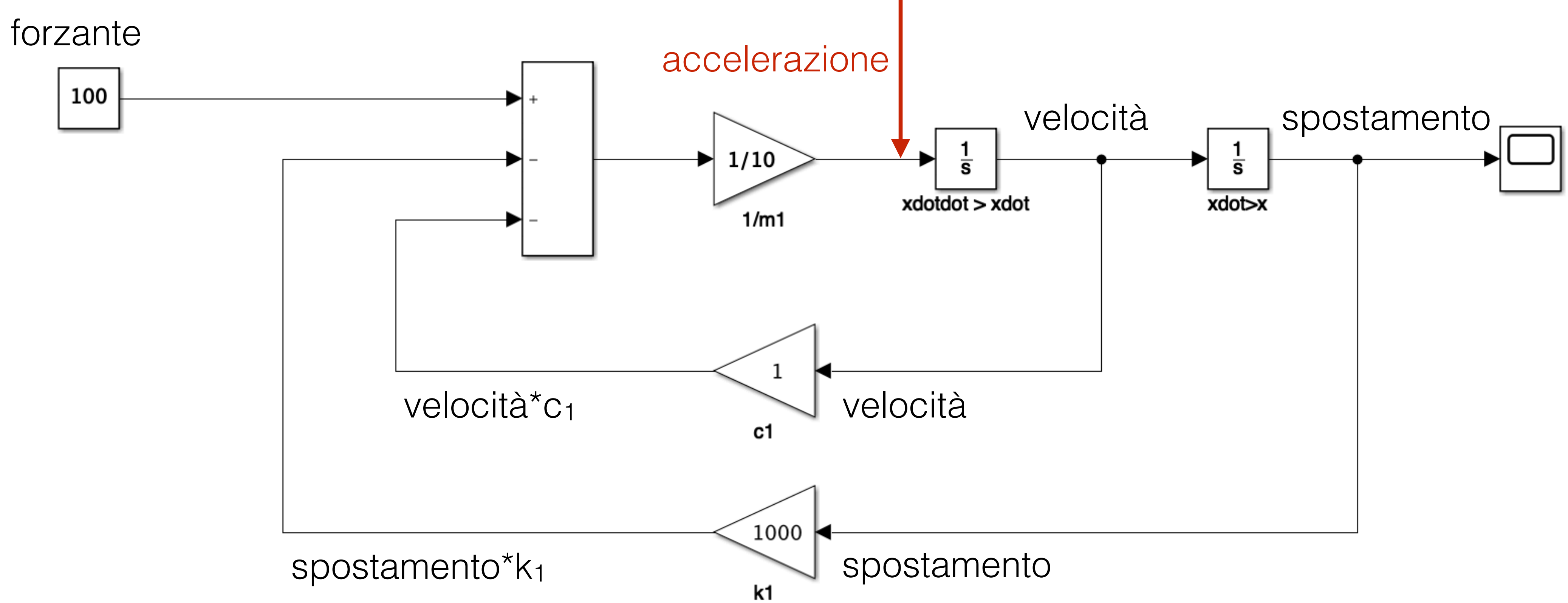
Con Simulink

Facciamo partire Simulink e cerchiamo i blocchi che eseguono le operazioni utili a replicare l'equazione,

(integrazione, somma, moltiplicazione per un coefficiente, costante..)

e colleghiamole opportunamente ..

$$\frac{1}{m_1}\left[f_1 - c_1\dot{x}_1 - k_1 x_1\right] = \ddot{x}_1$$

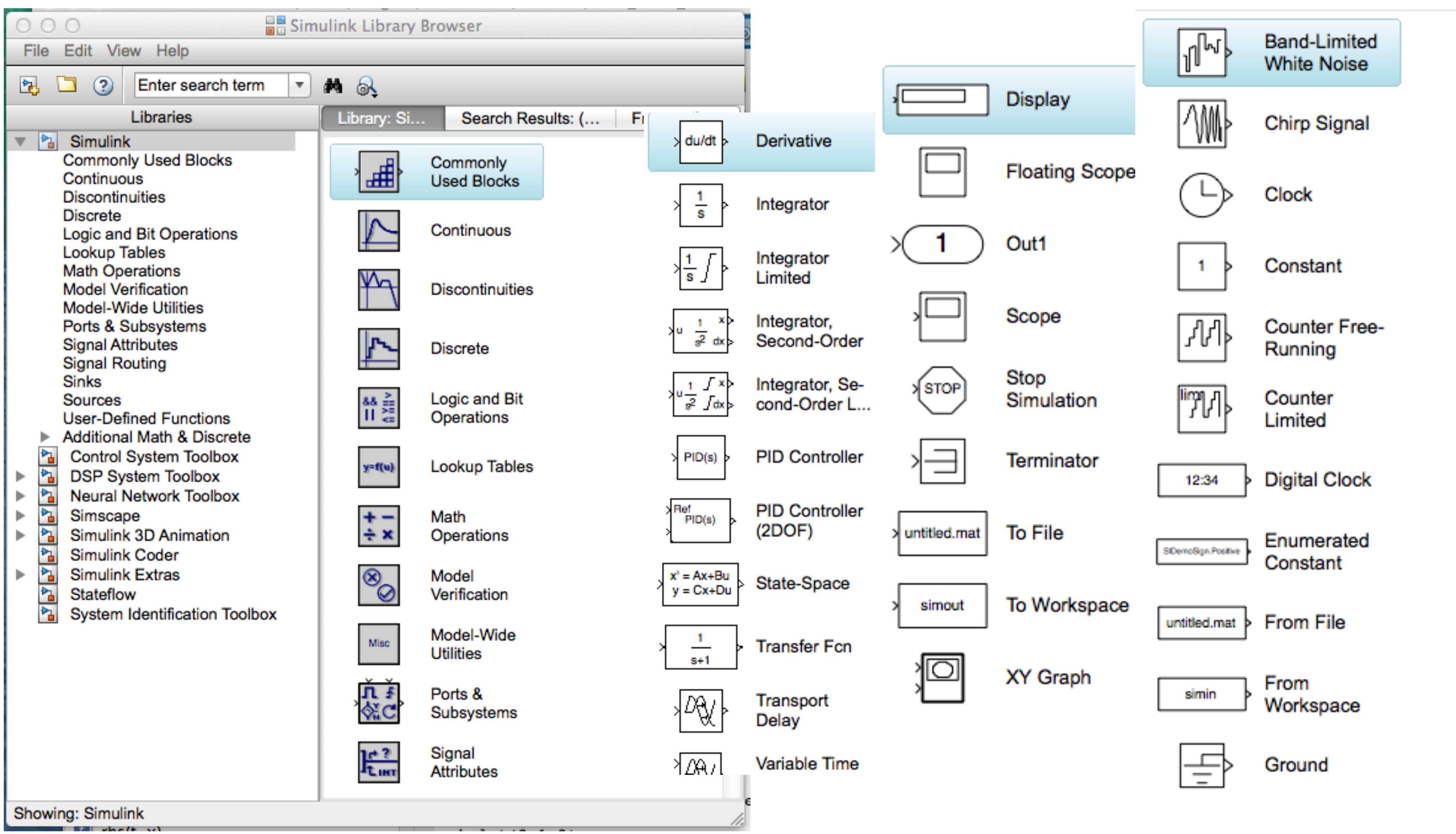


E' vietato ogni utilizzo diverso da quello inerente la preparazione dell'esame del corso di Meccanica delle Vibrazioni @Units
E' espressamente vietato l'utilizzo per qualsiasi scopo commerciale e/o di lucro

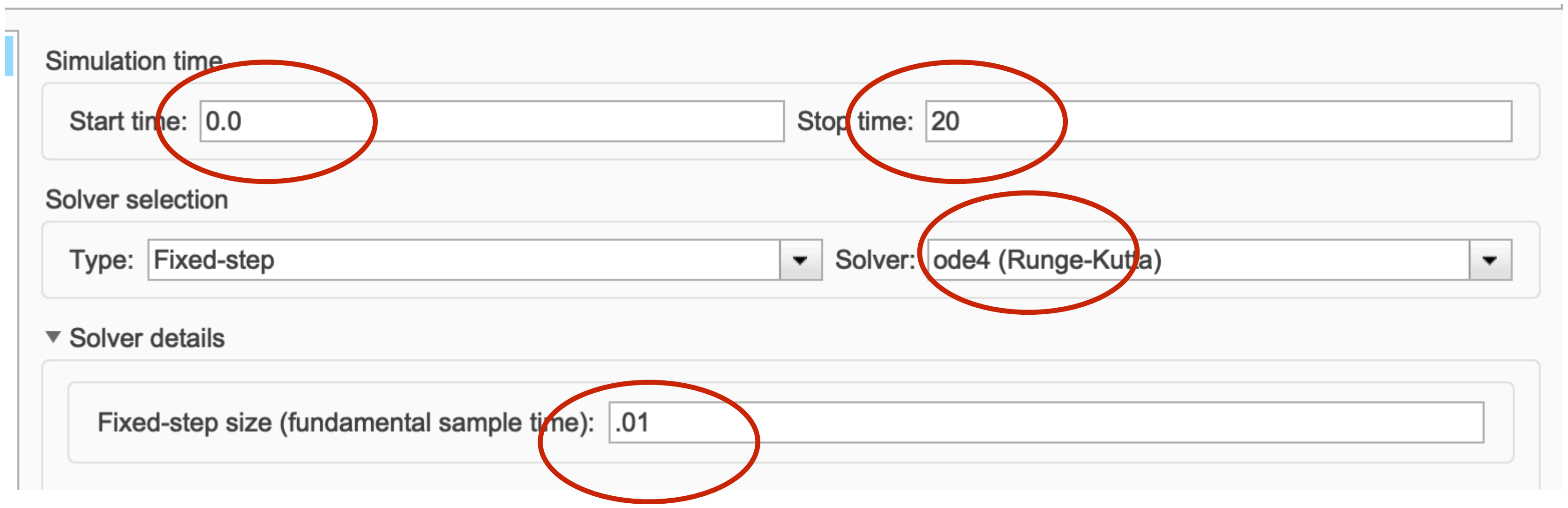
Con Simulink

NB: I blocchi sono veramente tanti.. e fanno cose più o meno adatte al vostro problema!

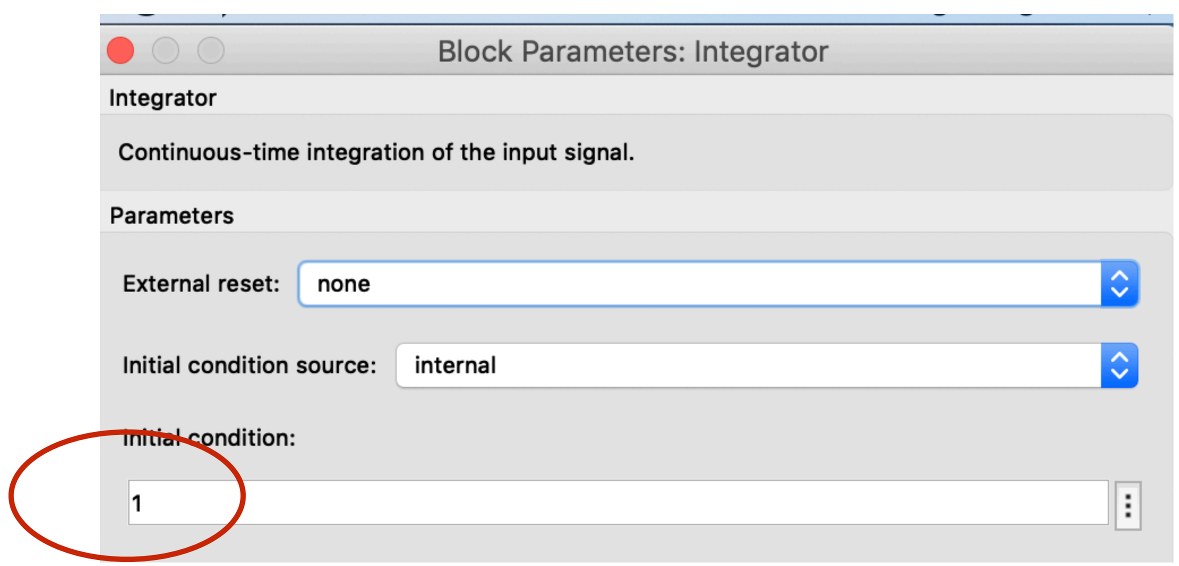
Siate attenti a capire cosa esattamente fa il blocco e come lo fa!



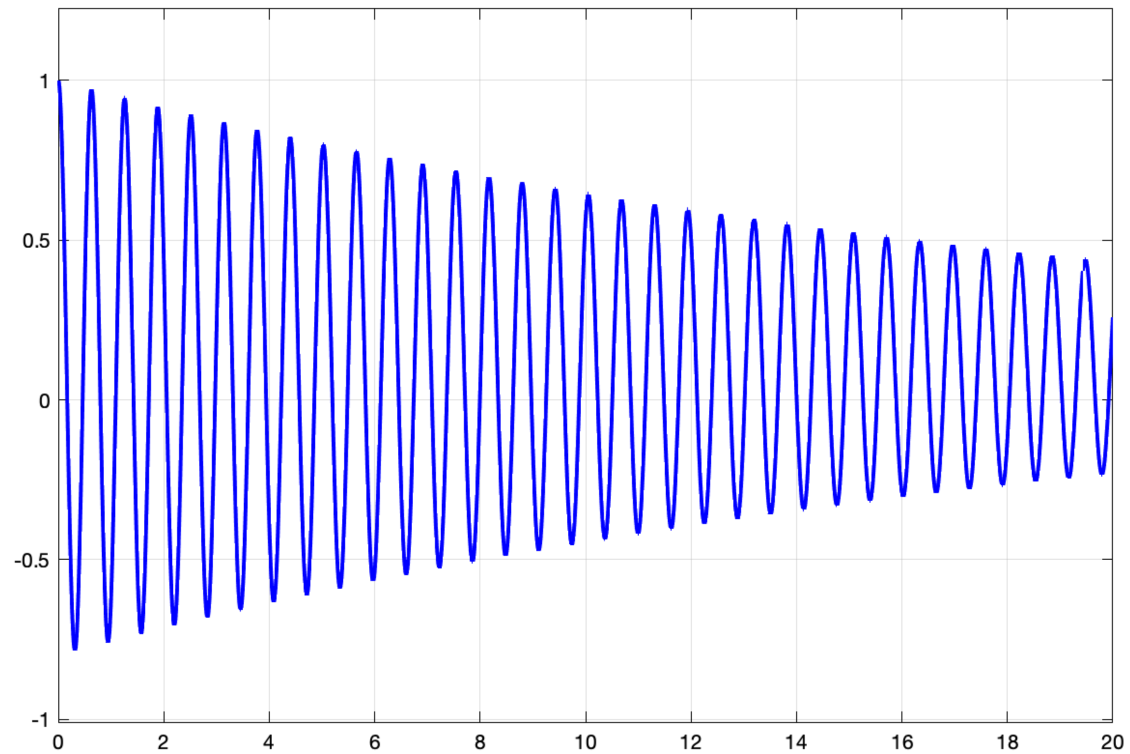
In Simulation > Model Configuration Parameter definiamo intervallo di integrazione, solutore, risoluzione



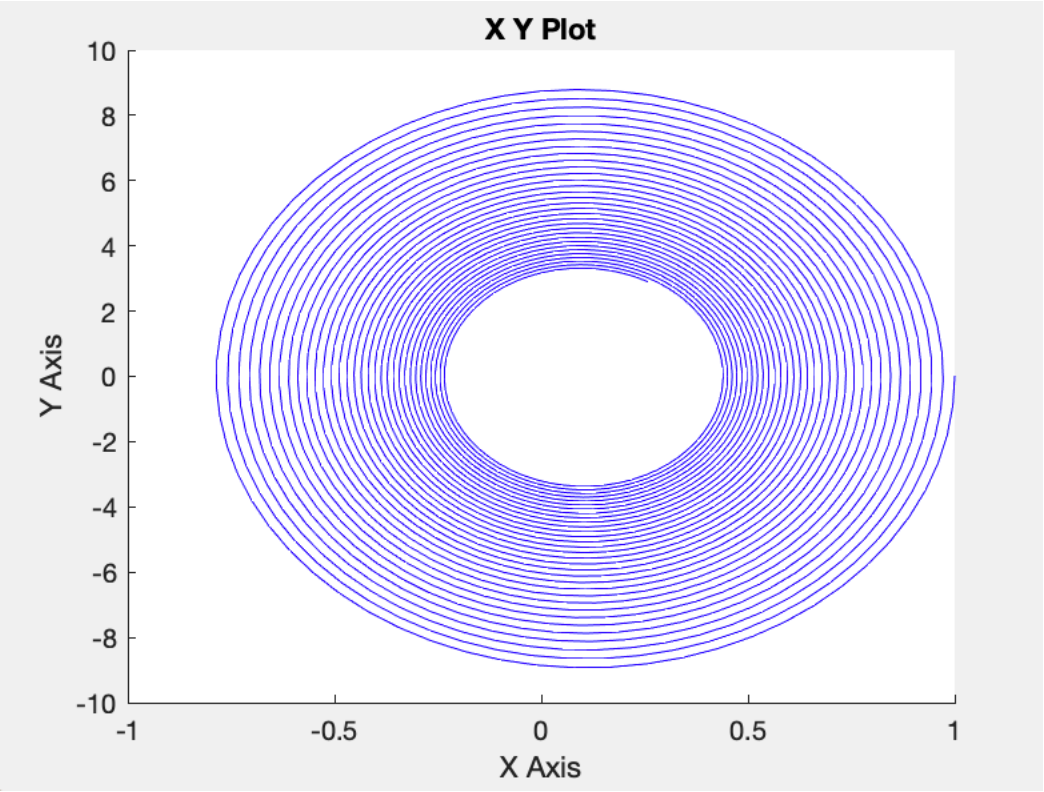
Nel blocco integrazione xdot>x mettiamo le condizioni iniziali sullo spostamento



Avviando la simulazione (pulsante verde) e visualizzando i risultati si ottengono gli stessi grafici precedentemente ottenuti..



spostamento x(1) funzione del tempo

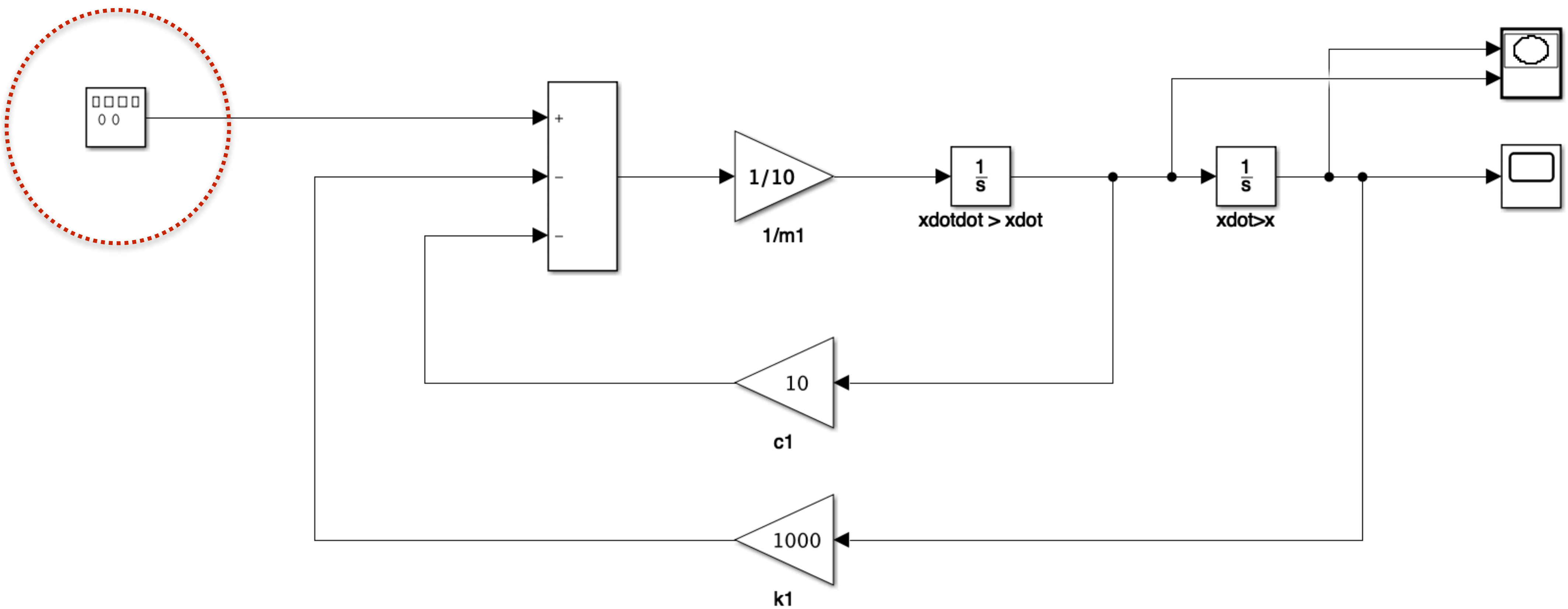


spazio delle fasi x(1) vs x(2)

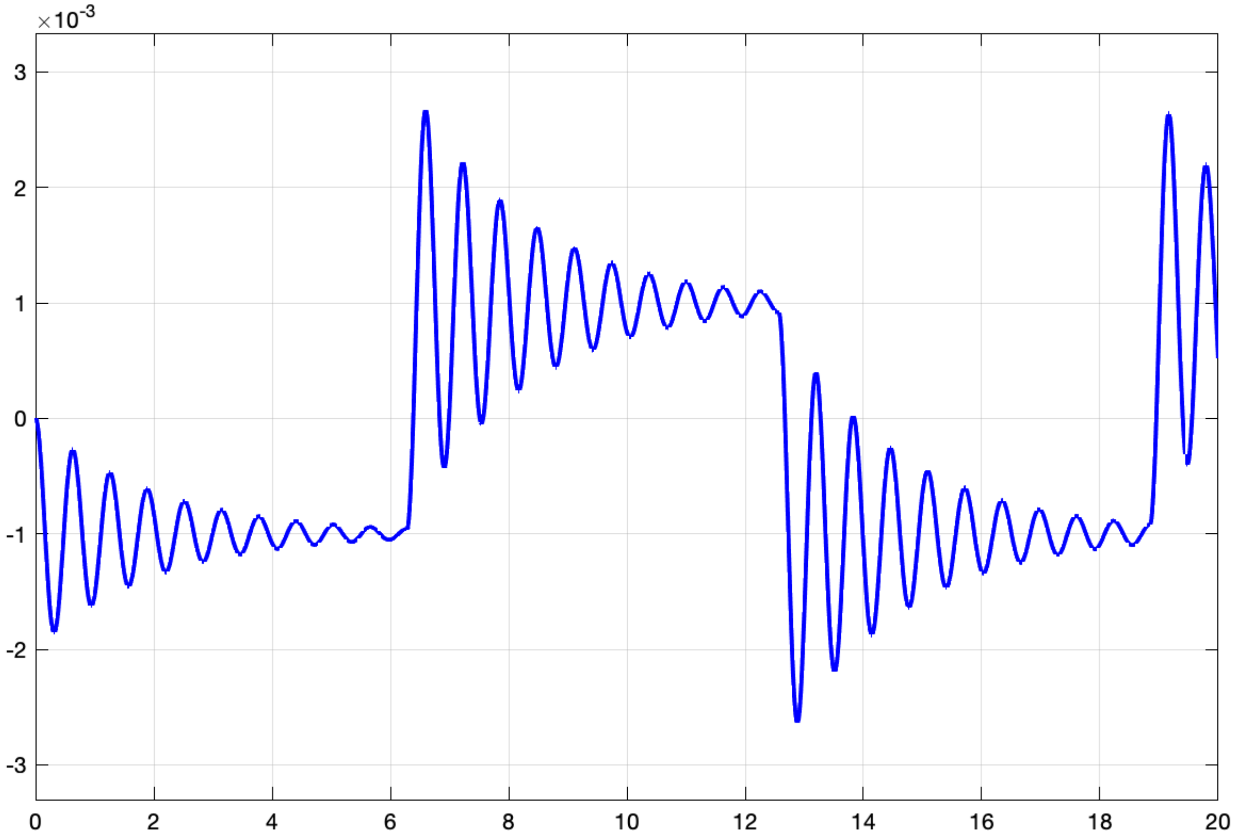
Soluzione particolare per un sistema SDOF, nel tempo - con Matlab (forzante generica tempo)

Luigi BREGANT
bregant@units.it

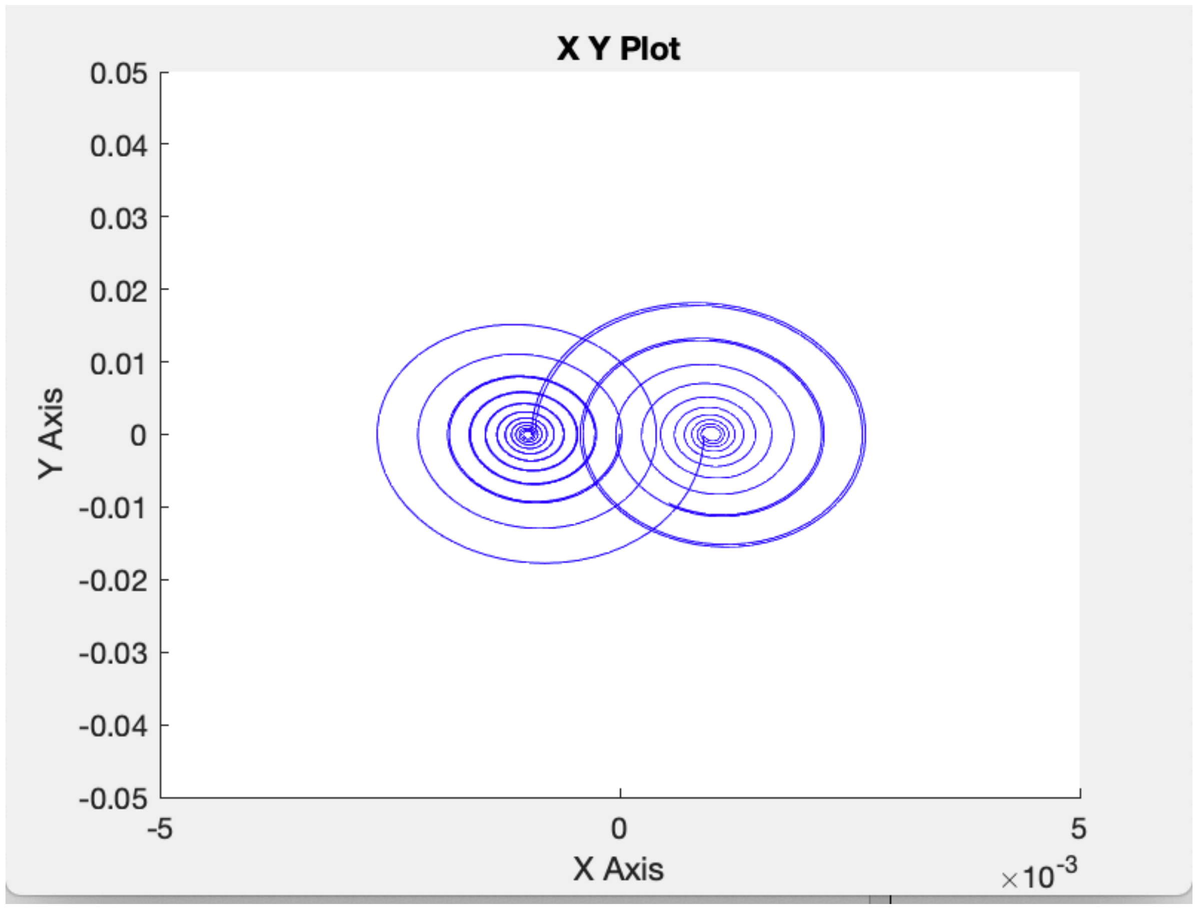
Analogamente al caso precedente, ma cambiato il blocco relativo alla forzante con un generatore di funzioni



..cambiando i parametri fisici si ottengono le risposte del caso..

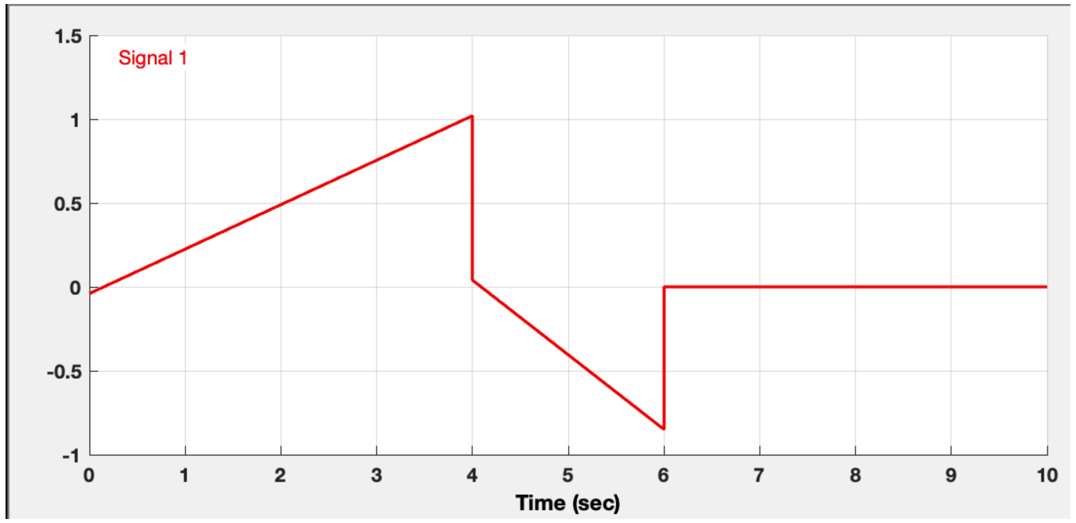


spostamento x(1)
funzione del tempo
eccitazione onda quadra

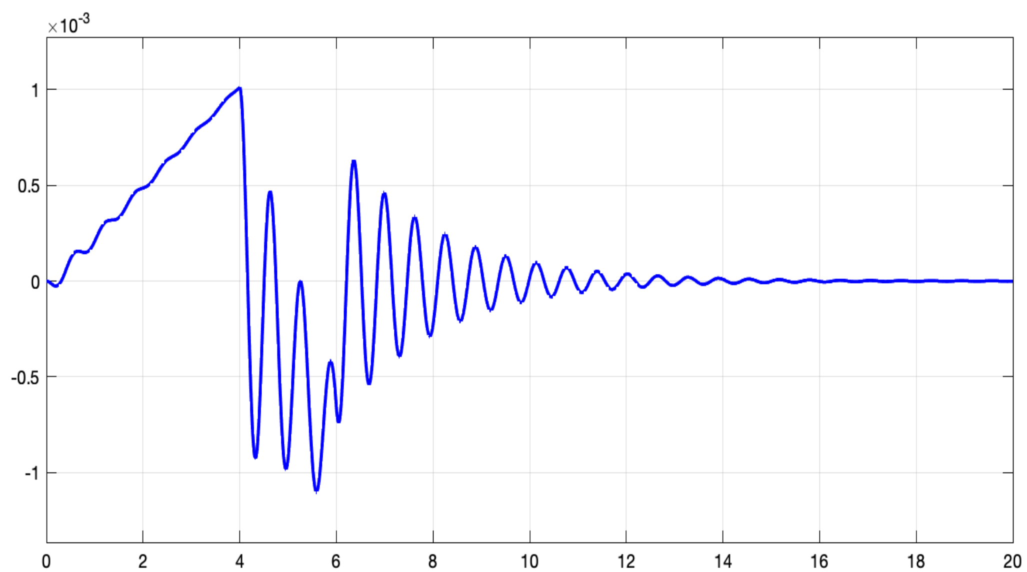


spazio delle fasi
x(1) vs x(2)

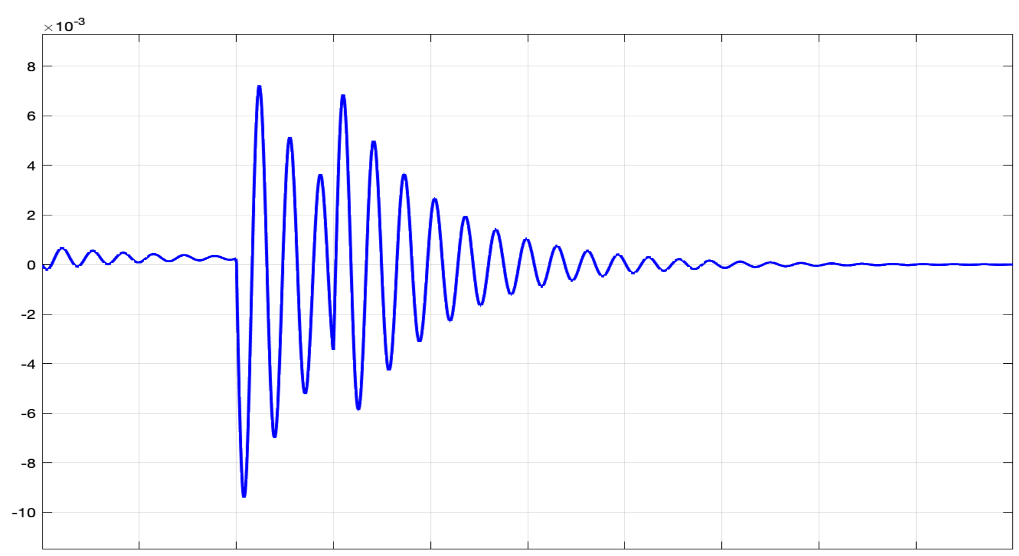
Luigi BREGANT
bregant@units.it



Eccitazione generica f



spostamento x(1)
funzione del tempo
eccitazione generica

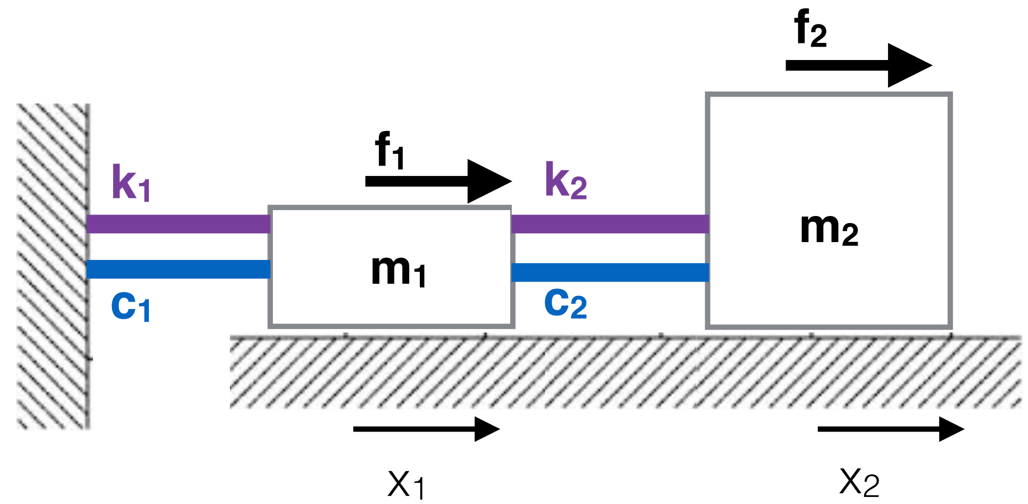


velocità x(1)
funzione del tempo
eccitazione generica

Soluzione particolare per un sistema MDOF, nel tempo - con Matlab

Luigi BREGANT
bregant@units.it

Consideriamo un sistema a 2DOF



scriviamo le equazioni del moto …
(diagramma corpo libero / equilibro forze)

$$m_1\ddot{x}_1 + c_1\dot{x}_1 + c_2\left(\dot{x}_1 - \dot{x}_2\right) + k_1 x_1 + k_2\left(x_1 - x_2\right) = f_1$$

$$m_2\ddot{x}_2 + c_2\left(\dot{x}_2 - \dot{x}_1\right) + k_2\left(x_2 - x_1\right) = f_2$$

per controllo anche in forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_1 \\ -c_1 & c_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_1 \\ -k_1 & k_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix}$$

simmetrica simmetrica simmetrica

isoliamo la derivata di ordine massimo :

$$\ddot{x}_1 = \frac{1}{m_1}\left[-c_1\dot{x}_1 + c_2\left(\dot{x}_2 - \dot{x}_1\right) - k_1x_1 + k_2\left(x_2 - x_1\right) + f_1\right]$$

$$\ddot{x}_2 = \frac{1}{m_2}\left[c_2\left(\dot{x}_1 - \dot{x}_2\right) + k_2\left(x_1 - x_2\right) + f_2\right]$$

e riordiniamo le equazioni :

$$\ddot{x}_1 = \frac{1}{m_1}\left[-(c_1 + c_2)\dot{x}_1 + c_2\dot{x}_2 - (k_1 + k_2)x_1 + k_2x_2 + f_1\right]$$

$$\ddot{x}_2 = \frac{1}{m_2}\left[c_2\dot{x}_1 - c_2\dot{x}_2 + k_2x_1 - k_2x_2 + f_2\right]$$

possiamo partire da qui per l'integrazione numerica diretta
o con Simulink (analogamente al caso precedente)

In questo esempio abbiamo le due variabili e le loro derivate:

$$x_1 \qquad x_2 \qquad \dot{x}_1 \qquad \dot{x}_2 \qquad \ddot{x}_1 \qquad \ddot{x}_2$$

chiamiamole per semplicità

$$x(1) \qquad x(2) \qquad x(3) \qquad x(4) \qquad x(5) \qquad x(6)$$

In Matlab trasformiamo il sistema di equazioni del moto del secondo ordine in un sistema di equazioni del primo!

Definiamo due nuove variabili y e z, scriviamo le loro derivate:

$$y = x(1) \qquad ydot = x(2) \qquad z = x(3) \qquad zdot = x(4)$$

ed esprimiamo le nostre equazioni del moto in funzione di queste variabili:

$$dxdt(1) = ydot$$

$$dxdt(2) = \frac{1}{m_1}\left[-(c_1 + c_2)ydot + c_2 zdot - (k_1 + k_2)y + k_2 z + f_1\right]$$

$$dxdt(3) = zdot$$

$$dxdt(4) = \frac{1}{m_2}\left[c_2 ydot - c_2 zdot + k_2 y - k_2 z + f_2\right]$$

a questo punto siamo pronti per integrare queste equazioni in Matlab!

Si crea una funzione che contiene i parametri del sistema le variabili, le forzanti.
Salviamo la funzione mdvODEexample.m

```
function dxdt=mdvODEexample(t,x)

% definisco i parametri del sistema
m1=10;
m2=5;
c1=0;
c2=10;
k1=1000;
k2=1500;

% definisco le variabili del sistema
y=x(1);
ydot=x(2);
z=x(3);
zdot=x(4);

% definisco le forzanti del sistema
f1=2*sin(4*pi*t);
f2=100;

% scrivo le equazioni del moto
dxdt=zeros(size(x));
dxdt(1)=ydot;
dxdt(2)=(1/m1)*(-(c1+c2)*ydot+c2*zdot-(k1+k2)*y+k2*z+f1);     % this is ydotdot
dxdt(3)=zdot;
dxdt(4)=(1/m2)*(c2*ydot-c2*zdot+k2*y-k2*z+f2);                 % this is zdotdot
```

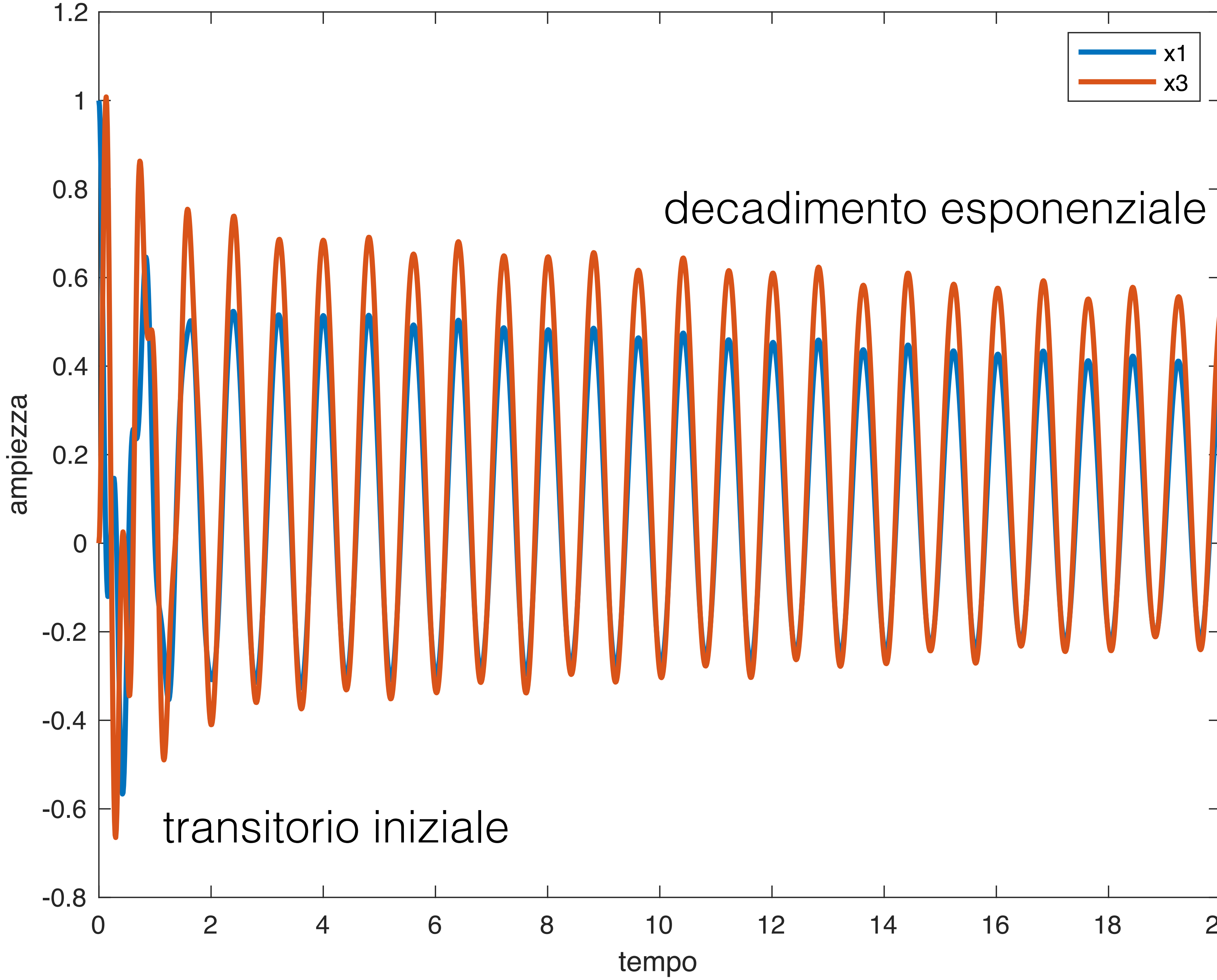
Usando la funzione mdvODEexample.m
il tempo di integrazione [0:.01:20] (da 1 a 20s con step 0.1)
le condizioni iniziali [1; 0; 0; 0] (x(1)=0; x(2)=x(3)=x4)=0)

>>[t,x]=ode45(@mdvODEexample,[0:.01:20],[1; 0; 0; 0]);

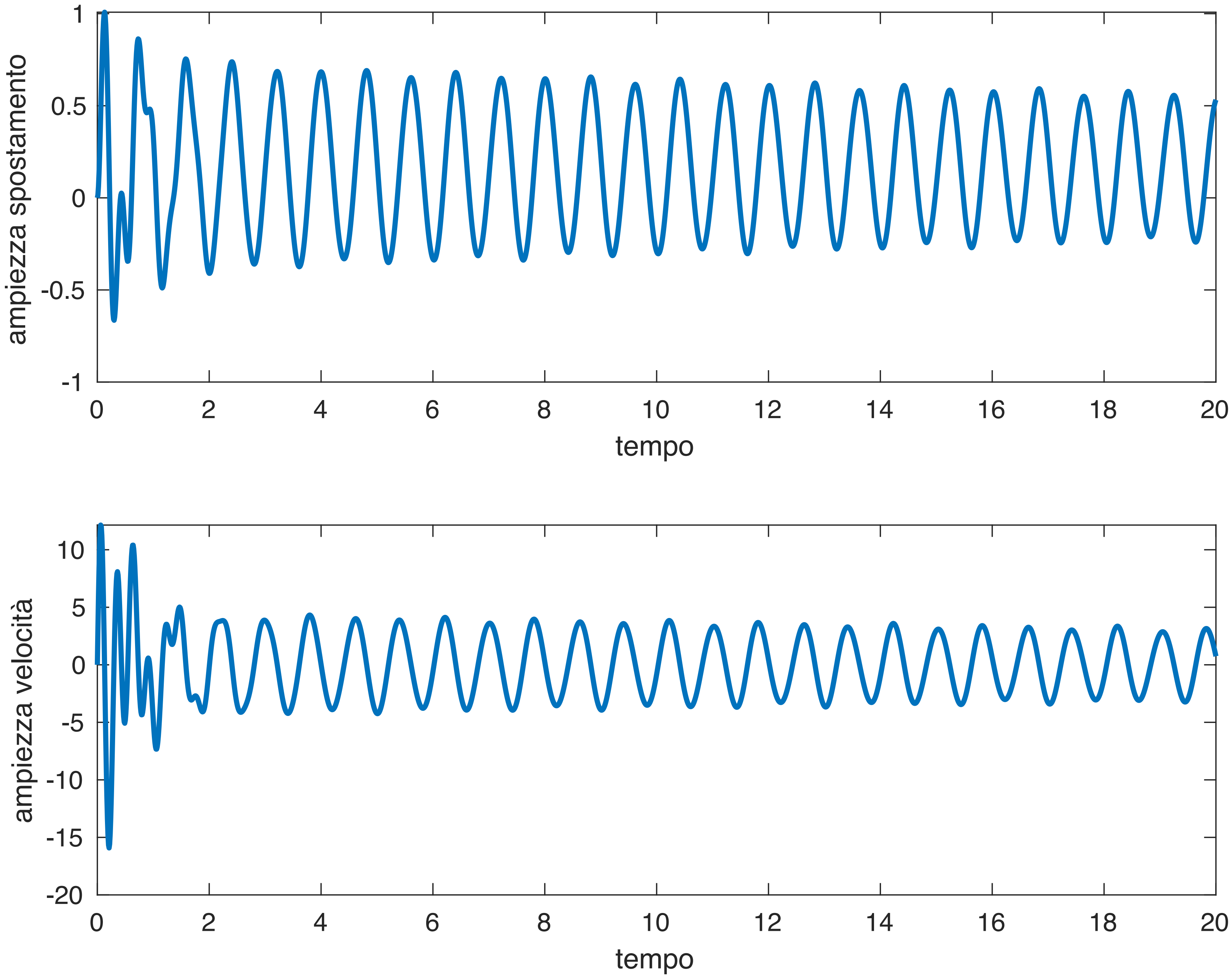
(In Matlab ci sono ulteriori opzioni…provate, provate, provate)

si ottiene il risultato cercato:
l’andamento di x(1), x(2), x(3) e x(4)!
rispettivamente spostamento e velocità della massa1 e massa2

Cambiando caratteristiche del sistema, condizioni iniziali, forzanti si possono valutare tutte le soluzioni possibili..



spostamento massa1 e massa2, in funzione del tempo



spostamento e velocità massa2, in funzione del tempo

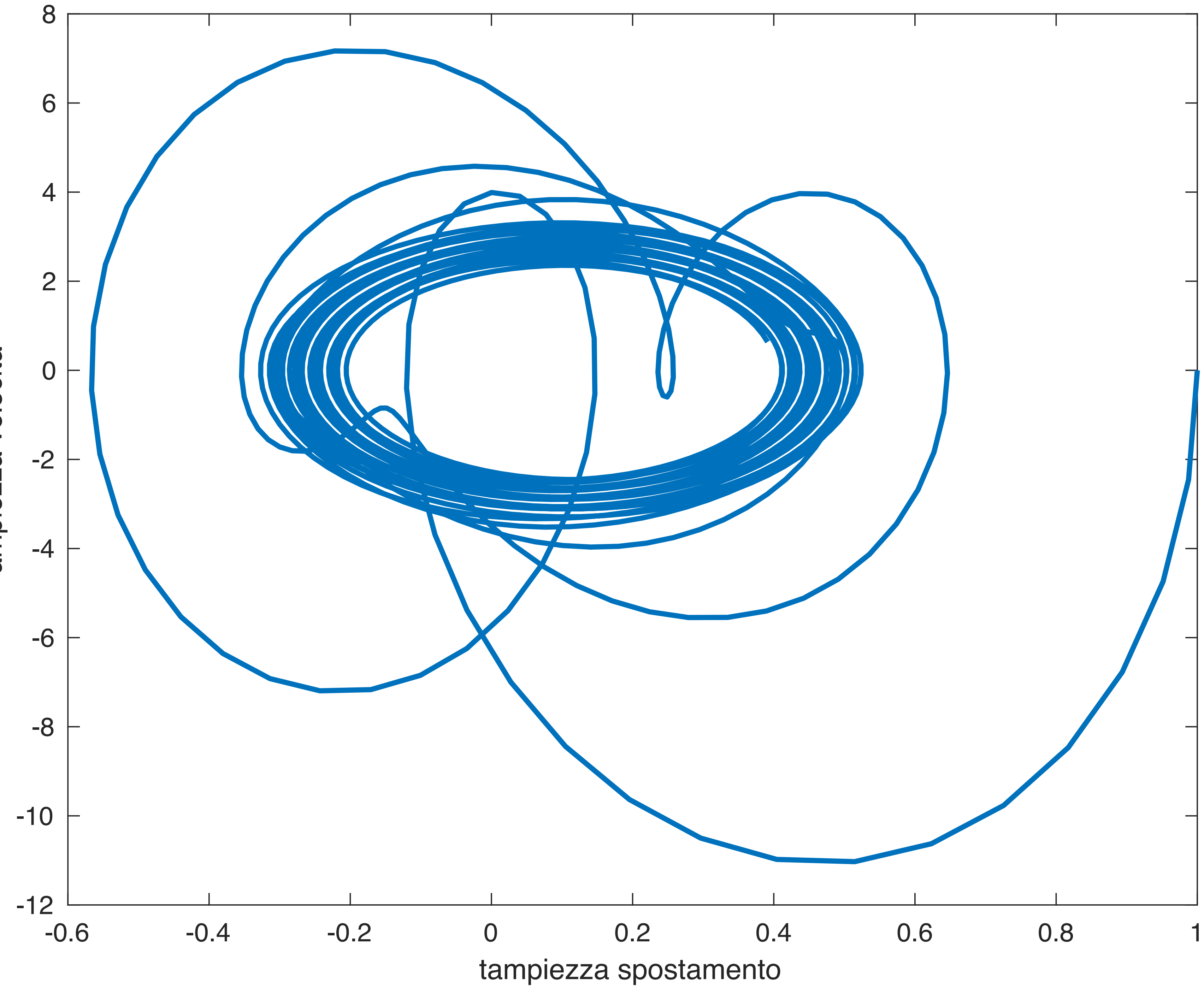
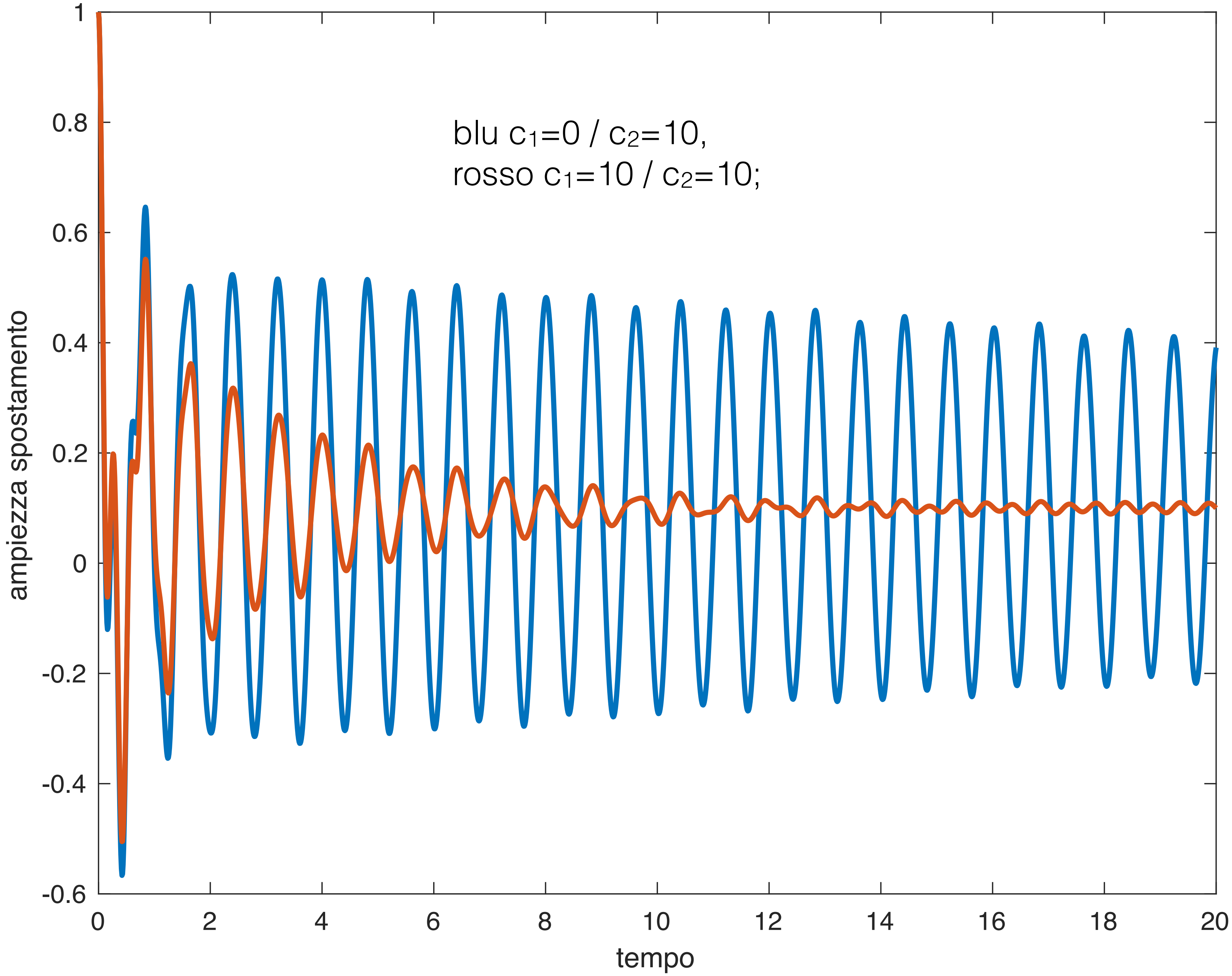


diagramma delle fasi massa1



spostamento e velocità massa1, in funzione del tempo, diverso valore combinazioni smorzamento

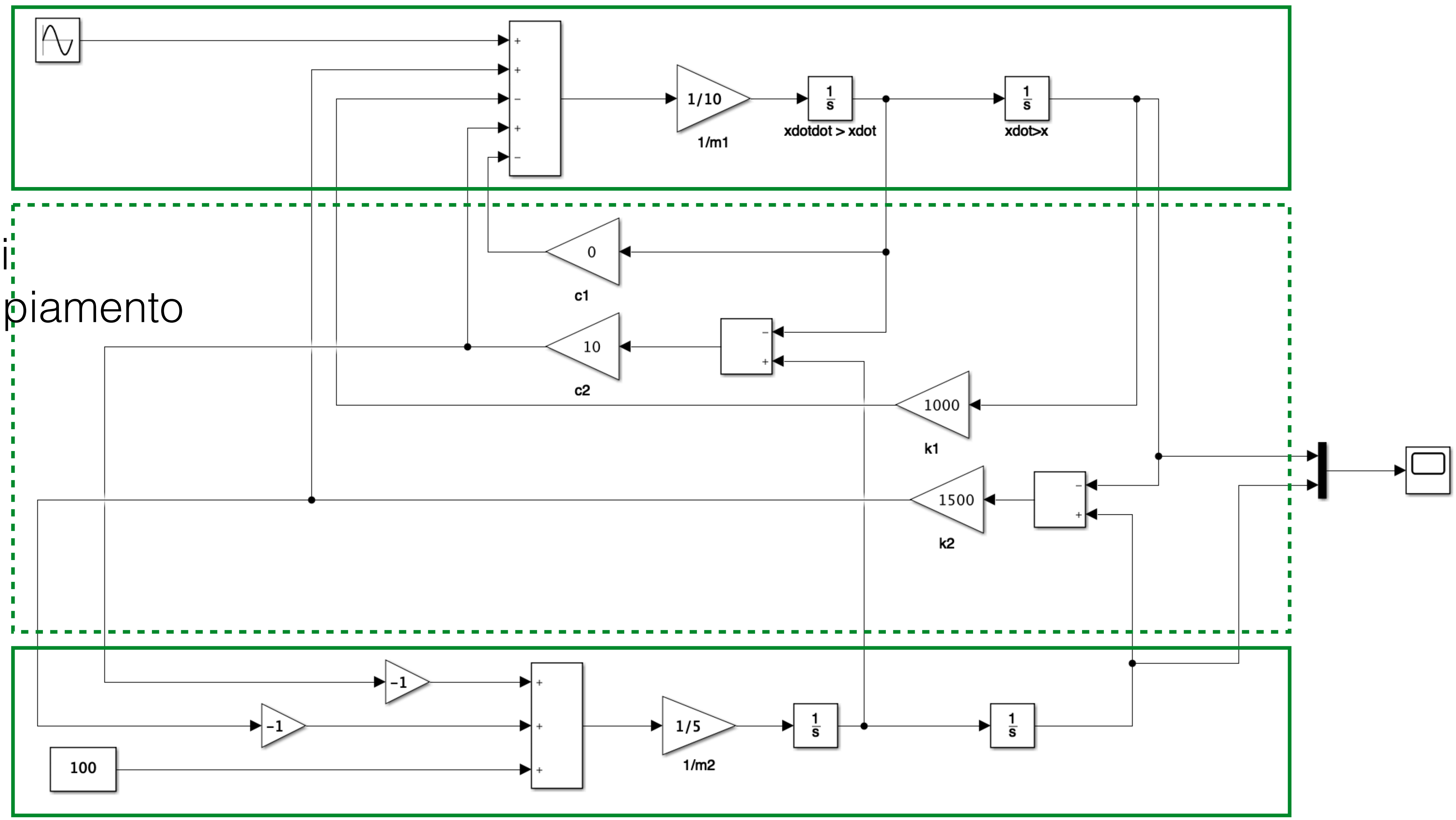
Con Simulink

Facciamo partire Simulink e cerchiamo i blocchi che eseguono le operazioni utili a replicare l'equazione..

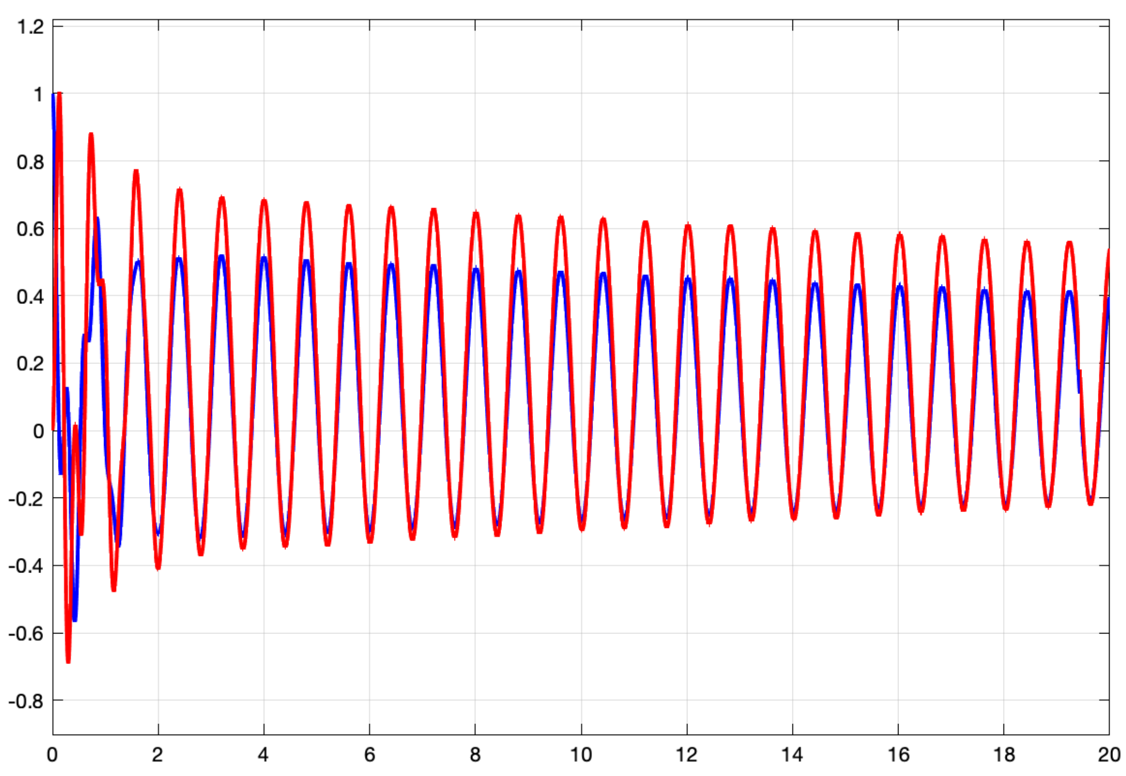
eq.1

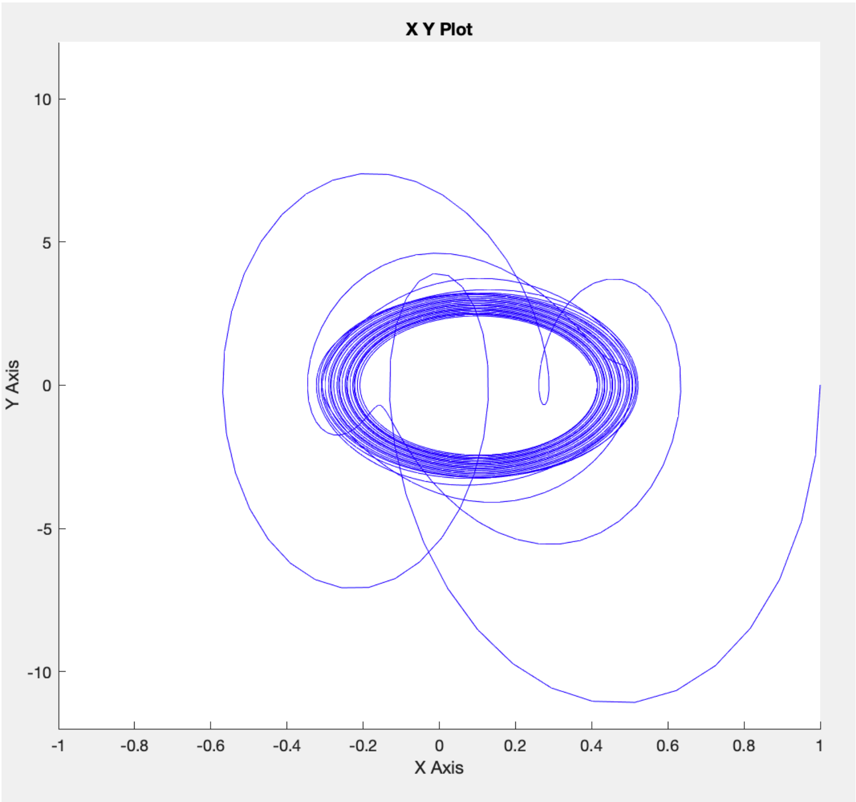
termini accoppiamento

eq.2



Ricordatevi di definire (correttamente) le costanti numeriche,
le condizioni iniziali dei blocchi di integrazione
il tipo e caratteristiche delle forzanti
(attenzione simulink/matlab spesso chiamano frequenza una pulsazione..c'è un valore 2*pi di mezzo)
i parametri di integrazione
..
otterrete gli stessi grafici del caso precedente ottenuto con integrazione delle eq. differenziali con ODE45!



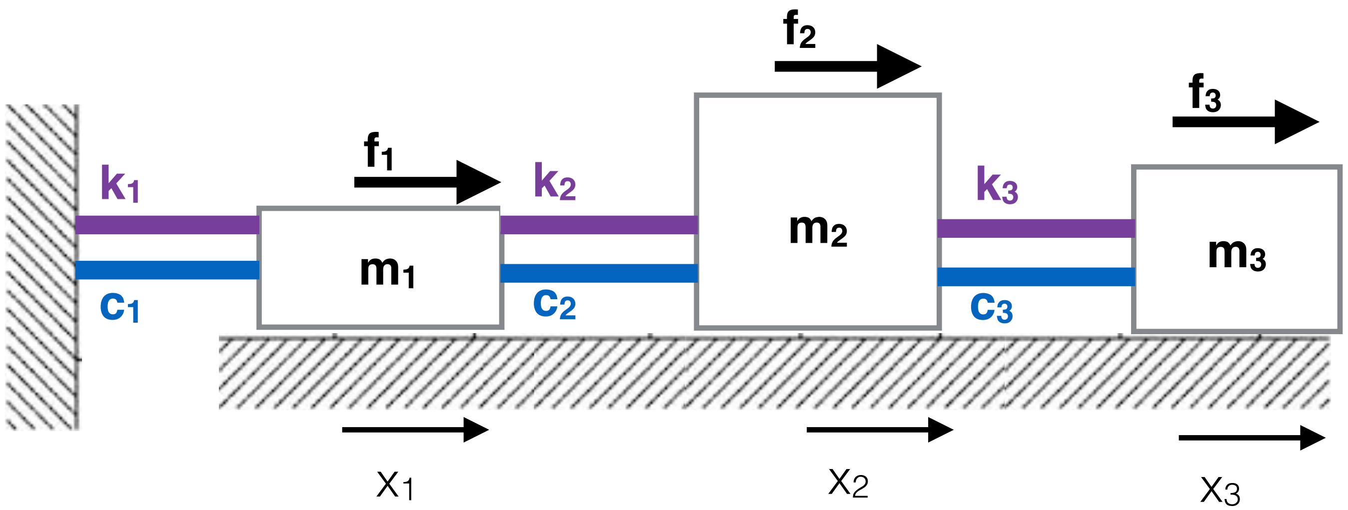


Luigi BREGANT
bregant@units.it

Soluzione particolare per un sistema MDOF, modale - con Matlab

Luigi BREGANT
bregant@units.it

Consideriamo un sistema a 3DOF



scriviamo le equazioni del moto …

(diagramma corpo libero / equilibrio forze)

$$m_1\ddot{x}_1 + c_1\dot{x}_1 + c_2\left(\dot{x}_1 - \dot{x}_2\right) + k_1 x_1 + k_2\left(x_1 - x_2\right) = f_1$$

$$m_2\ddot{x}_2 + c_2\left(\dot{x}_2 - \dot{x}_3\right) + c_3\left(\dot{x}_2 - \dot{x}_3\right) + k_2\left(x_2 - x_1\right) + k_3\left(x_2 - x_3\right) = f_2$$

$$m_3\ddot{x}_3 + c_3\left(\dot{x}_3 - \dot{x}_2\right) + k_3\left(x_3 - x_2\right) = f_3$$

e per controllo riportiamole in forma matriciale..

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 & 0 \\ -c_2 & c_2 + c_3 & -c_3 \\ 0 & -c_3 & c_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{Bmatrix}$$

Iniziano lo studio del sistema ipotizzando che
lo smorzamento sia nullo..
i parametri del sistema siano
m_1=5kg, m_2=15kg, m_3=10kg
k_1=10000N/m, k_2=20000N/m, k_3=30000N/m
in queste condizioni

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{Bmatrix} + 10^4 \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 5 & -3 \\ 0 & -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{Bmatrix}$$

(k è simmetrica, non singolare, invertibile!)

Luigi BREGANT
bregant@units.it

Usiamo Matlab per calcolare auto_valori e auto_vettori

```
% definisco le costanti del sistema
m1=5;
m2=15;
m3=10;
m=[m1 0 0; 0 m2 0; 0 0 m3];

k1=10000;
k2=20000;
k3=30000;
k=[k1+k2 -k2 0; -k2 k2+k3 -k3; 0 -k3 k3];

%calcolo autovalori e autovettori
[eig_va,eig_ve]=eig(k,m);

% calcolo valore delle frequenze naturali in Hz
eig_va=diag((1/(2*pi))*sqrt(eig_va));
```

eig_ve

-0.1284	0.2567	-0.3429
-0.1851	0.1039	0.1471
-0.2009	-0.2256	-0.0936

eig_va [rad/s} 1e+3*

0.2367	0	0
0	4.3815	0
0	0	7.7152

eig_va [Hz]

2.4484
10.5349
13.9796

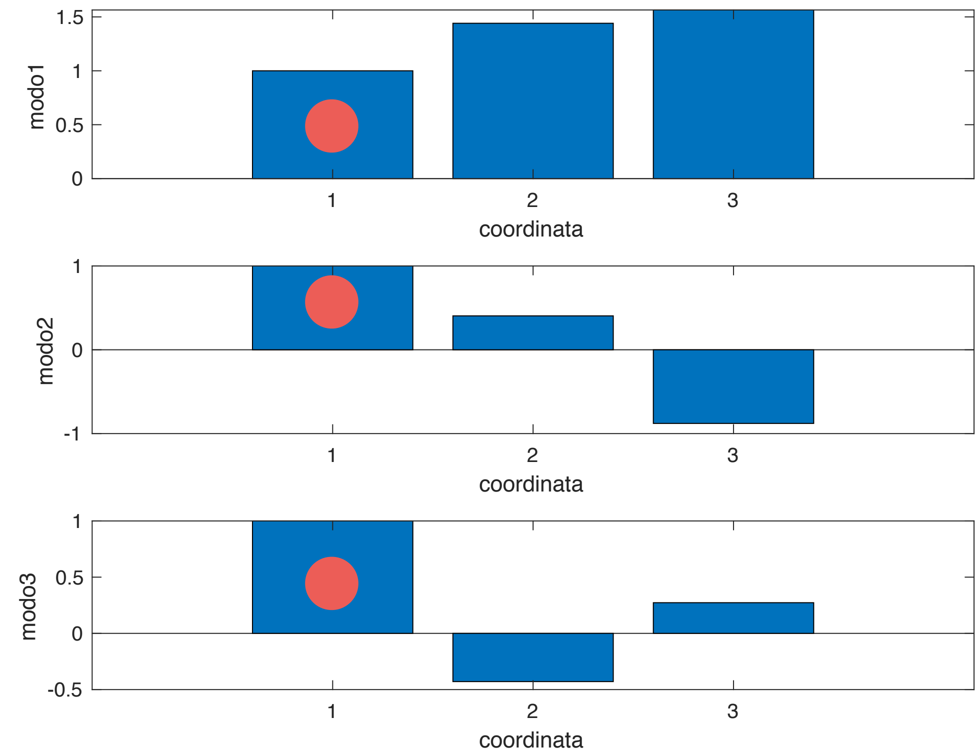
eig_va [Hz]

2.45
10.53
13.98

ATTENTI ALLE CIFRE DECIMALI
e già sono troppe!

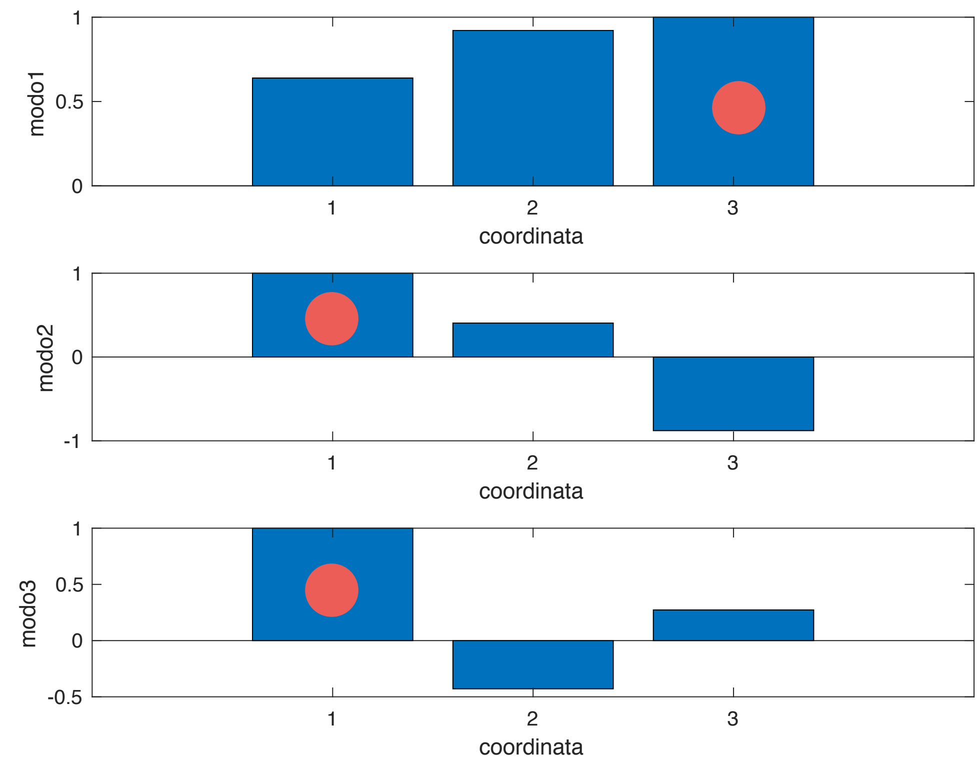
% scalo autovettori in modo che il primo elemento sia unitario

```
eig_ve1=eig_ve(1,:);
for i=1:size(eig_ve,2)
    eig_ve_s1(:,i)=eig_ve(:,i)/eig_ve1(i);
end
subplot(3,1,1)
bar(eig_ve_s1(:,1)), xlabel('coordinata'), ylabel('modo1')
subplot(3,1,2)
bar(eig_ve_s1(:,2)), xlabel('coordinata'), ylabel('modo2')
subplot(3,1,3)
bar(eig_ve_s1(:,3)), xlabel('coordinata'), ylabel('modo3')
```



% scalo autovettori in modo che il massimo sia unitario

```
eig_ve1=max((abs(eig_ve(:,:))));
for i=1:size(eig_ve,2)
    eig_ve_m1(:,i)=eig_ve(:,i)/eig_ve1(i);
    if min(eig_ve_m1(:,i))==-1
        eig_ve_m1(:,i)=-1*eig_ve_m1(:,i);
    else
    end
end
subplot(3,1,1)
bar(eig_ve_m1(:,1)), xlabel('coordinata'), ylabel('modo1')
subplot(3,1,2)
bar(eig_ve_m1(:,2)), xlabel('coordinata'), ylabel('modo2')
subplot(3,1,3)
bar(eig_ve_m1(:,3)), xlabel('coordinata'), ylabel('modo3')
```



Entrambi queste matrici modali disaccoppiano le equazioni del moto :

$$[\phi]^t[m][\phi]=[M_{\mathrm{mod}}] \qquad [\phi]^t[k][\phi]=[K_{\mathrm{mod}}]$$

```
>> eig_ve_s1'*m*eig_ve_s1

ans =

  60.6083   -0.0000    0.0000
  -0.0000   15.1775    0.0000
   0.0000   -0.0000    8.5024

>> eig_ve_s1'*k*eig_ve_s1

ans =

   1.0e+04 *

   1.4344    0.0000    0.0000
   0.0000    6.6499   -0.0000
  -0.0000   -0.0000    6.5598

>>
```

le matrici risultanti sono diagonali sia in m che in k

```
>> eig_ve_m1'*m*eig_ve_m1

ans =

  24.7702   -0.0000    0.0000
  -0.0000   15.1775    0.0000
   0.0000   -0.0000    8.5024

>> eig_ve_m1'*k*eig_ve_m1

ans =

   1.0e+04 *

   0.5862    0.0000    0.0000
   0.0000    6.6499   -0.0000
  -0.0000   -0.0000    6.5598

>>
```

..come fare per avere la matrice di massa modale unitaria?

in realtà la funzione “eig” di Matlab fornisce già gli autovalori scalati rispetto la matrice di massa!

```
>> eig_ve'*m*eig_ve
```

$$\left[\phi\right]^t\left[m\right]\left[\phi\right]=\left[M_{\mathrm{mod}}\right]=\left[I\right]$$

```
ans =

    1.0000    0.0000   -0.0000
    0.0000    1.0000    0.0000
   -0.0000    0.0000    1.0000

>> eig_ve'*k*eig_ve
```

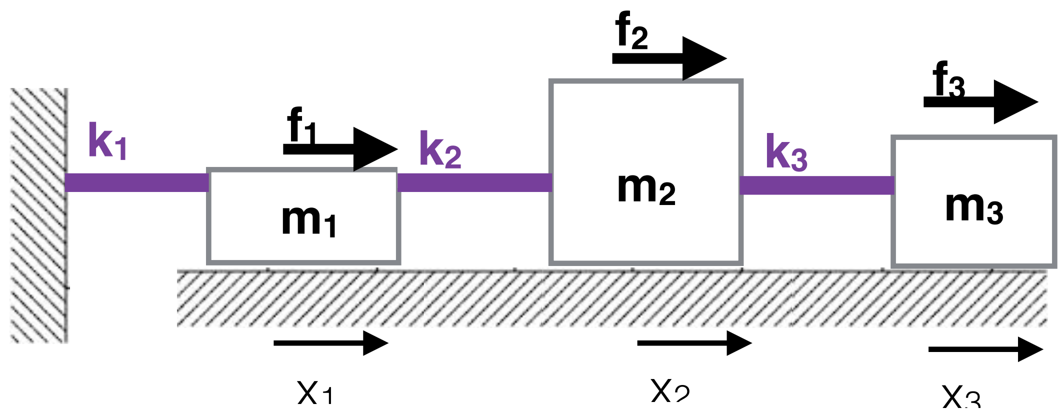
$$\left[\phi\right]^t\left[k\right]\left[\phi\right]=\left[K_{\mathrm{mod}}\right]=\left[\omega^2\right]$$

```
ans =

   1.0e+03 *

    0.2367   -0.0000   -0.0000
   -0.0000    4.3815    0.0000
    0.0000    0.0000    7.7152

>>
```

..quindi applichiamo
la trasformazione modale: $\left\{x\right\}=\left[\phi\right]\left\{q\right\}$

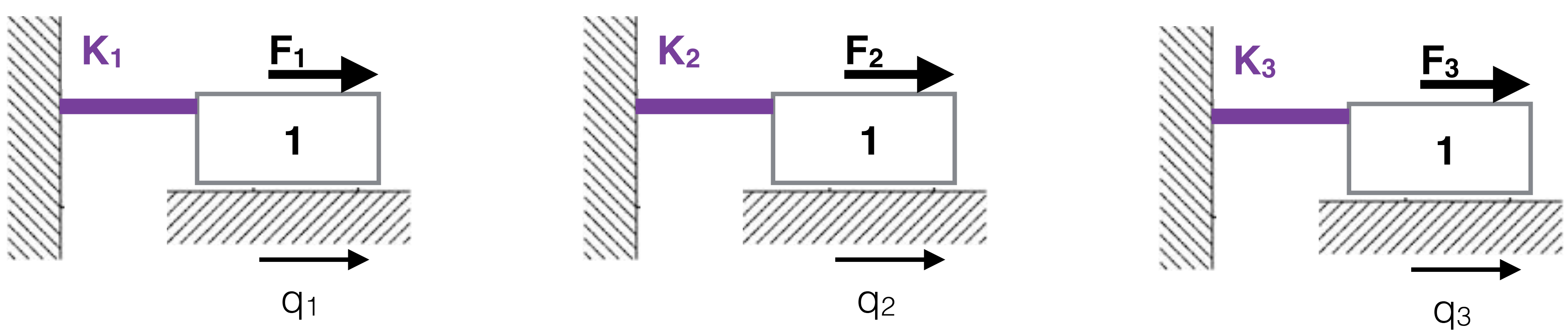
Le equazioni del moto si trasformano di conseguenza:

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{Bmatrix} + 10^4 \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 5 & -3 \\ 0 & -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{Bmatrix}$$



ed il sistema diventa la CL di tre sistemi SDOF

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \ddot{q}_3 \end{Bmatrix} + 10^3 \begin{bmatrix} 0.2367 & 0 & 0 \\ 0 & 4.3815 & 0 \\ 0 & 0 & 7.7152 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix} = \left[\phi\right]^t \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix}$$



A questo punto è possibile calcolare la generica risposta del sistema MDOF come CL delle risposte dei singoli sistemi SDOF
(abbiamo visto come farlo
conoscendo la risposta in forma chiusa,
con l'integrazione numerica dell'equazione differenziale
con l'integrazione numerica tramite simulink)

$$\{x\}=[\phi]\{q\}$$

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -.1284 & .2567 & -.3429 \\ -.1851 & .1039 & .1471 \\ -.2009 & -.2256 & -.0936 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix}$$

Ricordatevi di portare nello spazio modale le forzanti e le condizioni al contorno!

Supponiamo di avere una forzante f_1 armonica con frequenza Ω "lontana" o "vicina" alla seconda risonanza (10.53Hz) del sistema.

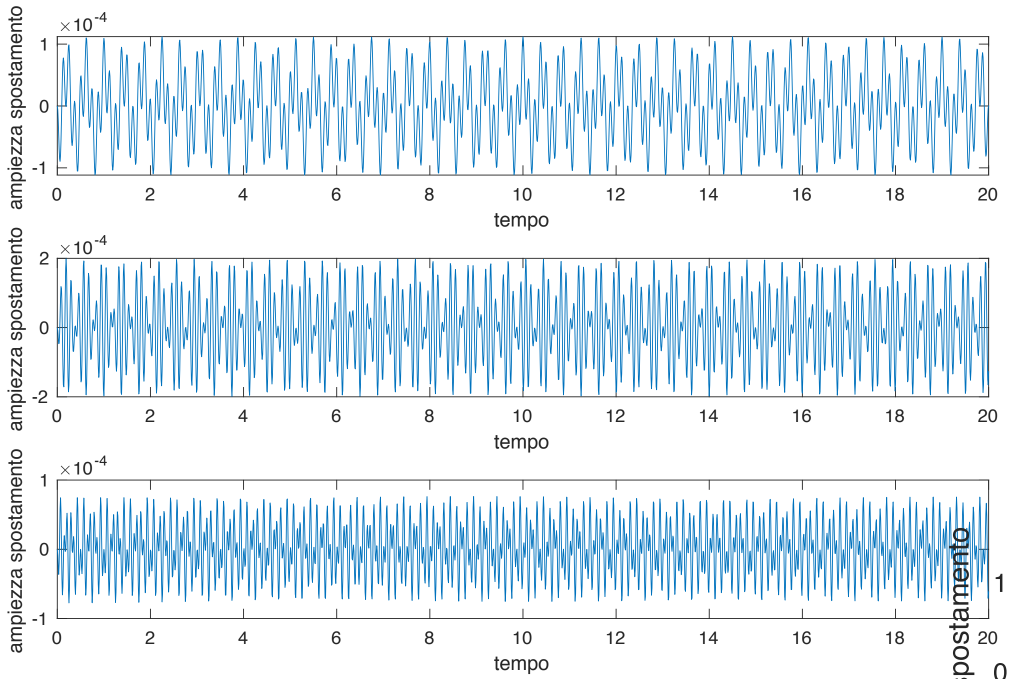
$$\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{Bmatrix} + 10^4 \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 5 & -3 \\ 0 & -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f\cos\Omega t \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \ddot{q}_3 \end{Bmatrix} + 10^3 \begin{bmatrix} 0.2367 & 0 & 0 \\ 0 & 4.3815 & 0 \\ 0 & 0 & 7.7152 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -.1284\cos\Omega t \\ -.1851\cos\Omega t \\ -.2009\cos\Omega t \end{Bmatrix}$$

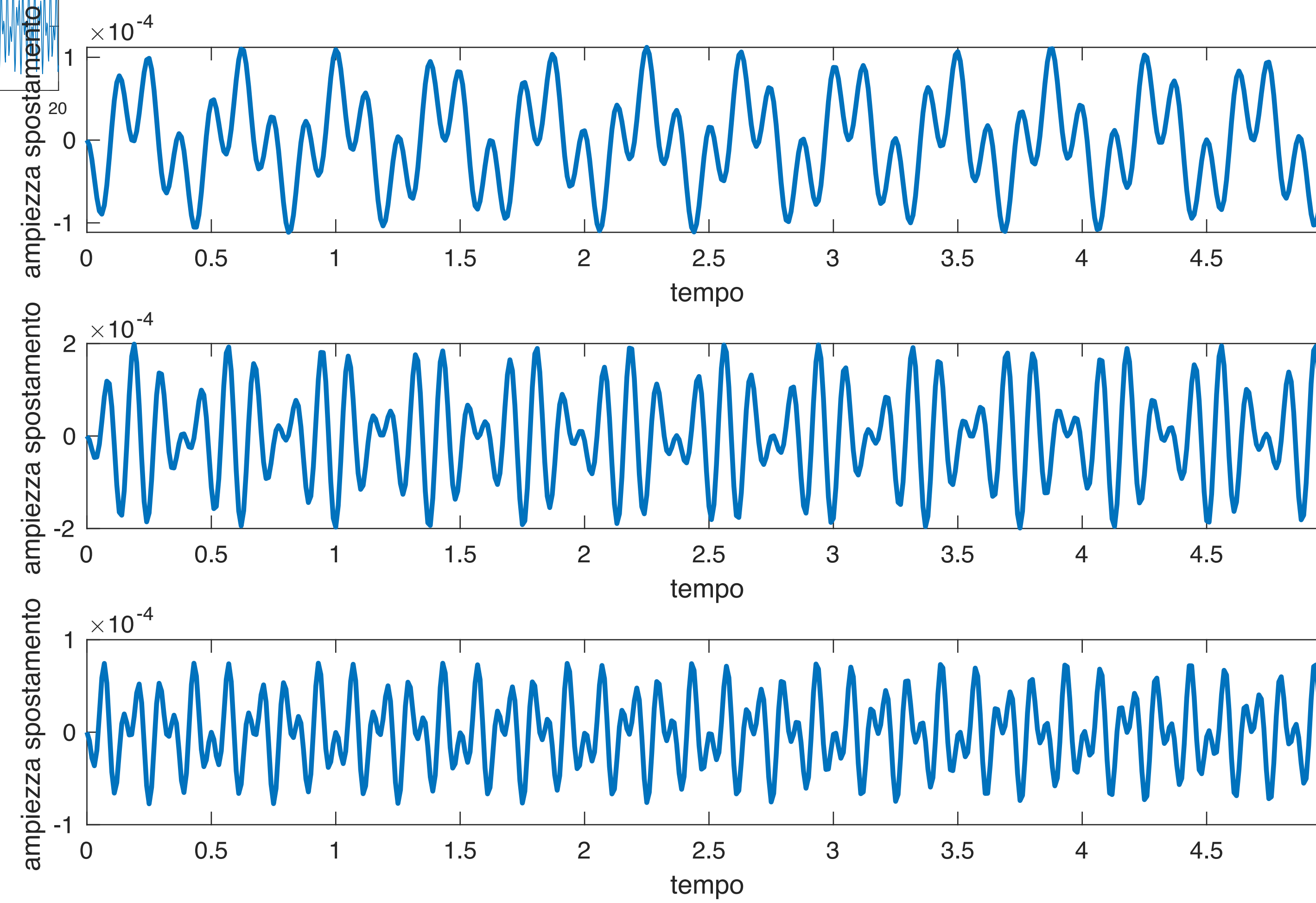
proviamo a integrare le 3 equazioni (disaccoppiate) con ode45 a 8Hz 10.53Hz e 50Hz.. sempre sui soliti 20s
e calcolare al risposta del sistema a quelle frequenze

```
function dxdt=mdvODEexample4(t,x)

% definisco le costanti del sistema
M1=1;
M2=1;
M3=1;
K1=10^3*0.2367;
K2=10^3*4.3815;
K3=10^3*7.7152;

% definisco le variabili del sistema
y=x(1); ydot=x(2);
w=x(3); wdot=x(4);
z=x(5); zdot=x(6);

% definisco le forzanti del sistema
Omega=2*pi*8;
F1=-.1284*cos(Omega*t);
F2=-.1851*cos(Omega*t);
F3=-.2009*cos(Omega*t);

% scrivo le equazioni del moto
dxdt=zeros(size(x));
dxdt(1)=ydot;
dxdt(2)=(1/M1)*(F1-K1*y);
dxdt(3)=wdot;
dxdt(4)=(1/M2)*(F2-K2*w);
dxdt(5)=zdot;
dxdt(6)=(1/M3)*(F3-K3*z);     % nb le equazioni non sono accoppiate!!
```

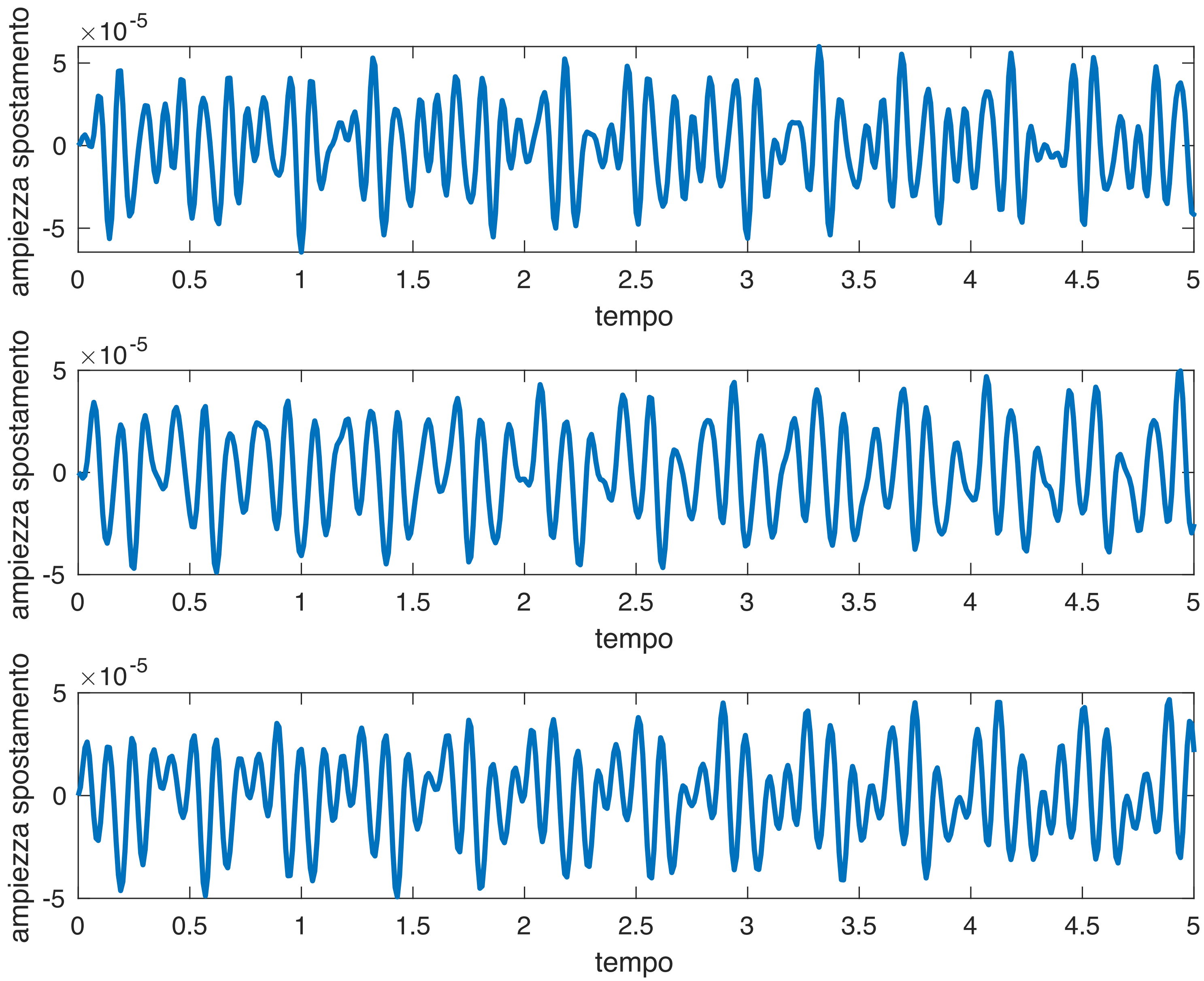
Le risposte per i gradi di libertà q_1, q_2, q_3 (coord.modali), sui 20s, con le forzanti (8Hz) e CI applicate (spost e vel. nulle)



zoomando i primi 5s..



Le risposte per i gradi di libertà x_1, x_2, x_3 (coord.fisiche), zoom sui 5s, con le forzanti (8Hz) e CI applicate (spost e vel. nulle)



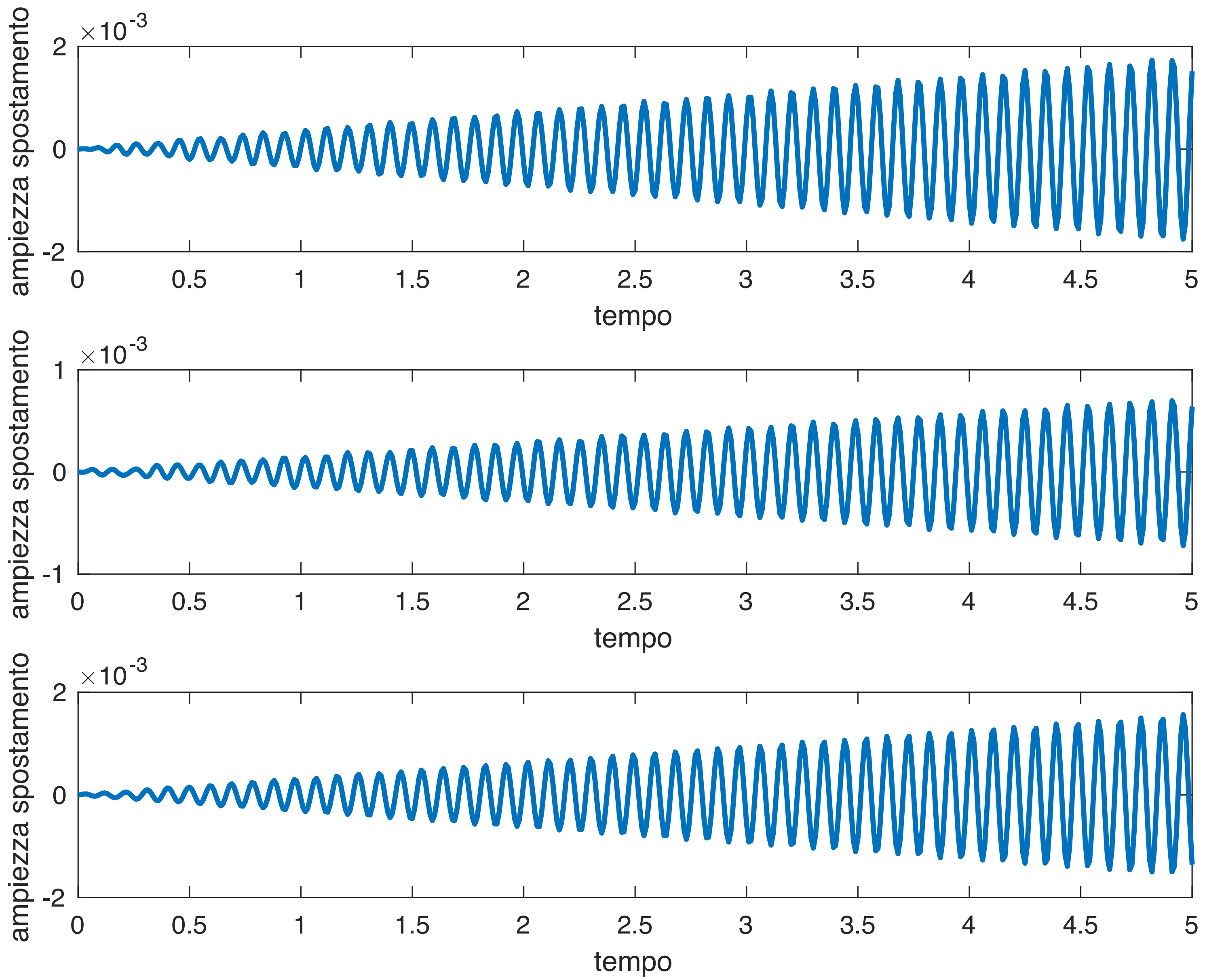

```
x1=eig_ve(1,1).*x(:,1)+eig_ve(1,2).*x(:,3)+eig_ve(1,3).*x(:,5);
x2=eig_ve(2,1).*x(:,1)+eig_ve(2,2).*x(:,3)+eig_ve(2,3).*x(:,5);
x3=eig_ve(3,1).*x(:,1)+eig_ve(3,2).*x(:,3)+eig_ve(3,3).*x(:,5);
```

Ricordiamo la trasformata modale:

$$\{x\}=[\phi]\{q\}$$

..come facciamo essere sicuri che è giusto? solo con la confidenza dei passi precedenti!

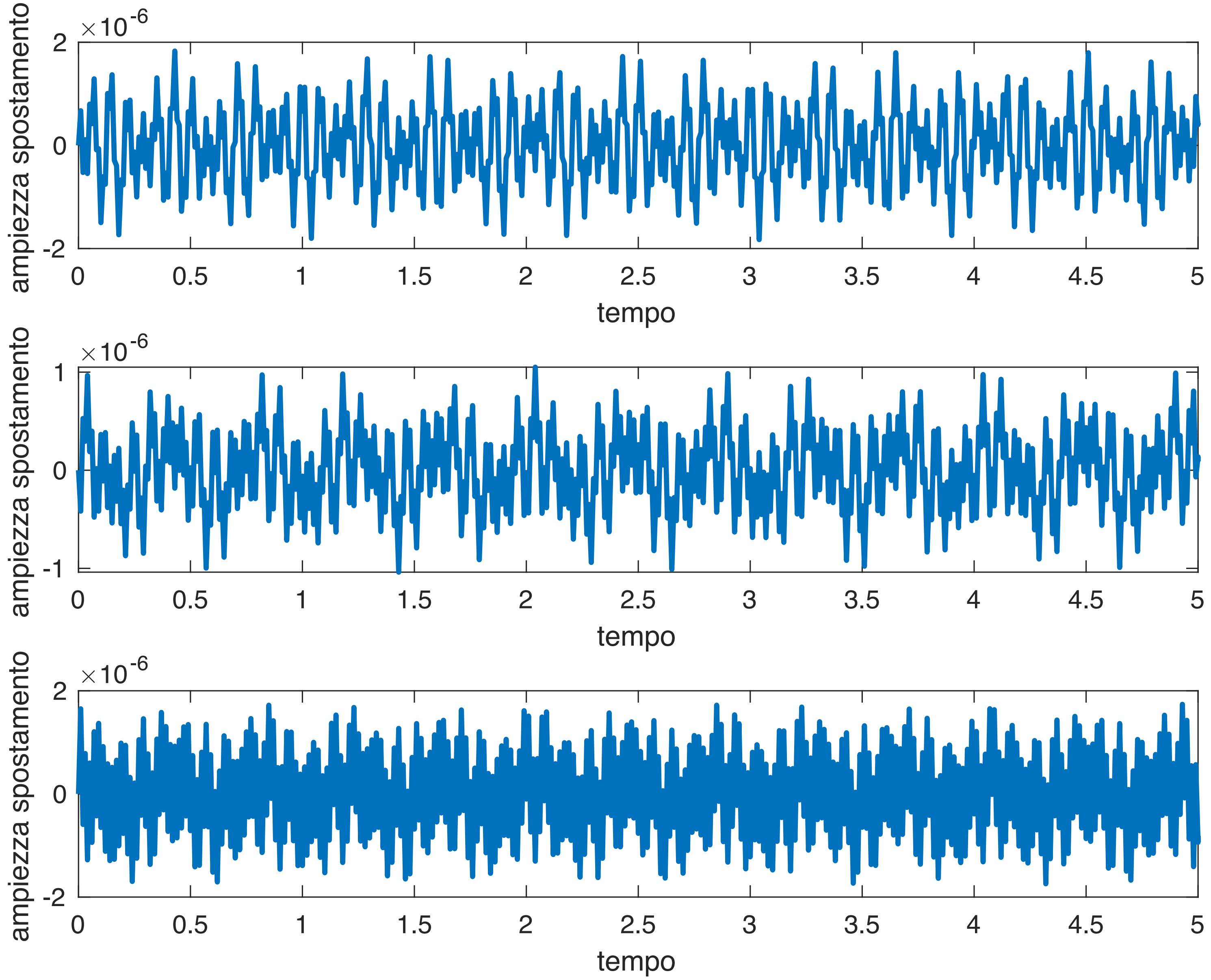
Le risposte per i gradi di libertà x_1, x_2, x_3 (coord.fisiche), zoom sui 5s, con le forzanti (10.53Hz) e CI applicate (spost e vel. nulle)



..siamo in condizioni di risonanza!

Senza smorzamento la risposta aumenta continuamente

Le risposte per i gradi di libertà x_1, x_2, x_3 (coord.fisiche), zoom sui 5s, con le forzanti (40Hz) e CI applicate (spost e vel. nulle)



..siamo ben altre le risonanze!

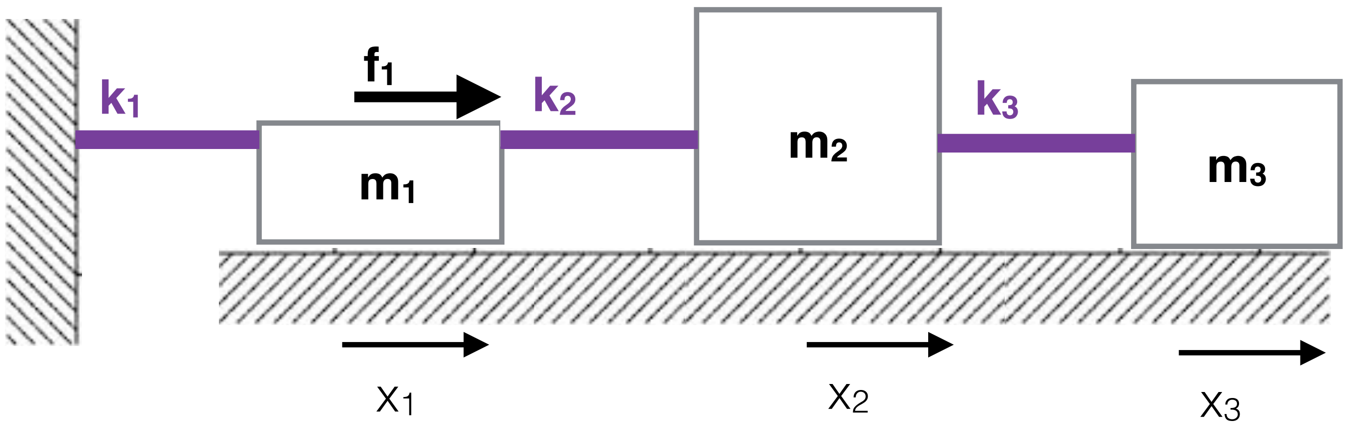
L'ampiezza della risposta si riduce significativamente!

(vedi ampiezze di spostamento nelle due immagini precedenti)

Calcolo delle FRF un sistema MDOF forzato - con Matlab

Luigi BREGANT
bregant@units.it

Consideriamo un sistema a 3DOF



$$\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{Bmatrix} + 10^4 \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 5 & -3 \\ 0 & -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f\cos\Omega t \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Con la solita trasformazione modale disaccoppiamo le equazioni:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \ddot{q}_3 \end{Bmatrix} + 10^3 \begin{bmatrix} 0.2367 & 0 & 0 \\ 0 & 4.3815 & 0 \\ 0 & 0 & 7.7152 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -.1284\cos\Omega t \\ -.1851\cos\Omega t \\ -.2009\cos\Omega t \end{Bmatrix}$$

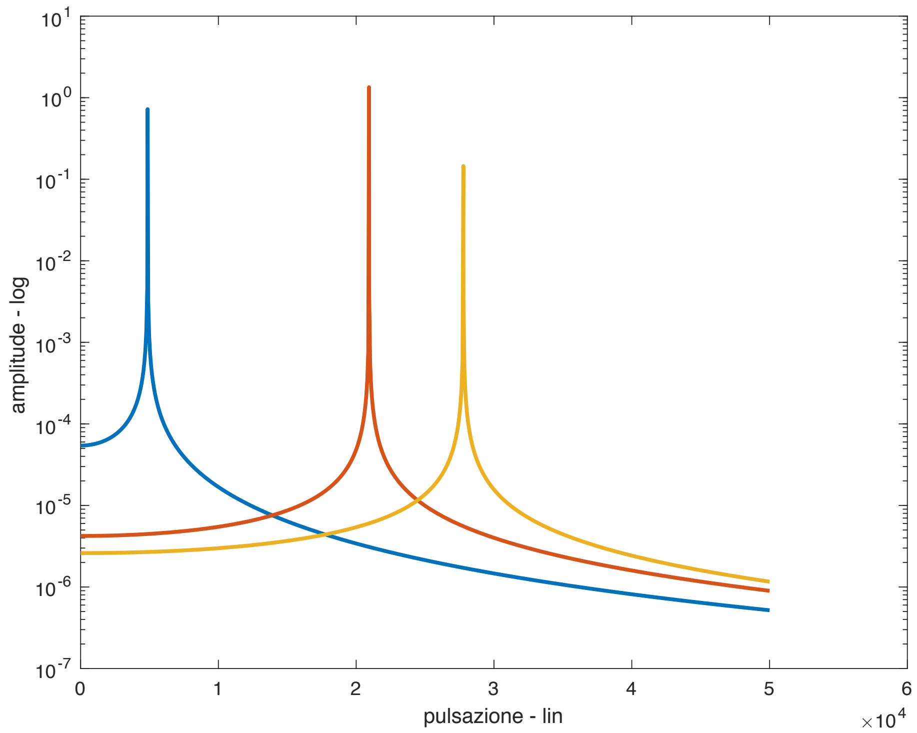
$$\begin{cases} \ddot{q}_1 + 10^3 * 0.2367 q_1 = -.1284\cos\Omega t \\ \ddot{q}_2 + 10^3 * 4.3815 q_2 = -.1851\cos\Omega t \\ \ddot{q}_3 + 10^3 * 7.7152 q_3 = -.2009\cos\Omega t \end{cases}$$

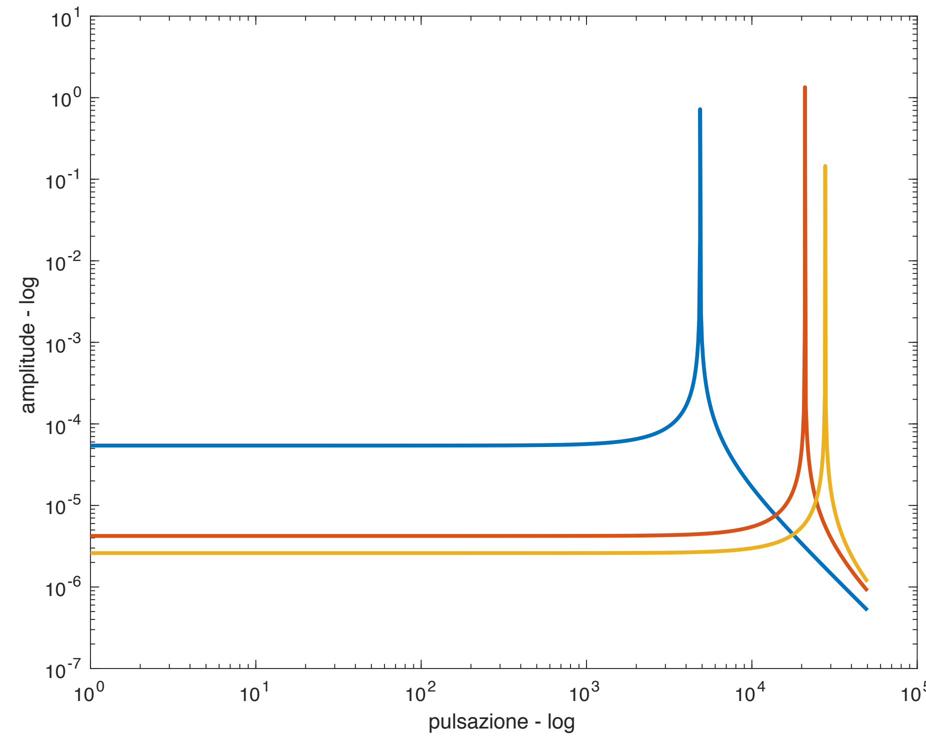
e risolviamo ciascuna equazione separatamente $q_i = Q_i \cos\Omega t$

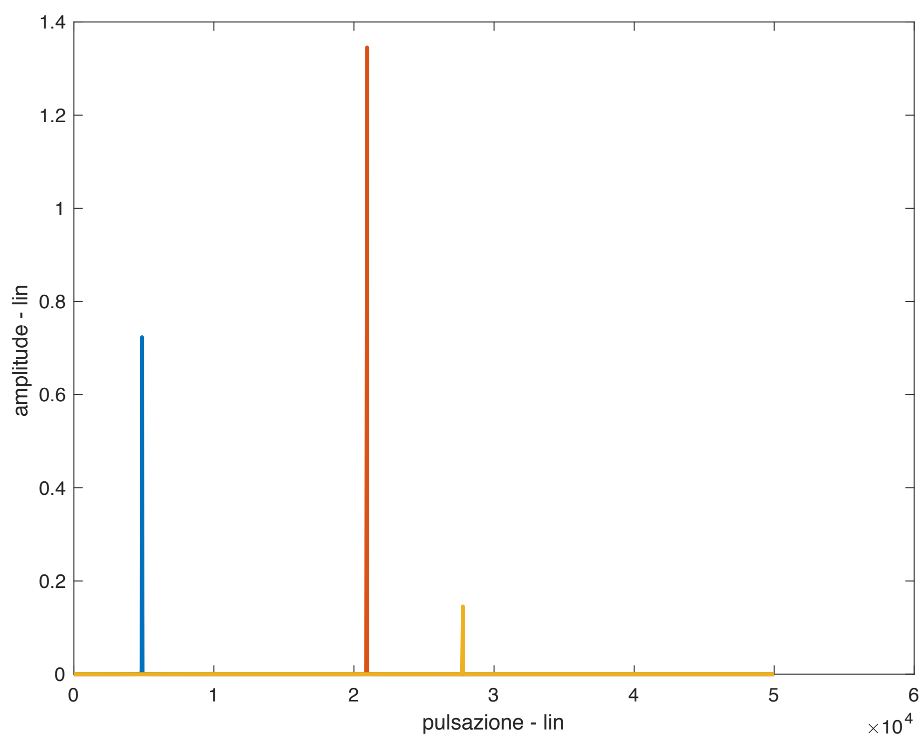
$$\begin{cases} \left(10^3 * 0.2367 - \Omega^2\right) Q_1 = -.1284 \\ \left(10^3 * 4.3815 - \Omega^2\right) Q_2 = -.1851 \\ \left(10^3 * 7.7152 - \Omega^2\right) Q_3 = -.2009 \end{cases}$$

$$\begin{cases} Q_1 = \dfrac{-.1284}{10^3 * 0.2367 - \Omega^2} \\ Q_2 = \dfrac{-.1851}{10^3 * 4.3815 - \Omega^2} \\ Q_3 = \dfrac{-.2009}{10^3 * 7.7152 - \Omega^2} \end{cases}$$

```
% definisco i coefficienti
A=[-.1284 -.1851 -.2009];
B=10e3*[.2367 4.3815 7.7152]

%definisco il range di frequenza (nb sono radianti!)
OMEGA=0:.01:500;

%calcolo le risposte dei singolo gradi di libertà modali
for i=1:size(A,2)
    Q(:,i)=A(i)./(B(i)-OMEGA.^2);
end
```





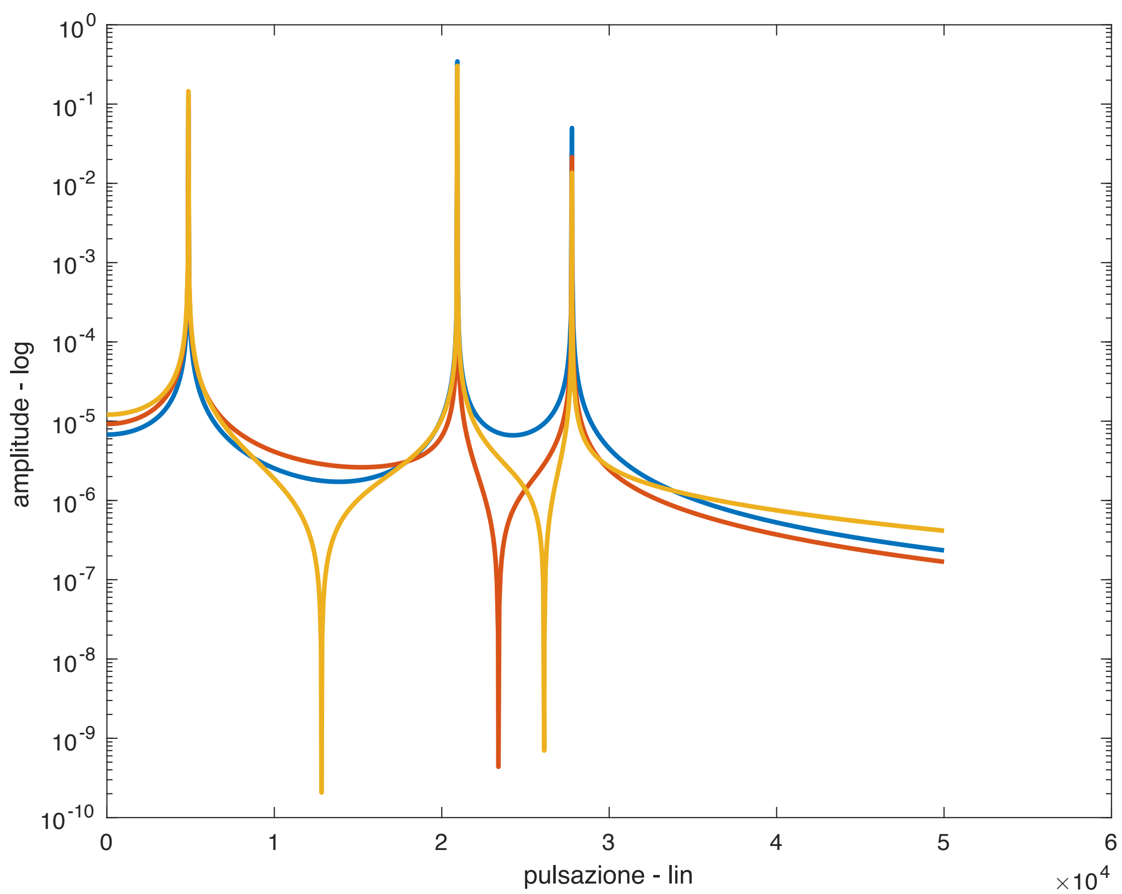


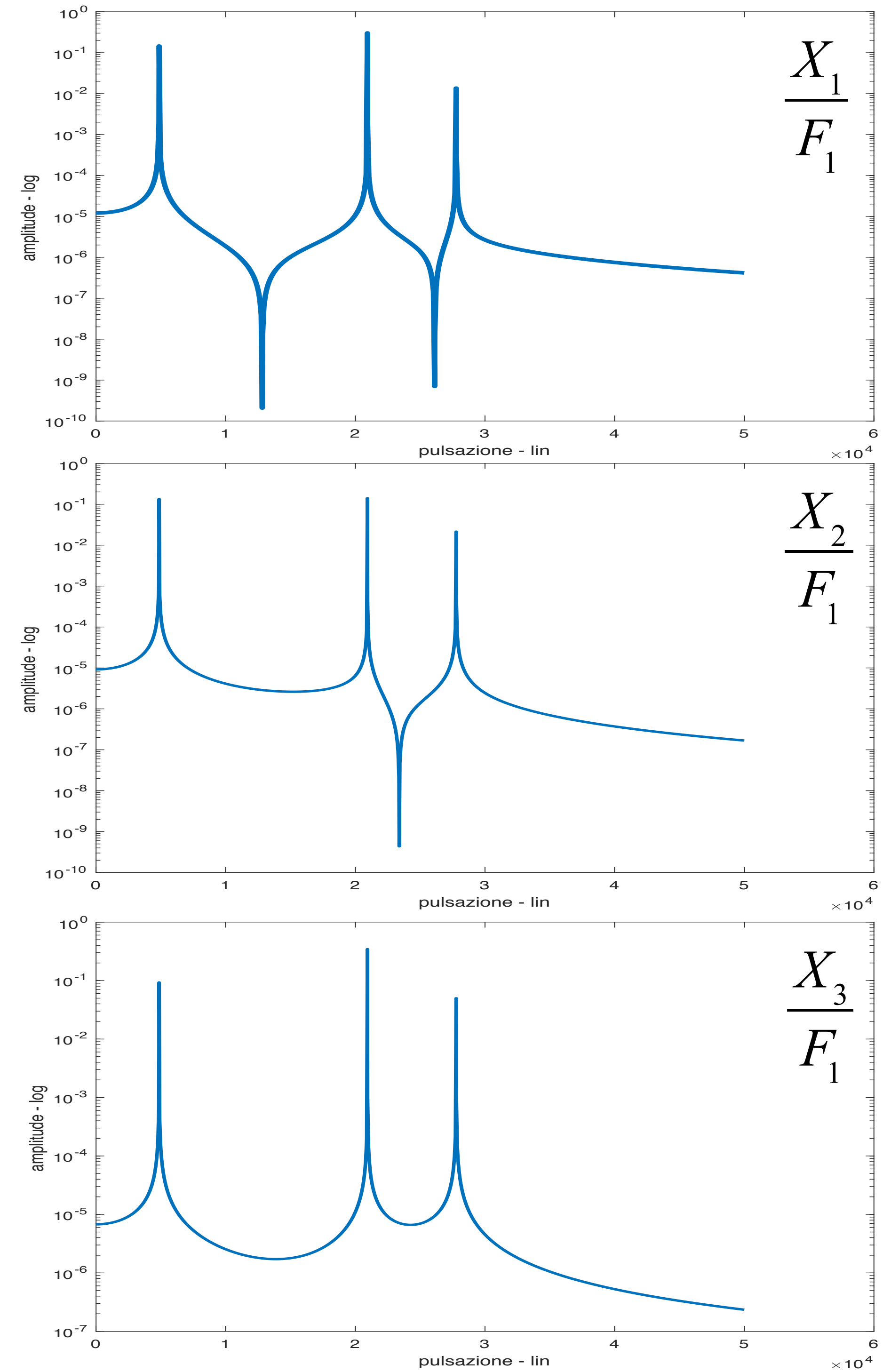
queste sono alcune
delle possibili rappresentazioni
grafiche delle funzioni di risposta
Qi

NB sono funzioni complesse
ampiezza - fase
parte reale - parte immaginaria

Bisogna ora combinarle per ottenere le risposte nelle coordinate fisiche x utilizzando la solita trasformazione modale

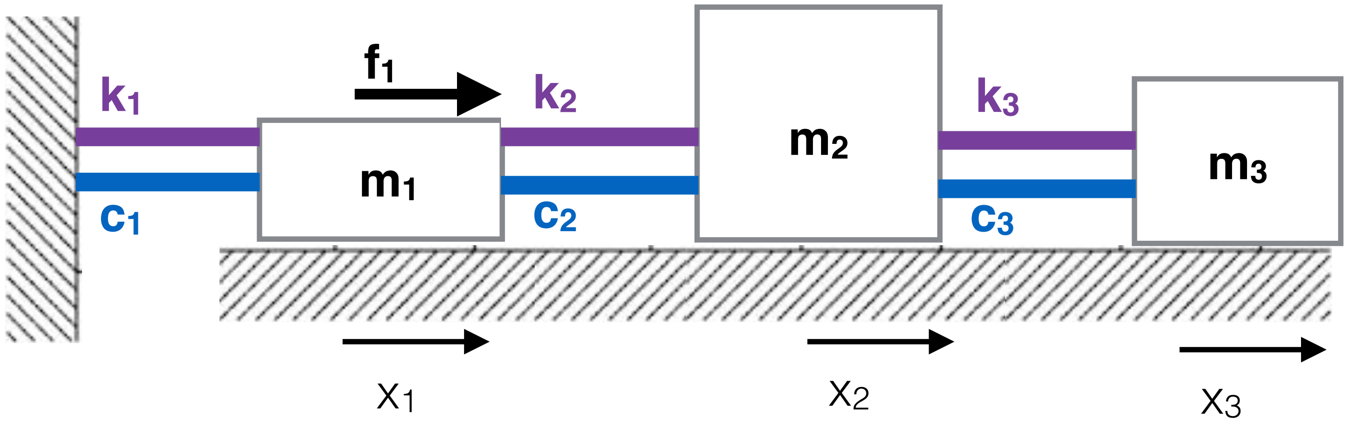
$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -.1284 & .2567 & -.3429 \\ -.1851 & .1039 & .1471 \\ -.2009 & -.2256 & -.0936 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{Bmatrix}$$





NB c'è una sola forzante!!

Cosa cambia se…

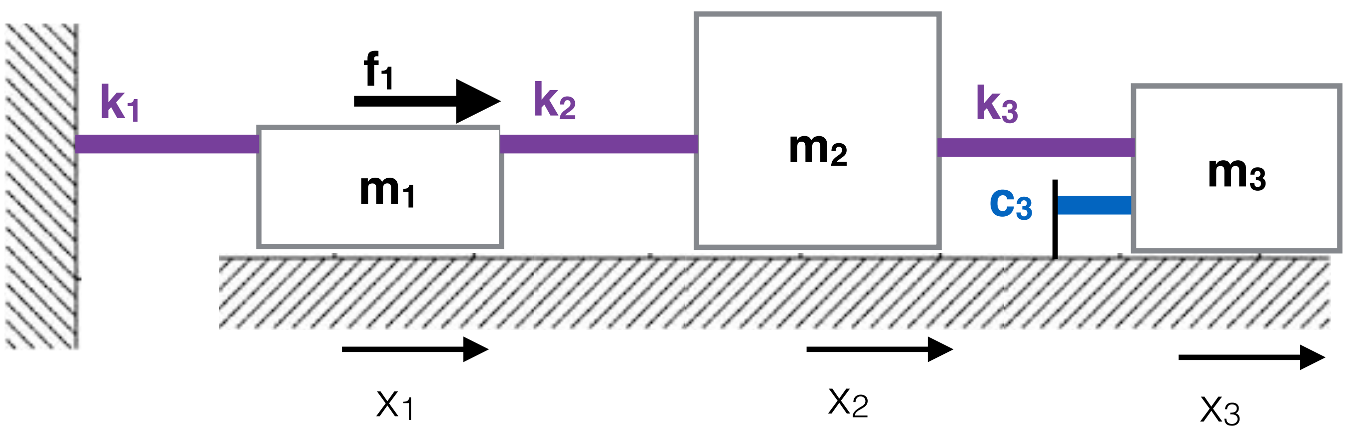


Smorzamento Proporzionale

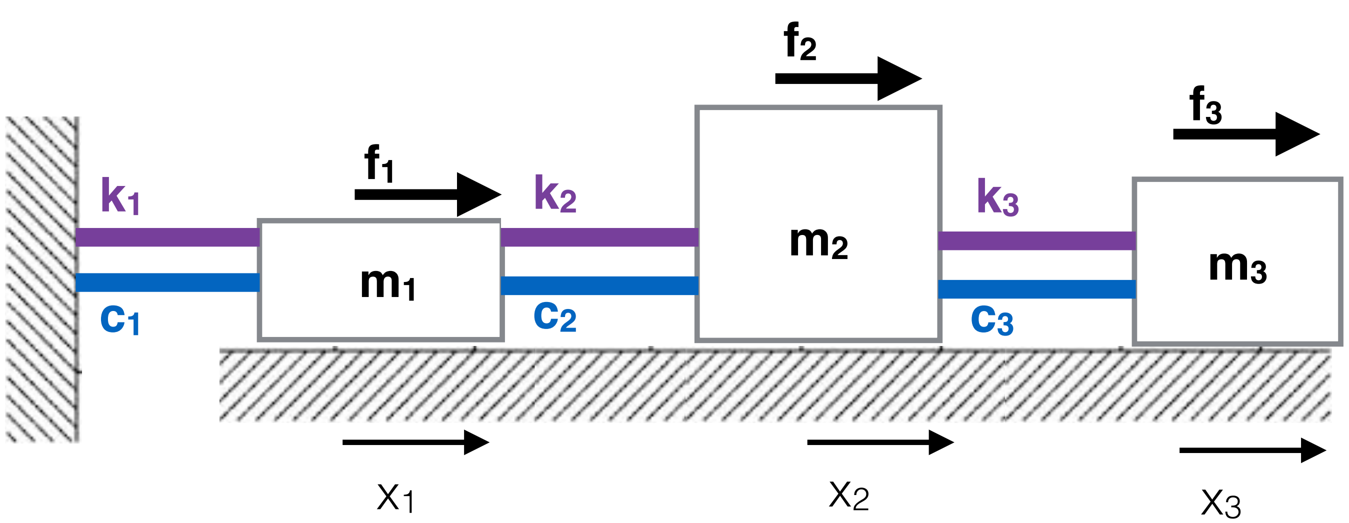
$$[c]=\frac{1}{3}[k]$$

$$[c]=10[m]+[k]$$

$$[c]=[m]+10[k]$$



Smorzamento Non Proporzionale



Più forzanti?

NB si può anche invertire la matrice di rigidezza dinamica Z(ω)

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 3e4-5\omega^2 & -2e4 & 0 \\ -2e4 & 5e4-15\omega^2 & -3e4 \\ 0 & -3e4 & 3e4-10\omega^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} F \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} \left(3e4-5\omega^2\right) * \det \begin{bmatrix} 5e4-15\omega^2 & -3e4 \\ -3e4 & 3e4-10\omega^2 \end{bmatrix} & 2 * \det \begin{bmatrix} -2e4 & -3e4 \\ 0 & 3e4-10\omega^2 \end{bmatrix} & 0 \\ 2 * \det \begin{bmatrix} -2e4 & 0 \\ -3e4 & 3e4-10\omega^2 \end{bmatrix} & \left(5e4-15\omega^2\right) * \det \begin{bmatrix} 3e4-5\omega^2 & 0 \\ 0 & 3e4-10\omega^2 \end{bmatrix} & 3 * \det \begin{bmatrix} 3e4-5\omega^2 & -2e4 \\ 0 & -3e4 \end{bmatrix} \\ 0 & 3 * \det \begin{bmatrix} 3e4-5\omega^2 & 0 \\ -2e4 & -3e4 \end{bmatrix} & 3e4-10\omega^2 * \det \begin{bmatrix} 3e4-5\omega^2 & -2e4 \\ -2e4 & 5e4-15\omega^2 \end{bmatrix} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} F \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

e calcolare le risposte al variare di ω.

Ad esempio X_1/F:

$$\frac{X_1}{F} = \frac{1}{\Delta}\left(3e4-5\omega^2\right) * \det \begin{bmatrix} 5e4-15\omega^2 & -3e4 \\ -3e4 & 3e4-10\omega^2 \end{bmatrix}$$

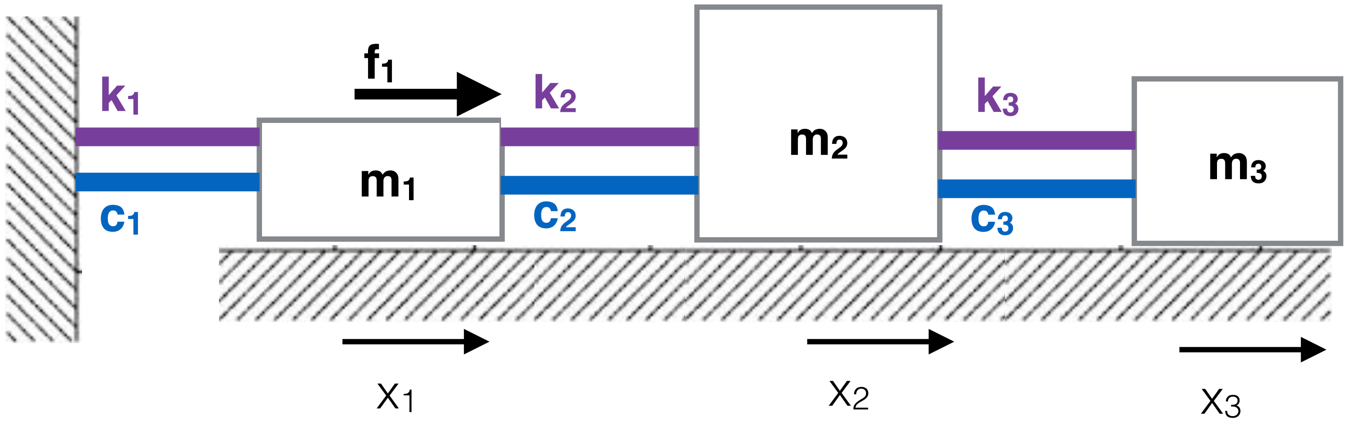
Numeratore polinomio ordine 6
Denominatore polinomio ordine 6

Calcolo delle risposta un sistema MDOF forzato (StatoSpazio)- con Matlab

Luigi BREGANT
bregant@units.it

Partiamo dal solito sistema ma immaginiamo di avere anche lo smorzamento proporzionale nella forma:

$$[c]=\frac{1}{100}[k]$$



Le equazioni del moto in questo caso diventano:

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{Bmatrix}+10^2\begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 5 & -3 \\ 0 & -3 & 3 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{Bmatrix}+10^4\begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 5 & -3 \\ 0 & -3 & 3 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} f_1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

NB l'esponente della matrice di smorzamento 10^2 non 10^4 come nel caso della matrice di rigidezza!

Riscriviamo le equazioni del sistema con al rappresentazione Stato Spazio ricordando di aggiungere l'identità: $\{\dot{x}\}=\{\dot{x}\}$

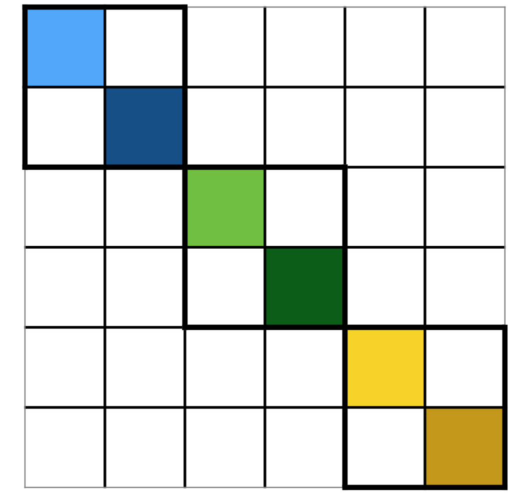
$$\frac{d}{dt}\{x\}=[A]\{x\}+[B]\{f\}$$
$$\{y\}=[C]\{x\}+[D]\{f\}$$

$$\underbrace{\frac{d}{dt}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{Bmatrix}}_{6\text{x}1}=\underbrace{\begin{bmatrix} [0] & [I] \\ -[m]^{-1}[k] & -[m]^{-1}[c] \end{bmatrix}}_{6\text{x}6}\underbrace{\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{Bmatrix}}_{6\text{x}1}+\underbrace{\begin{bmatrix} [0] \\ [m]^{-1}[I] \end{bmatrix}}_{6\text{x}3}\underbrace{\begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{Bmatrix}}_{3\text{x}1}$$

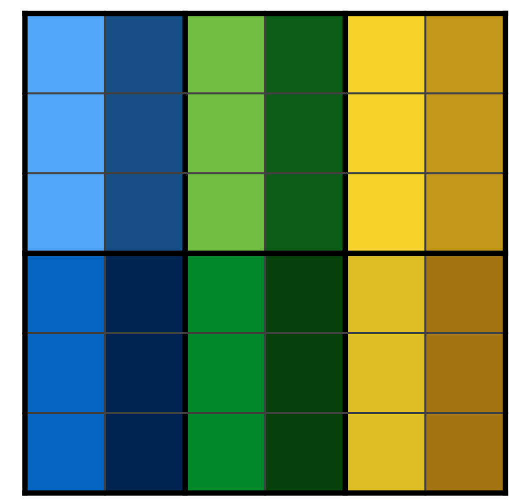
Gli auto_valori e gli auto_vettori del sistema sono quelli della matrice A. In matlab basterà usare il comando eig(A)

```
% definisco le costanti del sistema
m1=5;
m2=15;
m3=10;
m=[m1 0 0; 0 m2 0; 0 0 m3];

k1=10000;
k2=20000;
k3=30000;
k=[k1+k2 -k2 0; -k2 k2+k3 -k3; 0 -k3 k3];

c=k/100;

% costruisco la matrice A
A=[zeros(3,3) eye(3,3);
   -inv(m)*k -inv(m)*c]

%calcolo auto_valori e auto vettori
[eig_va,eig_ve]=eig(A)
```

auto_valori



auto_vettori



> Nella matrice degli auto_valori avremmo sei elementi sulla diagonale principale, a due a due complessi coniugati

> Nella matrice degli auto_vettori avremmo 6 colonne di 6 elementi colonne a due a due complesse coniugate, i primi 3 elementi saranno spostamenti, i secondi 3 elementi spostamenti moltiplicati per auto_valori corrispondenti

diag(eig_va)
-38.5761+78.9120i
-38.5761-78.9120i
-21.9073+62.4622i
-21.9073-62.4622i
-1.1833+15.3382i
-1.1833-15.3382i

Gli auto_vettori sono complessi per la presenza di smorzamento!

NB ricordatevi le cifre significative!!!

..senza smorzamento (puramente immaginari)

diag(eig_va)_1
0.0000 +87.8363i
0.0000 -87.8363i
0.0000 +66.1925i
0.0000 -66.1925i
0.0000 +15.3837i
0.0000 -15.3837i

..con smorzamento elevato

$$\left[c\right]=\frac{1}{10}\left[k\right]$$

diag(eig_va)_2
1.0e+02
-7.6139 + 0.0000i
-4.2791 + 0.0000i
-0.1183 + 0.0983i
-0.1183 -0.0983i
-0.1024 + 0.0000i
-0.1013 + 0.0000i

Perché non sono complessi e coniugati?? ..ma solo reali??

Rappresentazioni per un sistema MDOF, (ss,tf,xpk,..) - con Matlab

Luigi BREGANT
bregant@units.it

Abbiamo visto diverse rappresentazioni per i sistemi dinamici:

Funzione di Trasferimento

Funzione di Risposta in Frequenza

Stato Spazio

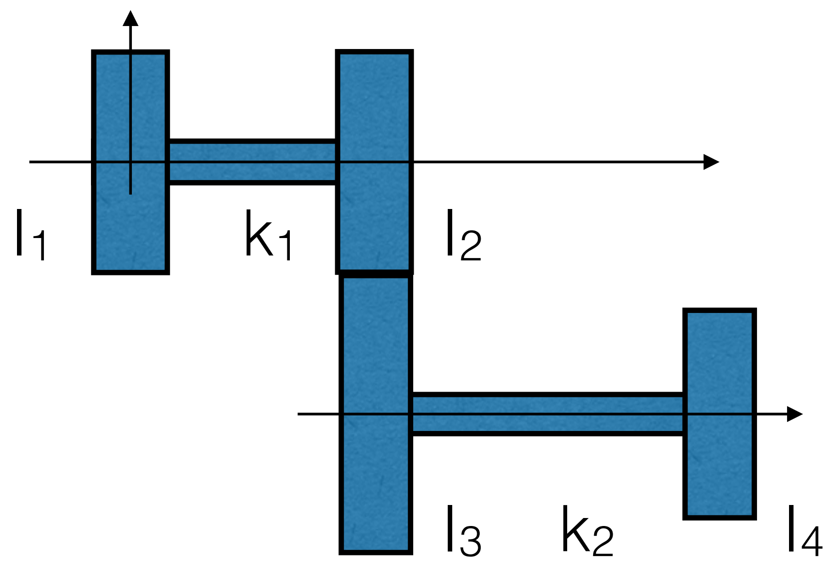
Poli Zeri

vediamo come passare da un all’altro con matlab

TBD

Calcolo delle modi un sistema torsionale ramificato- con Matlab

Consideriamo il sistema torsionale ramificato visto a lezione.



Ipotizziamo di conoscere i seguenti dati:

ruota	raggio [m]	spessore [m]
1	.15	.10
2*	.20	.15
3	.30	.15
4	.20	.10

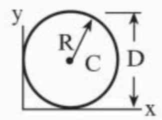
	materiale (per ruote e alberi)	
E	2.1e11	MPa
G**	8.1e10	MPa
ρ	7810	[kg/m³]

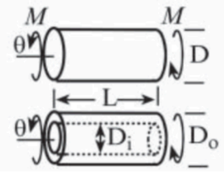
albero	raggio [m]	lunghezza [m]
1	.15	.20
2	.20	.40

** come si passa dal modulo E al modulo G ? $G = \dfrac{E}{2(1+\nu)}$

* come si calcola il rapporto di trasmissione $\gamma = \dfrac{N_2}{N_3} = \dfrac{D_2}{D_3}$

Troviamo le espressioni per i momenti d'inerzia e le rigidezze torsionali (es Blevins: Formula for dynamics acoustics and vibration):

23. Circle 	$x_C = R = D/2$ $y_C = R = D/2$ $A = \pi R^2 = \frac{\pi}{4} D^2$ $P = 2\pi R = \pi D$	$I_{x_C} = I_{y_C} = \frac{1}{4}\pi R^4 = \frac{1}{64}\pi D^4$ $I_{pC} = \frac{1}{2}\pi R^4 = \frac{1}{32}\pi D^4$ $I_x = I_y = \frac{5}{4}\pi R^4 = \frac{5}{64}\pi D^4$	$I_{x_C y_C} = 0$ $I_{xy} = \pi R^4 = \frac{\pi}{16} D^4$

32. Torsion of Uniform Shaft 	$\frac{GI_p}{L} = \frac{\pi G D^4}{32L}$ circular shaft, D = outside diameter $\frac{\pi G(D_o^4 - D_i^4)}{32L}$ hollow circular shaft $\frac{CG}{L}$ noncircular shaft, C given in Table 4.15.

% materiale

```
E=2.1e11          % modulo Yoiung
G=8.1e10          % modulo taglio
rho=7.81e3        % densità
```

% calcolo inerzie volani

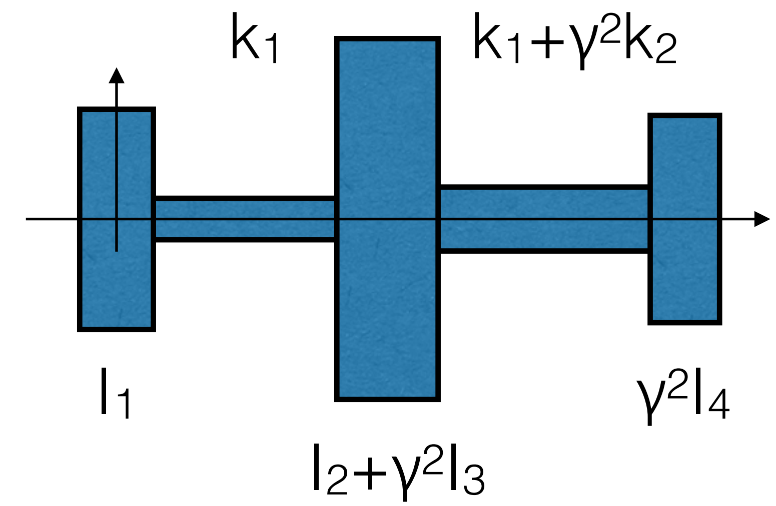
```
% Jp=(1/2)*(m*r^2)=(1/2)*(pi*r^2*l*rho)*r^2
r_ruote=[.15 .20 .35 .20];
s=[.10 .15 .15 .10];
for i=1:size(r_ruote,2)
   Jp(i)=(1/2)*pi*rho*s(i)*r_ruote(i)^4;
end
```

% calcolo rigidezze alberi

```
% k=(1/32)*(G*pi*d^4)/l
r_alberi=[.15 .20];
l_alberi=[.20 .40];
for i=1:size(r_alberi,2)
   K(i)=(1/(32*l_alberi(i)))*pi*G*(2*r_alberi(i)^4);
end
```

ruota	Jp [kgm^2]	albero	rigidezza [N/rad] *1e7	rapporto trasmissione
1	.6211	1	4.0258	0.6674
2	2.9443	2	6.3617	
3	19.9055			
4	1.9629			

Ricordiamo le espressioni e la trasformazione al sistema in linea:



$$
\begin{cases}
I_1\ddot{\theta}_1 + k_1(\theta_1-\theta_2) = T_1 \\
I_2\ddot{\theta}_2 + k_1(\theta_2-\theta_1) = T_2 + R_2F_{23} \\
I_3\ddot{\theta}_3 + k_2(\theta_3-\theta_4) = T_3 + R_3F_{23} \\
I_4\ddot{\theta}_4 + k_2(\theta_4-\theta_3) = T_4
\end{cases}
\qquad \theta_3 = -\gamma\theta_2
$$

$$
\begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2+\gamma^2 I_3 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma^2 I_4 \end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}_3' \end{Bmatrix}
+
\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1+\gamma^2 k_2 & -\gamma^2 k_2 \\ 0 & -\gamma^2 k_2 & \gamma^2 k_2 \end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3' \end{Bmatrix}
=
\begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2-\gamma T_3 \\ -\gamma T_4 \end{Bmatrix}
$$

% costruisco le matrici d'inerzia e rigidezza

```
JJ=[Jp(1) 0 0;
   0 Jp(2)+tau^2*Jp(3) 0;
   0 0 tau^2*Jp(4)];
KK=[K(1) -K(1) 0;
   -K(1) K(1)+tau^2*K(2) -tau^2*K(2);
   0 -tau^2*K(2) tau^2*K(2)];
```

E con i valori numerici ottenuti:

$$
\begin{bmatrix} .6211 & 0 & 0 \\ 0 & 9.5690 & 0 \\ 0 & 0 & 0.8724 \end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}_3' \end{Bmatrix}
+1e7
\begin{bmatrix} 4.0258 & -4.0258 & 0 \\ -4.0258 & 6.8532 & -2.8274 \\ 0 & -2.8274 & 2.8274 \end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3' \end{Bmatrix}
=
\begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2-\gamma T_3 \\ -\gamma T_4 \end{Bmatrix}
$$

Come già visto calcoliamo auto_valori e auto_vettori per il sistema omogeneo:

```
[va,ve]=eig(KK,JJ);
omega=diag(sqrt(ve));
```

cosa ci aspettiamo di ottenere?
com'è il sistema? come sono le sue matrici?

simmetriche? singolari? accoppiate?

Dovete sapere sempre
che tipo di risultato otterrete
dalla vostra simulazione!
prima di farla partire!

quale è il rango della matrice di rigidezza KK?

rank(KK)=2

rango=2, mentre la dimensione è 3..
matrice di rigidezza singolare..> modi rigidi

Di fatto la prima frequenza naturale è zero,
e per il primo modo gli spostamenti sono tutti uguali (no def flex)

eig_va [Hz]

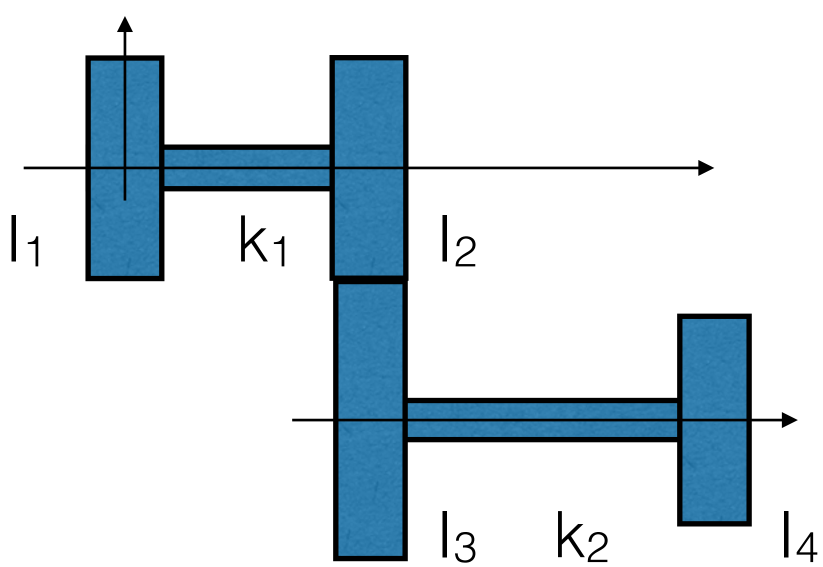
0
941.6
1325.8

eig_ve su sistema lineare

-.3007	-.1780	-1.2199
-.3007	-.0819	.0860
-.3007	1.0248	-.0754

Ricordiamo le relazioni di condensazione

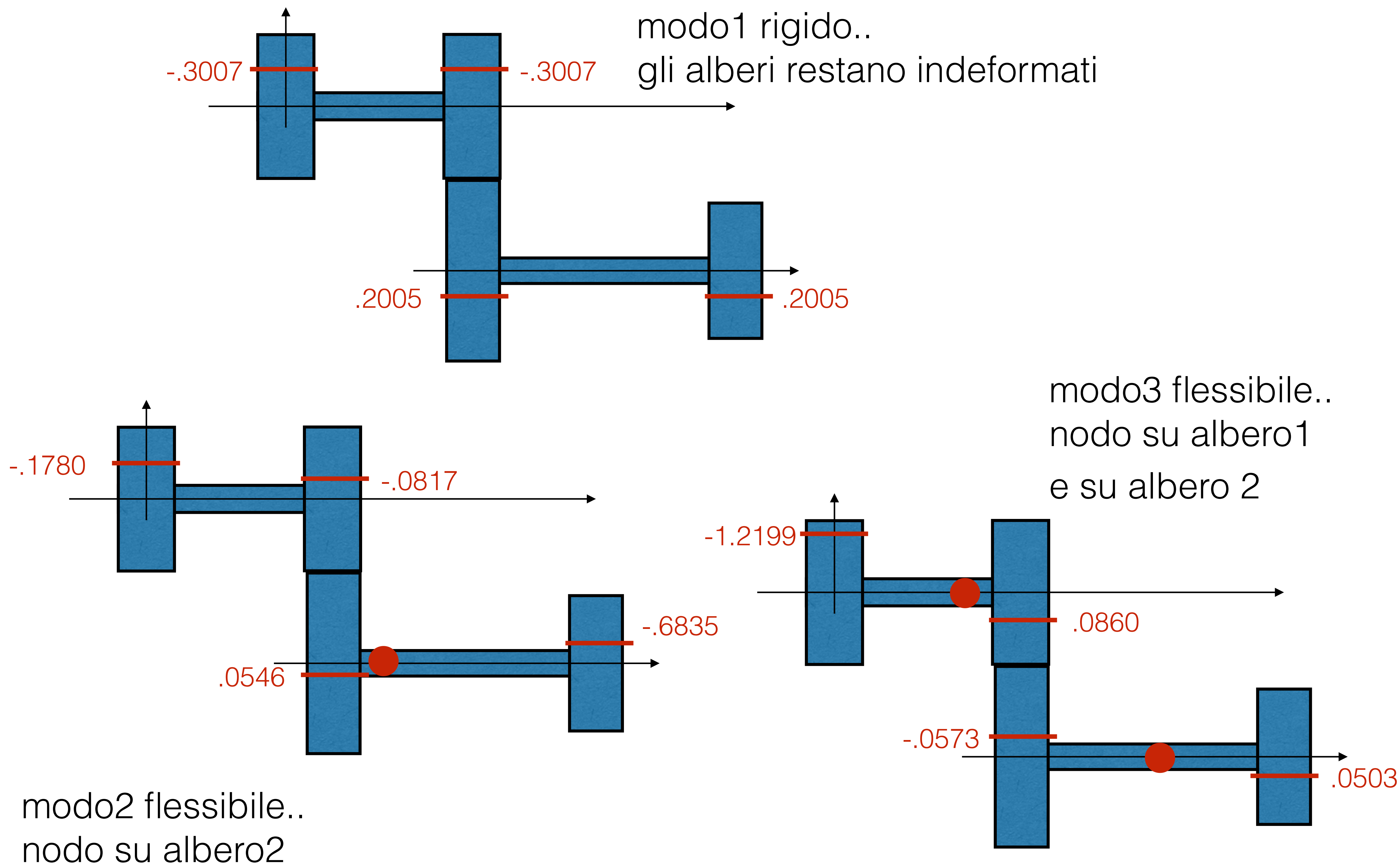
$\theta_3 = -\gamma\theta_2 \qquad \theta_4 = -\gamma\theta_3^1$



eig_ve su sistema originale

-.3007	-.1780	-1.2199
-.3007	-.0819	.0860
.2005	.0546	-.0573
.2005	-.6835	.0503

Indicativamente i modi saranno cosi…



E’ possibile usare queste informazioni modali (auto_valori e auto_vettori) per calcolare le risposte del sistema all’eccitazione generica con la solita trasformazione modale..

$$\{\theta\}=[\phi]\{\eta\}$$

$$[\phi]^t[J_p][\phi]\{\ddot{\eta}\}+[\phi]^t[K_\theta][\phi]\{\eta\}=\{T\}$$

notare lo 0 nella matrice di rigidezza modale

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{\eta}_1 \\ \ddot{\eta}_1 \\ \ddot{\eta}'_1 \end{Bmatrix}+1e7\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3.5 & 0 \\ 0 & 0 & 6.9393 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \eta_1 \\ \eta_1 \\ \eta'_1 \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} -.3007 & -.3007 & -.3007 \\ -.1780 & -.0819 & 1.0248 \\ -1.2199 & 0.0860 & -.0754 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2-\gamma T_3 \\ -\gamma T_4 \end{Bmatrix}$$

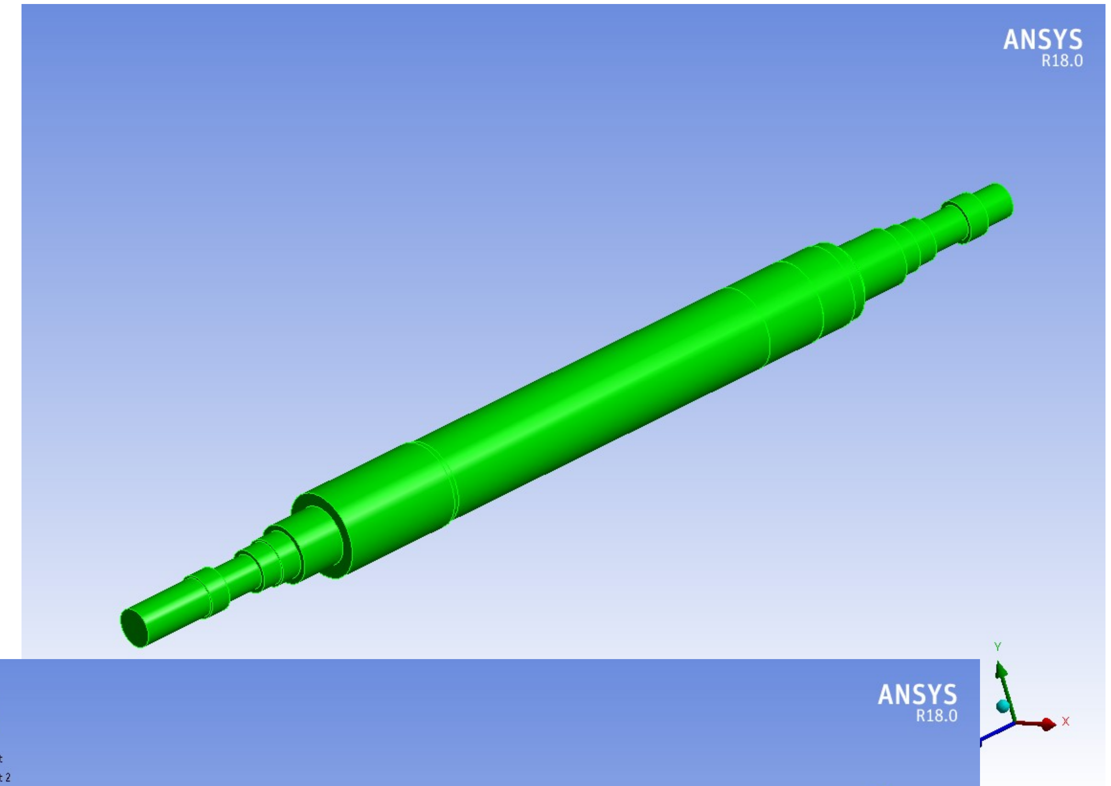
Luigi BREGANT
bregant@units.it

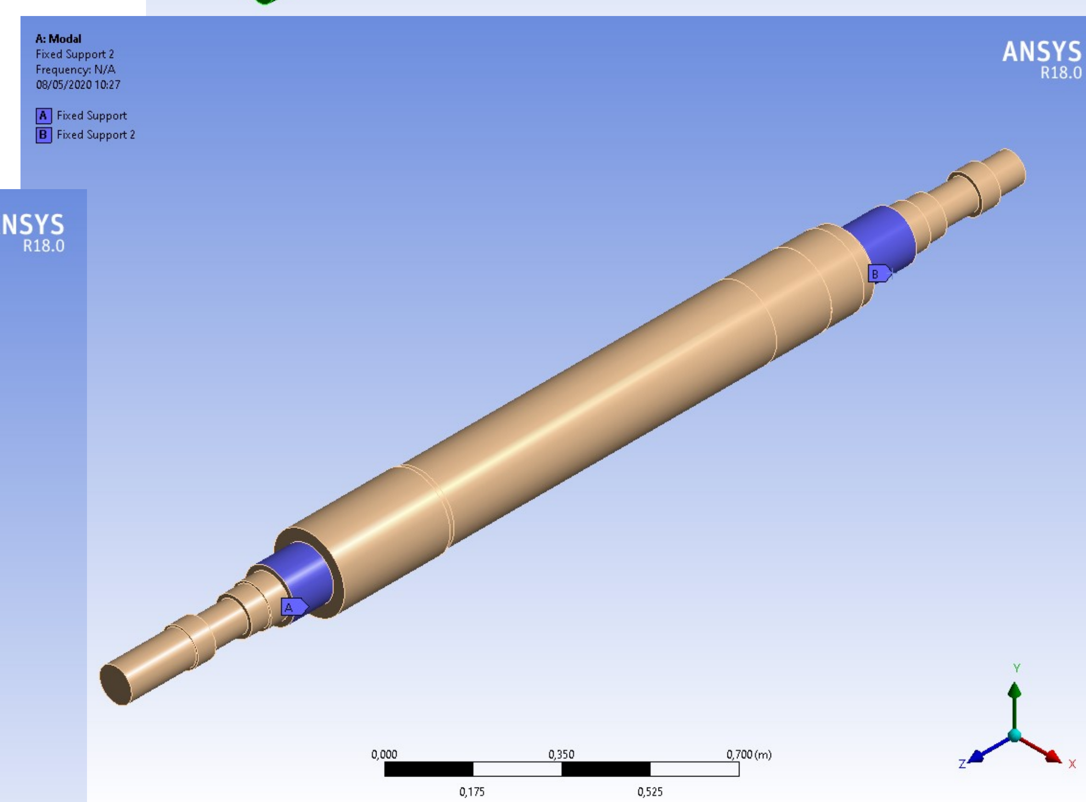
Simulazione con AWB
Albero

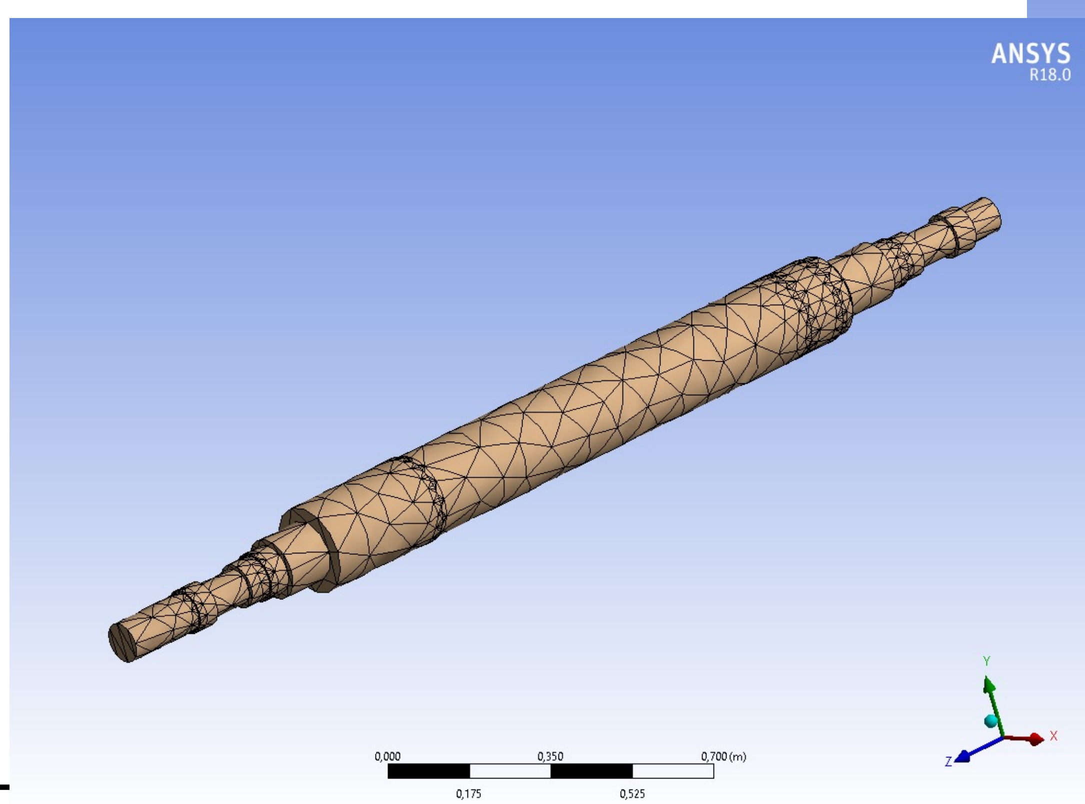
Partiamo da un disegno CAD di in albero

Definiamo:

- materiale
- vincoli
- tipologia elementi
- dimensione elementi
- tipologia analisi
- parametri analisi







Analisi modale..

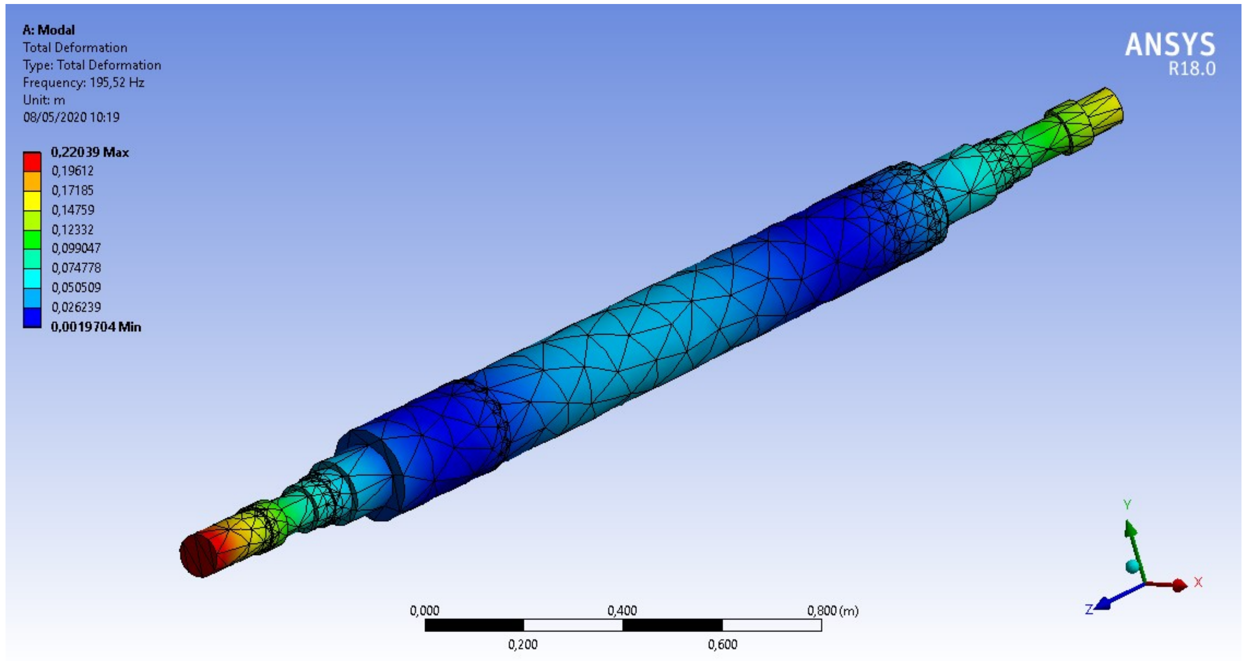
- numero di modi da estrarre
- tipologia del solutore
- spostamenti,
- stress,
- strain,
- forze ai vincoli
- …

Mode	Frequency [Hz]
1	0
2	0
3	0
4	4,8629E-05
5	2,3125E-04
6	4,4442E-04
7	195,52
8	195,62
9	355,64
10	356,19
11	546,8
12	547,06
13	856,8
14	857,08
15	957,01
16	1288,8
17	1290,3
18	1361,1
19	1680,4
20	1690,4

Mode	Frequency [Hz]
1	320,4
2	322,56
3	347,22
4	348,04
5	645,85
6	646,04
7	825,91
8	829,55
9	1032,3
10	1511,2
11	1515
12	1623
13	1781,3
14	1940
15	1944,3
16	2033,1
17	2321,9
18	2325
19	2540,6
20	2823,7

cosa rappresentano questi risultati?

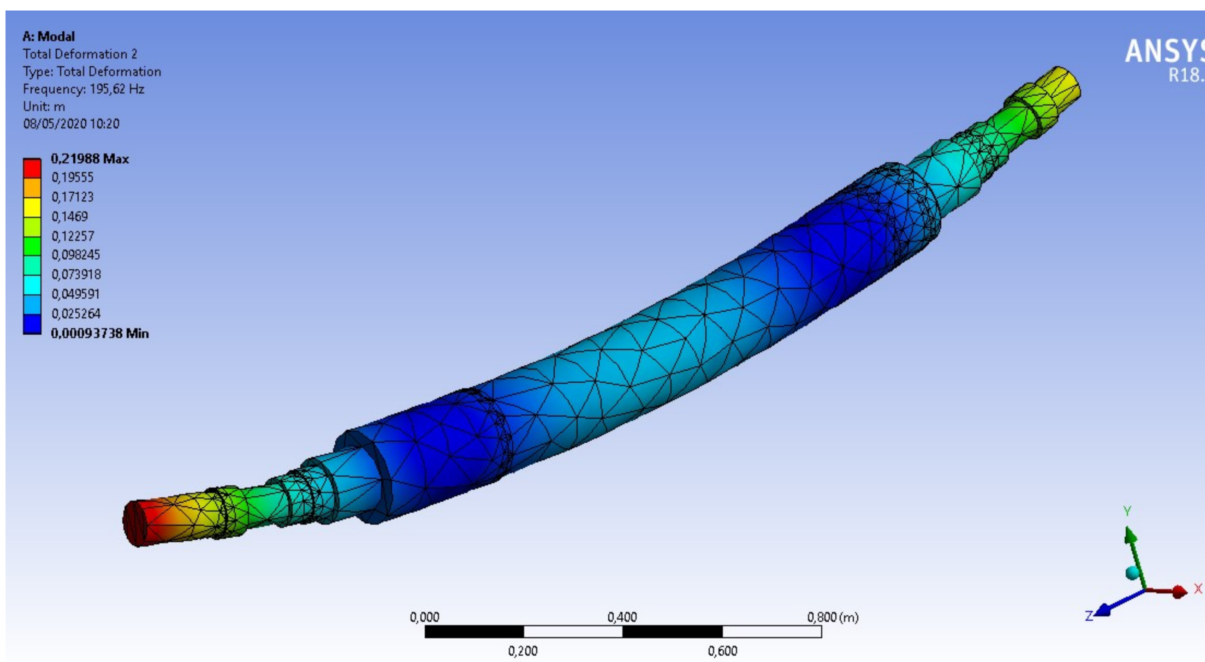
Luigi BREGANT
bregant@units.it

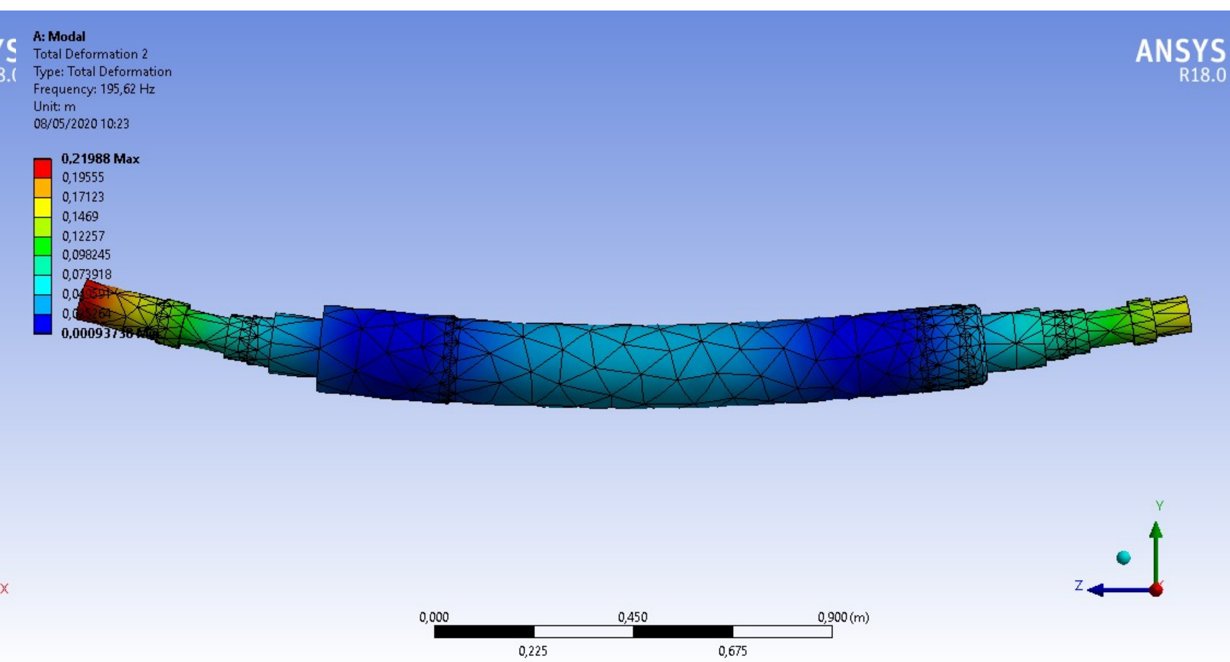


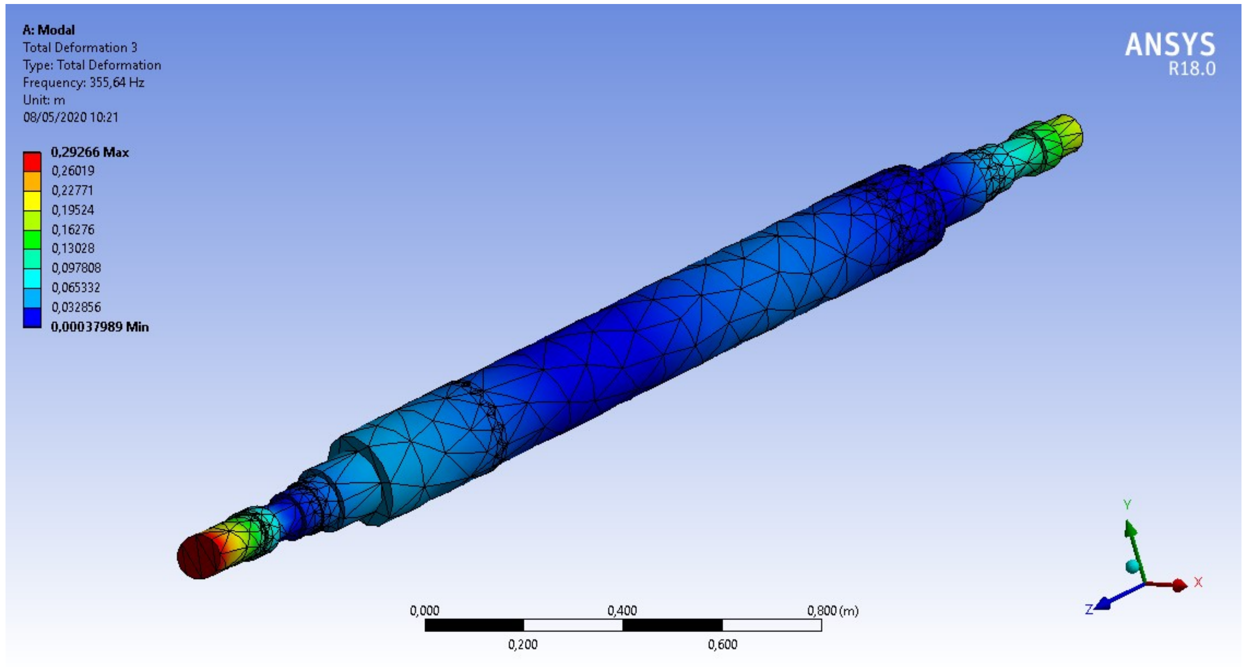
Modo1

Free-Free

Modo2



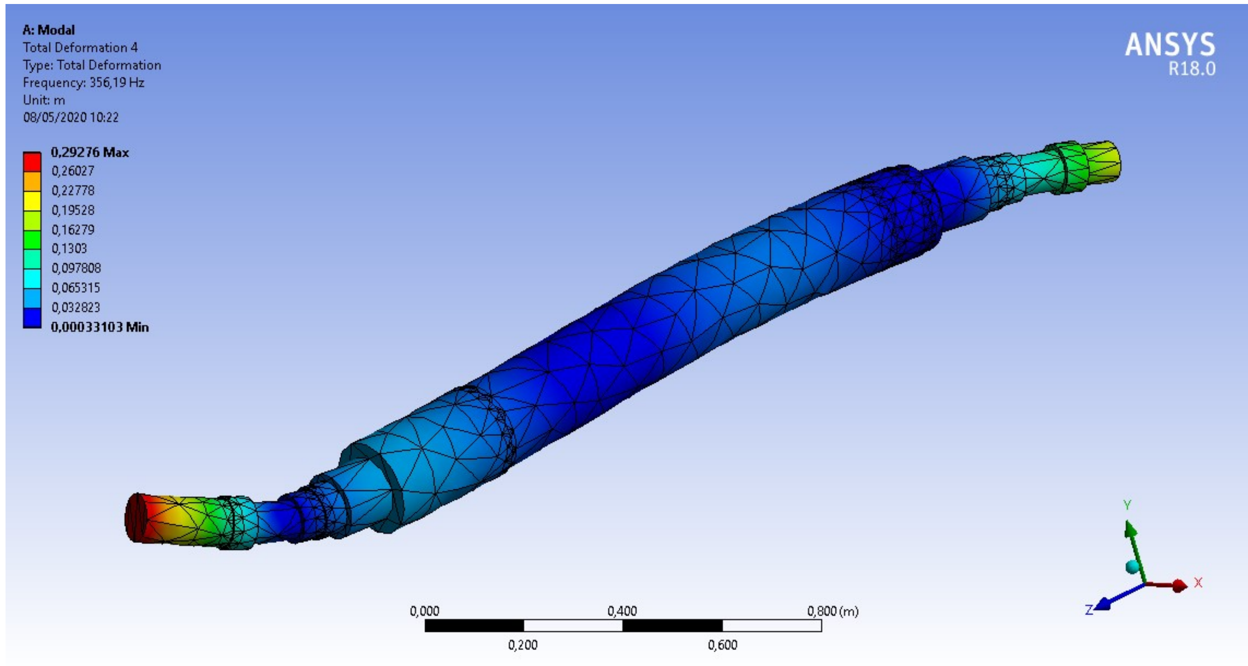


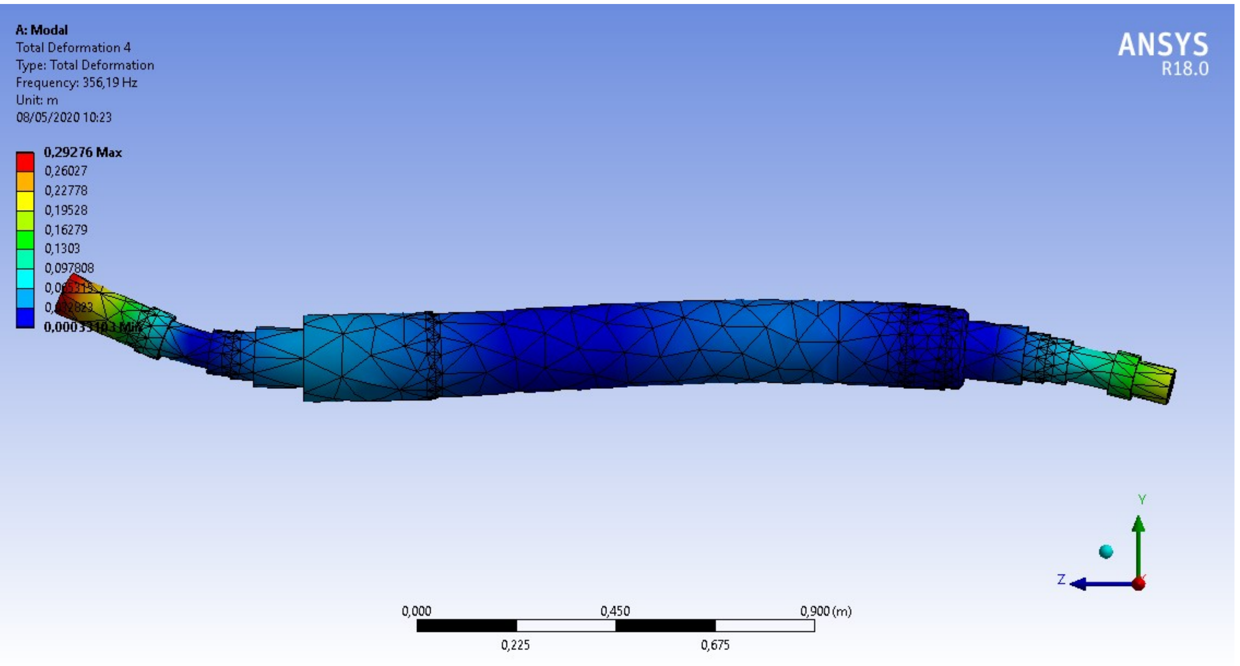


Modo3

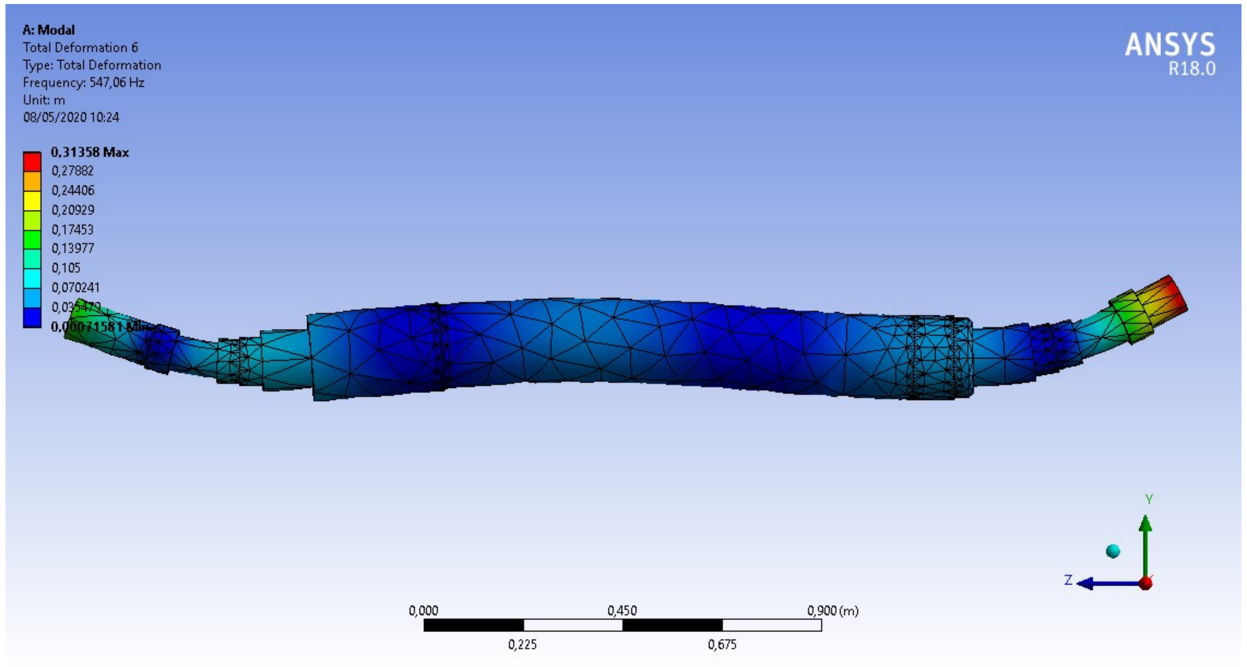
Free-Free

Modo4





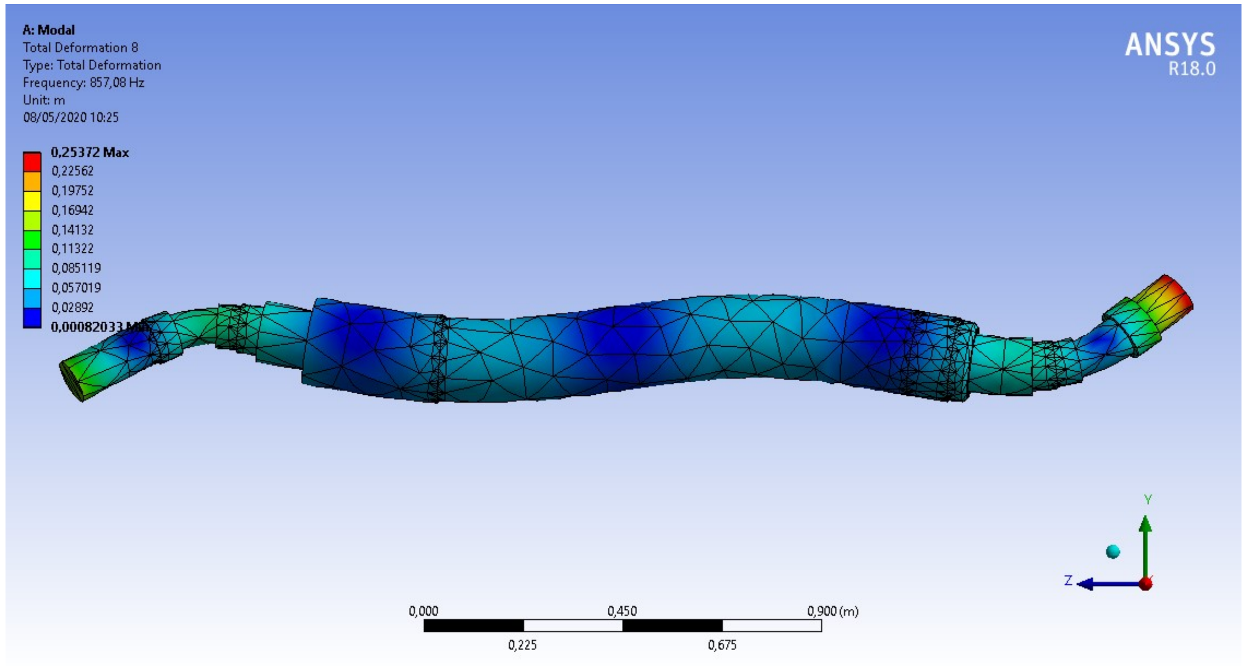
Luigi BREGANT
bregant@units.it



Modo6

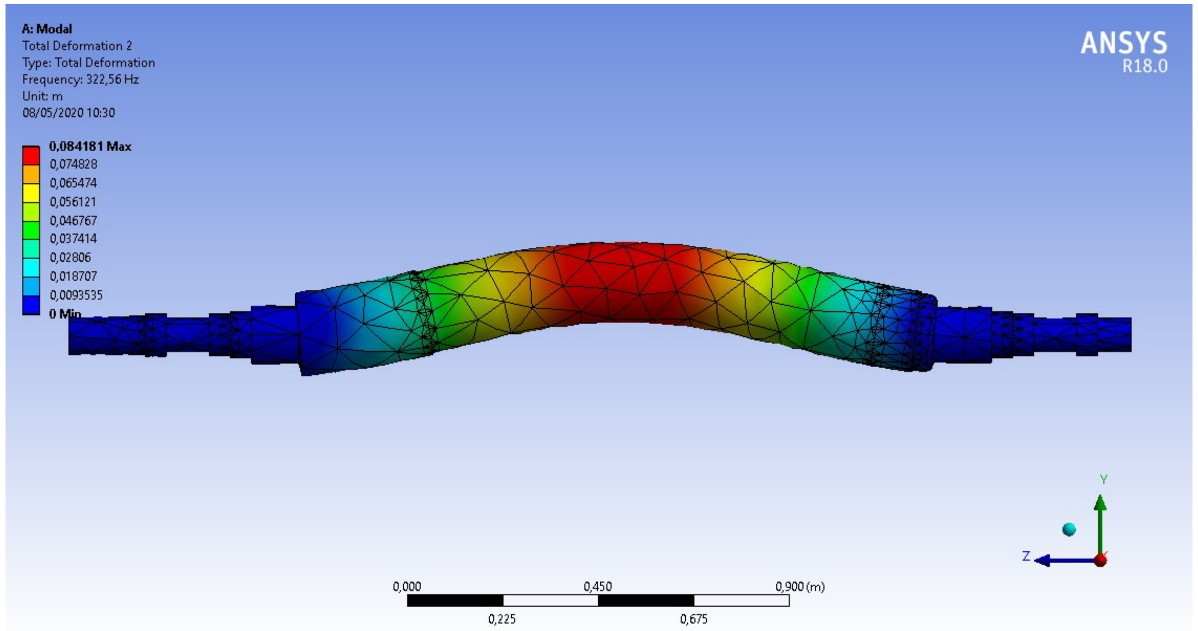
Modo7, ruotato di 90°

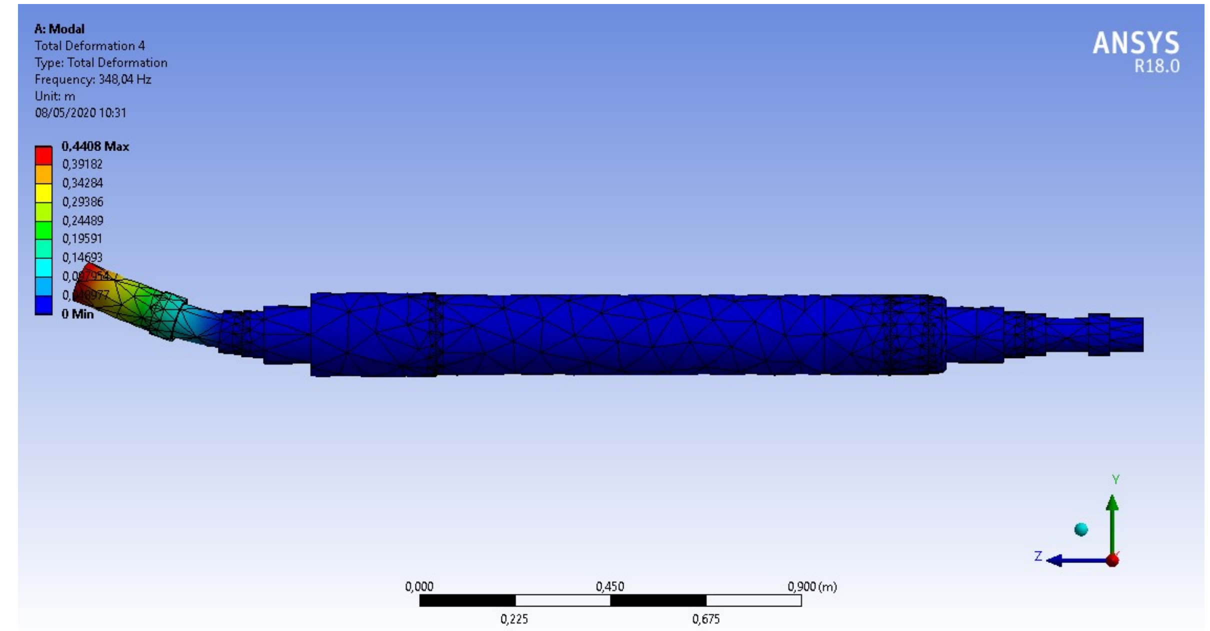
Free-Free



Modo8

Modo9, ruotato di 90°





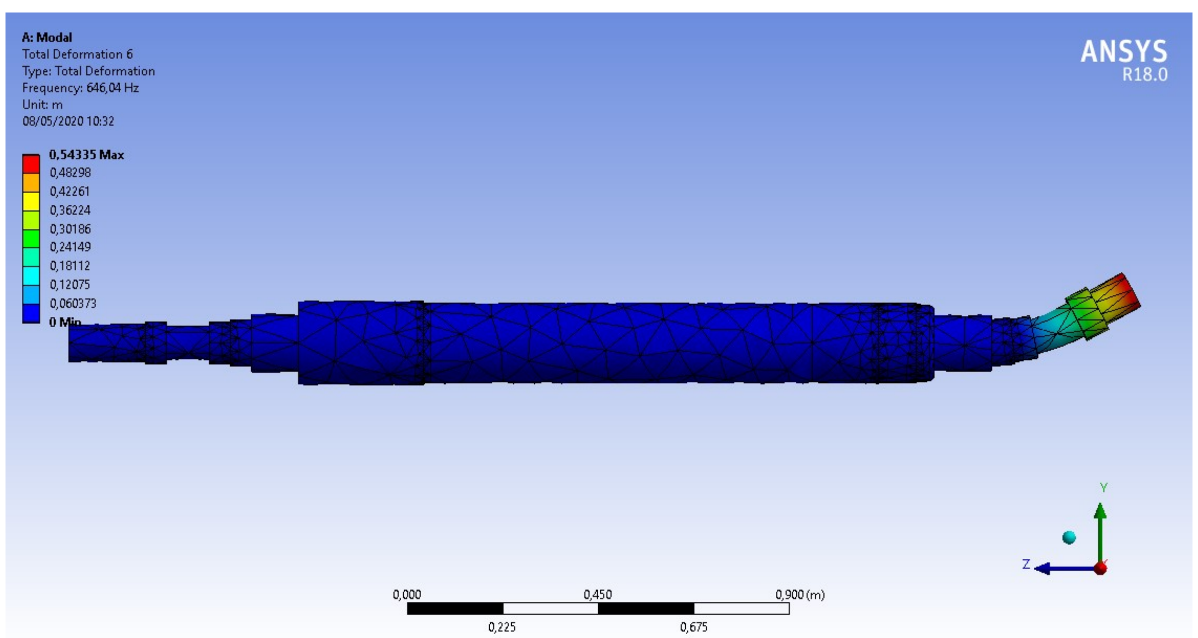
Modo2

Modo4

Vincolato!

Modo6

Modo8



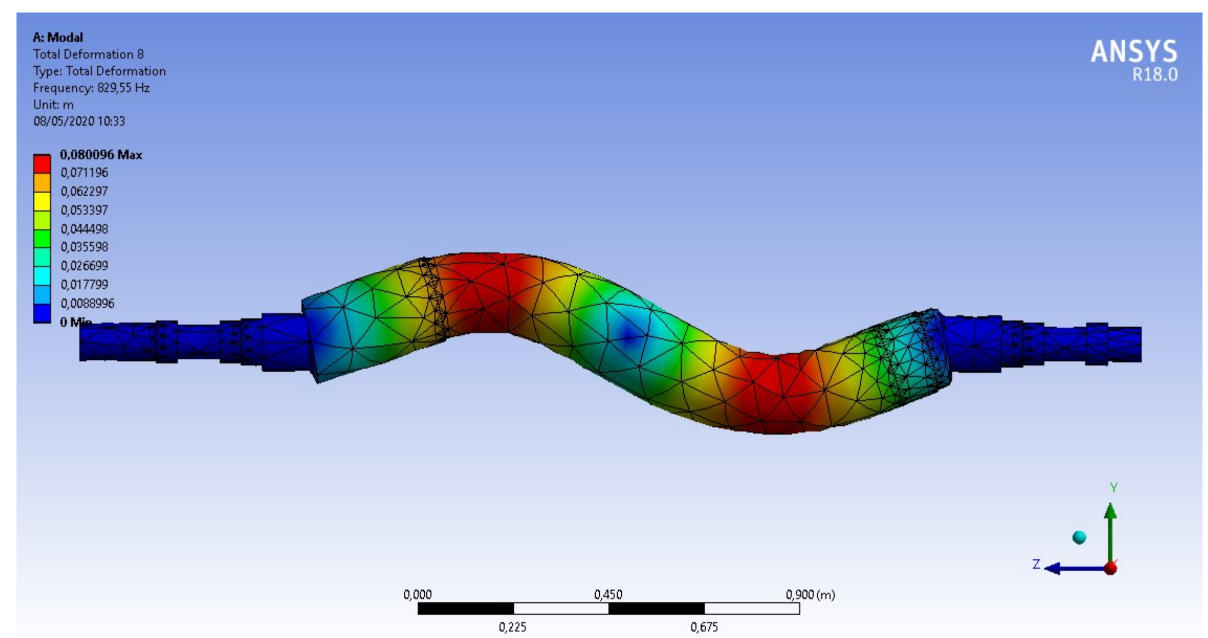


Diagramma di Campbell

- aggiornare i vincoli
- aggiornare solutore (damped)
- aggiungere i valori α e β per creare la matrice [c]
- aggiungere asse di rotazione
- aggiungere range di velocità d'interesse
- aggiungere valori calcolo soluzione
- ..

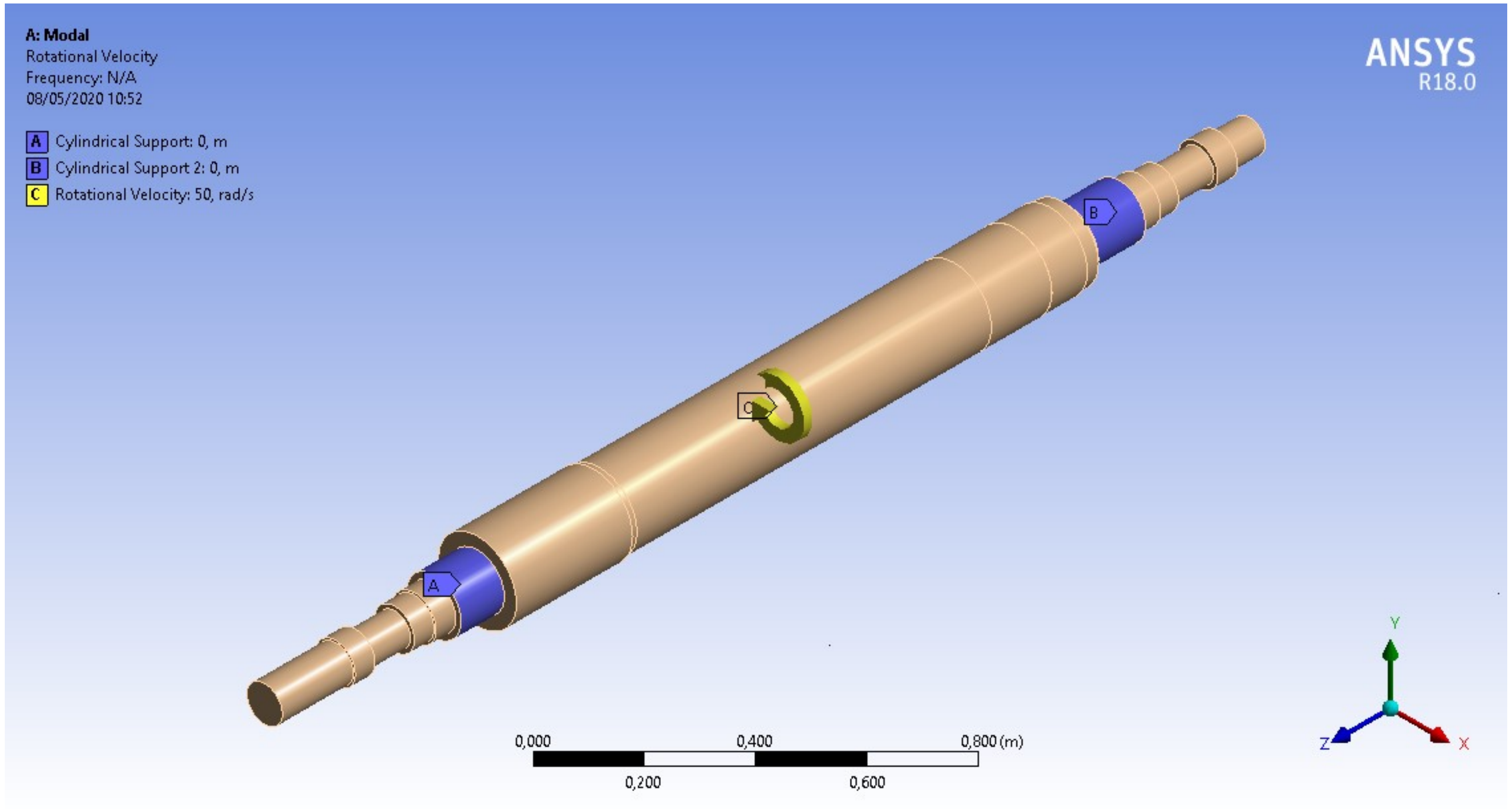
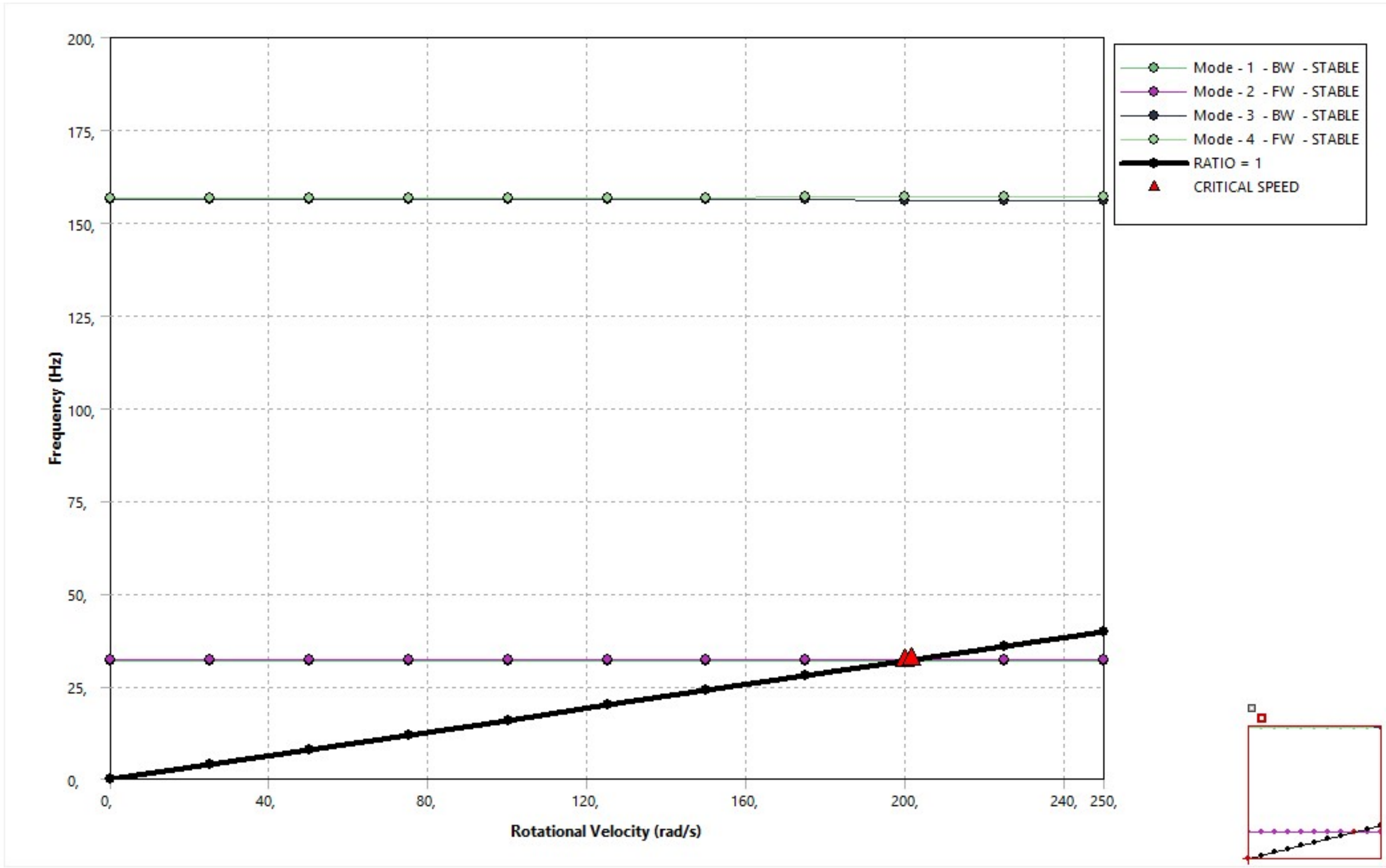


Diagramma di Campbell

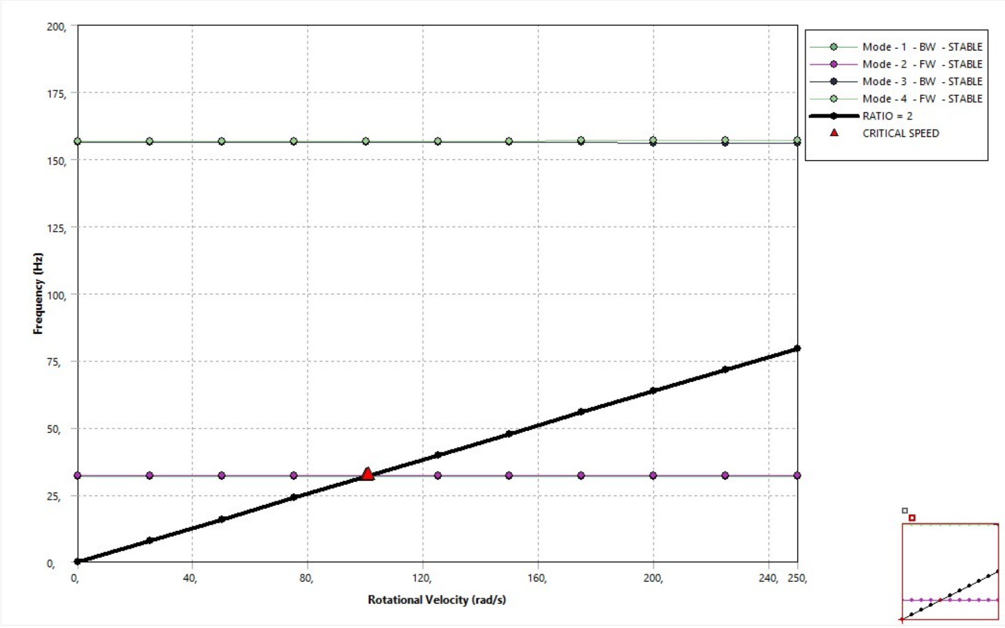
- FW e BW whirl
- frequenze critiche
- ..

1X



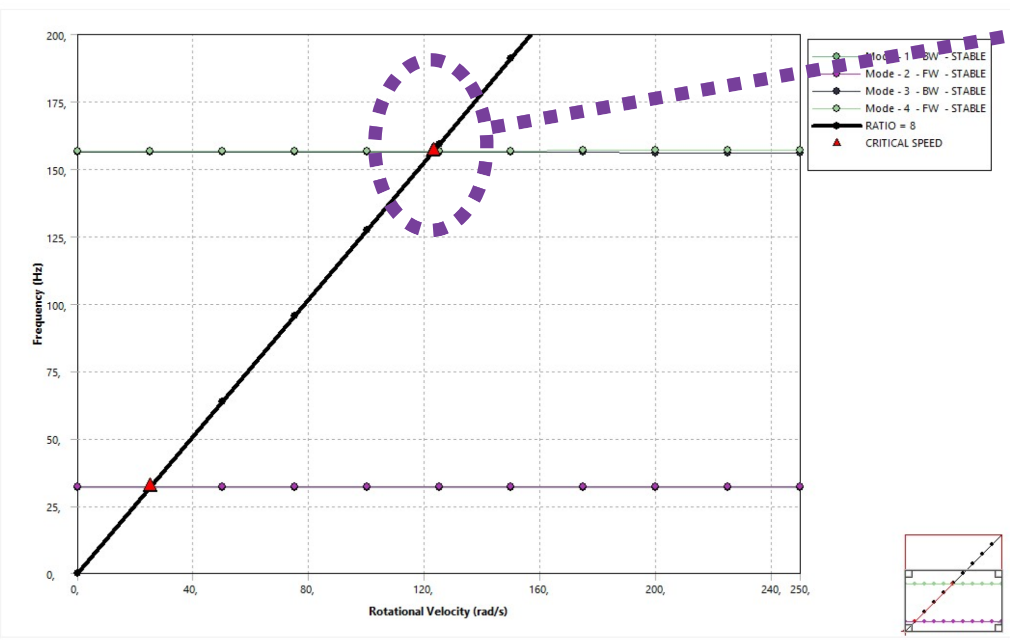
Mode	Whirl Direction	Mode Stability	Critical Speed	0, rad/s	25, rad/s	50, rad/s	75, rad/s	100, rad/s	125, rad/s	15
1,	BW	STABLE	200,06 rad/s	31,874 Hz	31,874 Hz	31,872 Hz	31,869 Hz	31,865 Hz	31,859 Hz	31
2,	FW	STABLE	201,44 rad/s	32,025 Hz	32,025 Hz	32,027 Hz	32,03 Hz	32,035 Hz	32,04 Hz	32
3,	BW	STABLE	0, rad/s	156,52 Hz	156,51 Hz	156,46 Hz	156,41 Hz	156,35 Hz	156,29 Hz	15
4,	FW	STABLE	0, rad/s	156,58 Hz	156,6 Hz	156,64 Hz	156,69 Hz	156,75 Hz	156,81 Hz	15

2X

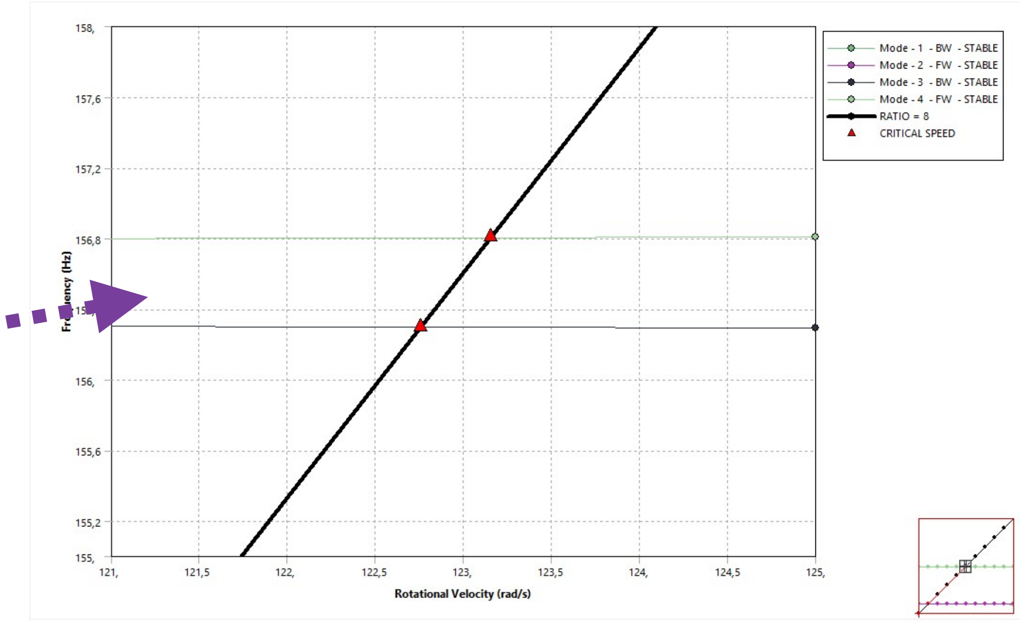


Mode	Whirl Direction	Mode Stability	Critical Speed	0, rad/s	25, rad/s	50, rad/s	75, rad/s	100, rad/s	125, rad/s	15
1,	BW	STABLE	100,11 rad/s	31,874 Hz	31,874 Hz	31,872 Hz	31,869 Hz	31,865 Hz	31,859 Hz	31
2,	FW	STABLE	100,64 rad/s	32,025 Hz	32,025 Hz	32,027 Hz	32,03 Hz	32,035 Hz	32,04 Hz	32
3,	BW	STABLE	0, rad/s	156,52 Hz	156,51 Hz	156,46 Hz	156,41 Hz	156,35 Hz	156,29 Hz	15
4,	FW	STABLE	0, rad/s	156,58 Hz	156,6 Hz	156,64 Hz	156,69 Hz	156,75 Hz	156,81 Hz	15

8X



Mode	Whirl Direction	Mode Stability	Critical Speed	0, rad/s	25, rad/s	50, rad/s	75, rad/s	100, rad/s	125, rad/s	15
1,	BW	STABLE	25,034 rad/s	31,874 Hz	31,874 Hz	31,872 Hz	31,869 Hz	31,865 Hz	31,859 Hz	31
2,	FW	STABLE	25,153 rad/s	32,025 Hz	32,025 Hz	32,027 Hz	32,03 Hz	32,035 Hz	32,04 Hz	32
3,	BW	STABLE	122,76 rad/s	156,52 Hz	156,51 Hz	156,46 Hz	156,41 Hz	156,35 Hz	156,29 Hz	15
4,	FW	STABLE	123.16 rad/s	156.58 Hz	156.6 Hz	156.64 Hz	156.69 Hz	156.75 Hz	156.81 Hz	15



Mode	Whirl Direction	Mode Stability	Critical Speed	0, rad/s	25, rad/s	50, rad/s	75, rad/s	100, rad/s	125, rad/s	15
1,	BW	STABLE	25,034 rad/s	31,874 Hz	31,874 Hz	31,872 Hz	31,869 Hz	31,865 Hz	31,859 Hz	31
2,	FW	STABLE	25,153 rad/s	32,025 Hz	32,025 Hz	32,027 Hz	32,03 Hz	32,035 Hz	32,04 Hz	32
3,	BW	STABLE	122,76 rad/s	156,52 Hz	156,51 Hz	156,46 Hz	156,41 Hz	156,35 Hz	156,29 Hz	15
4,	FW	STABLE	123,16 rad/s	156,58 Hz	156,6 Hz	156,64 Hz	156,69 Hz	156,75 Hz	156,81 Hz	15

8X Zoom

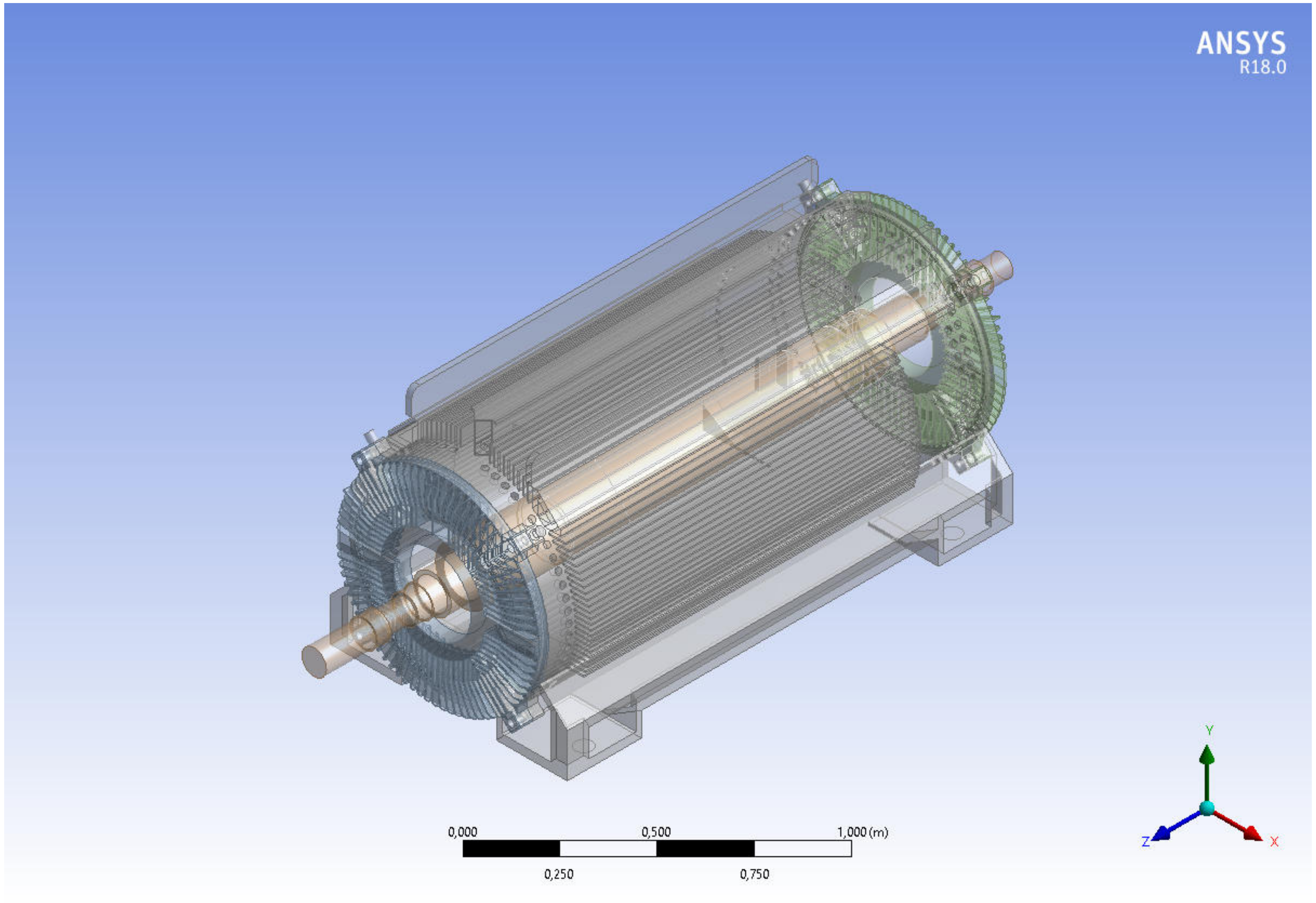
Simulazione con AWB
di struttura motore elettrico

Luigi BREGANT
bregant@units.it

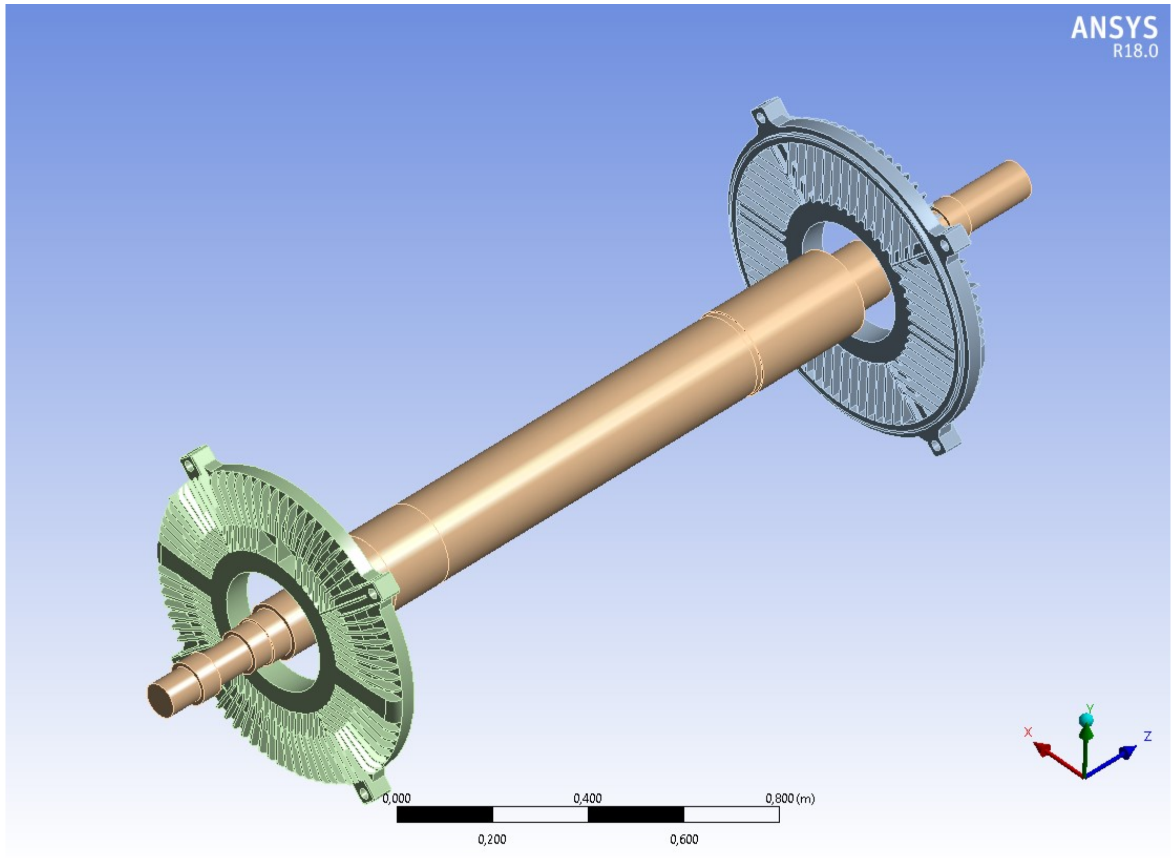
Abbiamo a disposizione il CAD di un motore elettrico

1. mettere a posto la geometria!

(punti non coincidenti, linee spezzate, aree non chiuse volumi twistati, raccordi, micro facce,…)

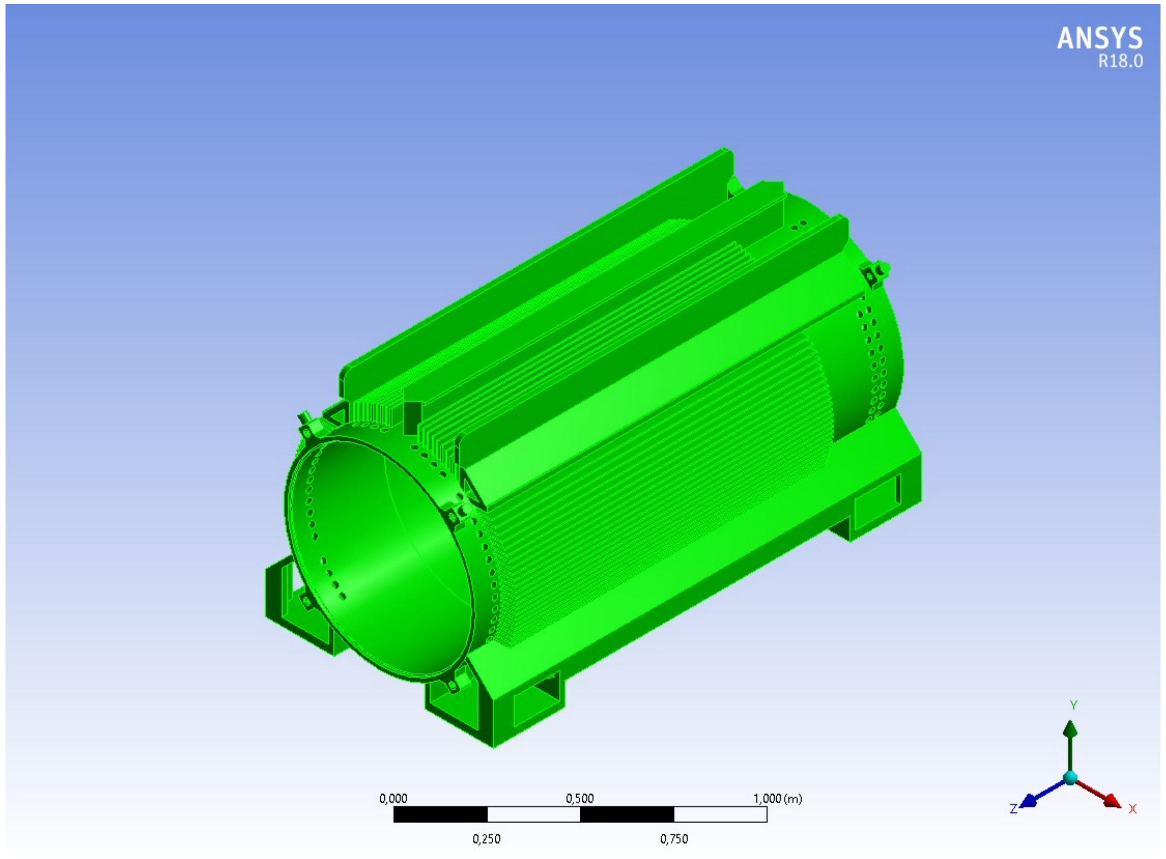


1. mettere a posto la geometria!



scudi e albero

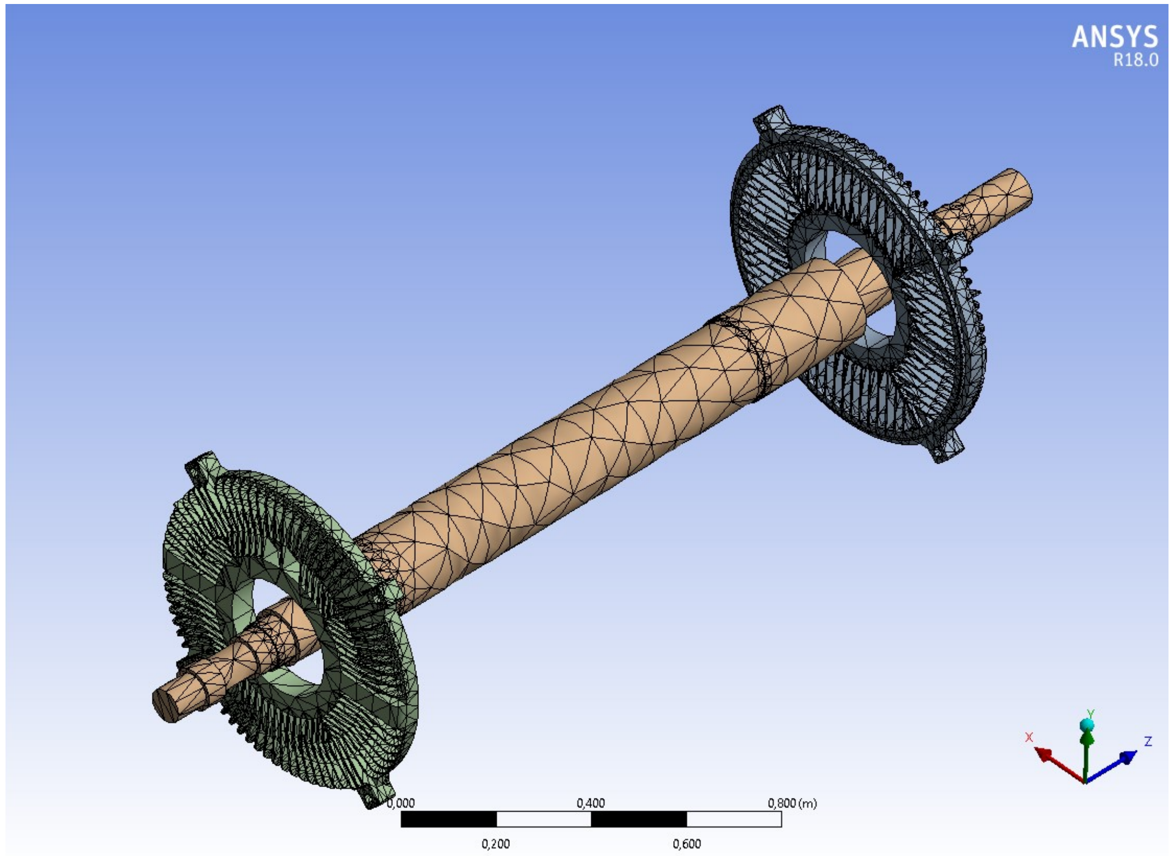
(mancano supporti, avvolgimenti)

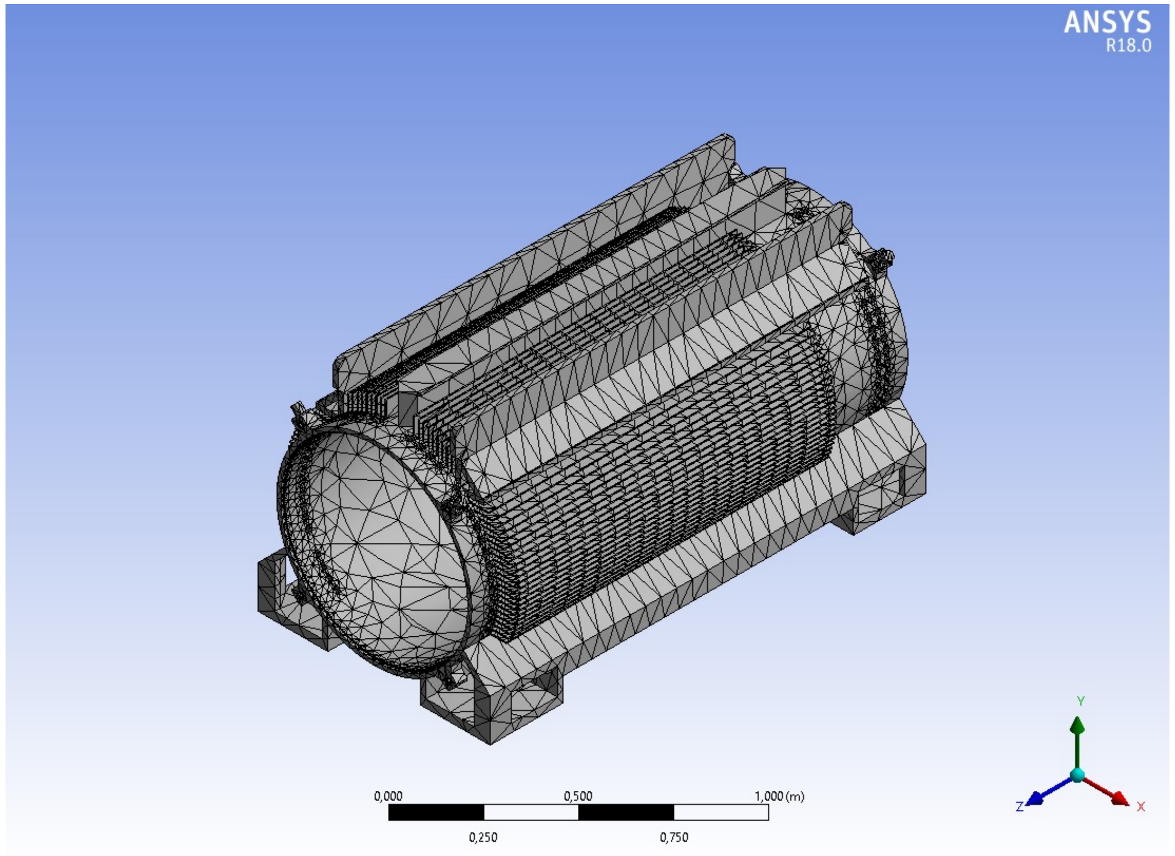


carcassa

(mancano bulloni, avvolgimenti)

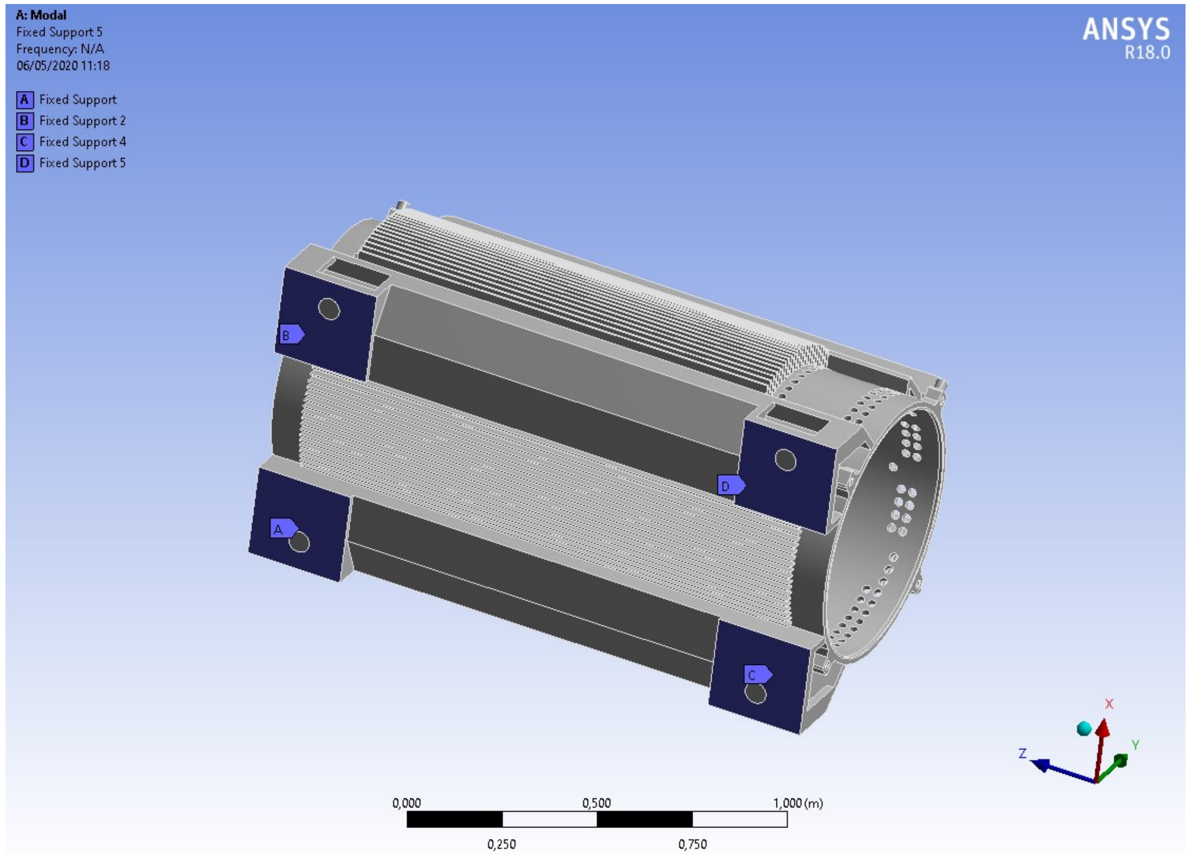
2. definire elementi, meshare modello, assegnare proprietà materiali

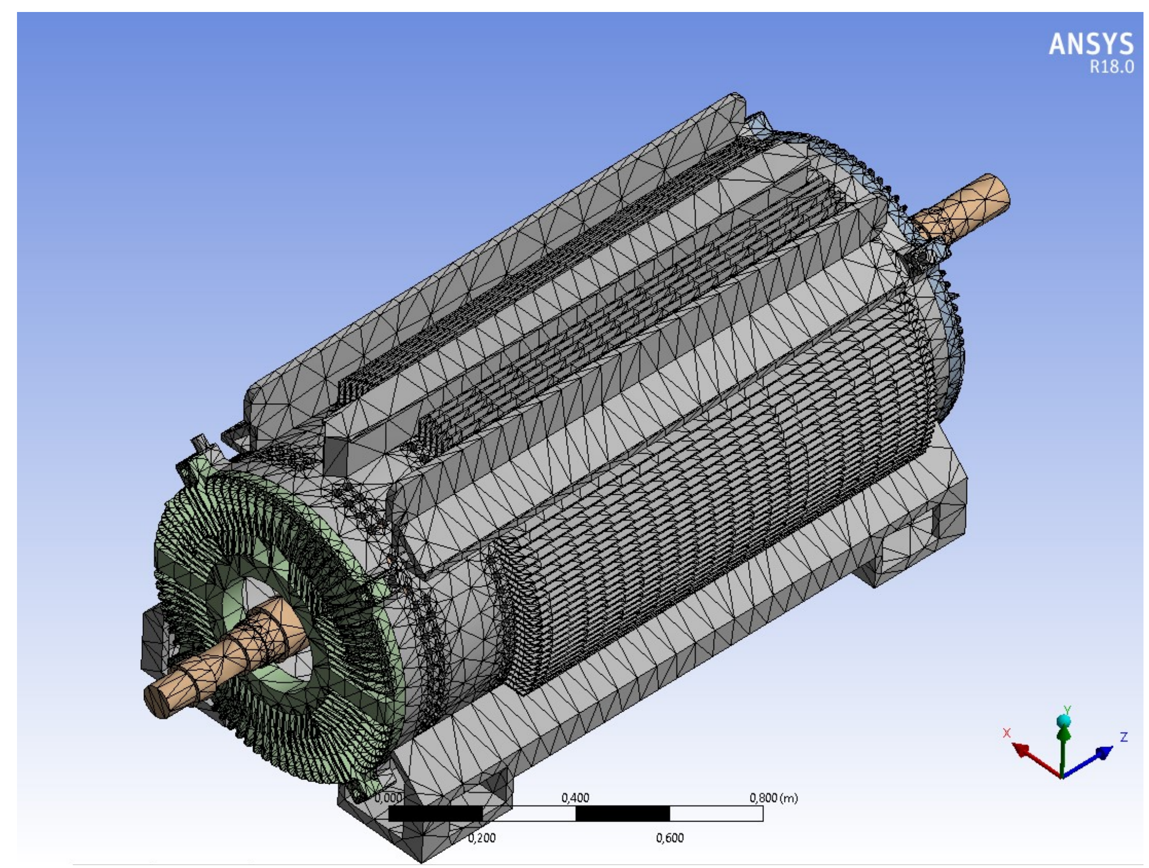




Luigi BREGANT
bregant@units.it

2. definire definire vincoli, ed i parametri di analisi





3. analizzare i risultati

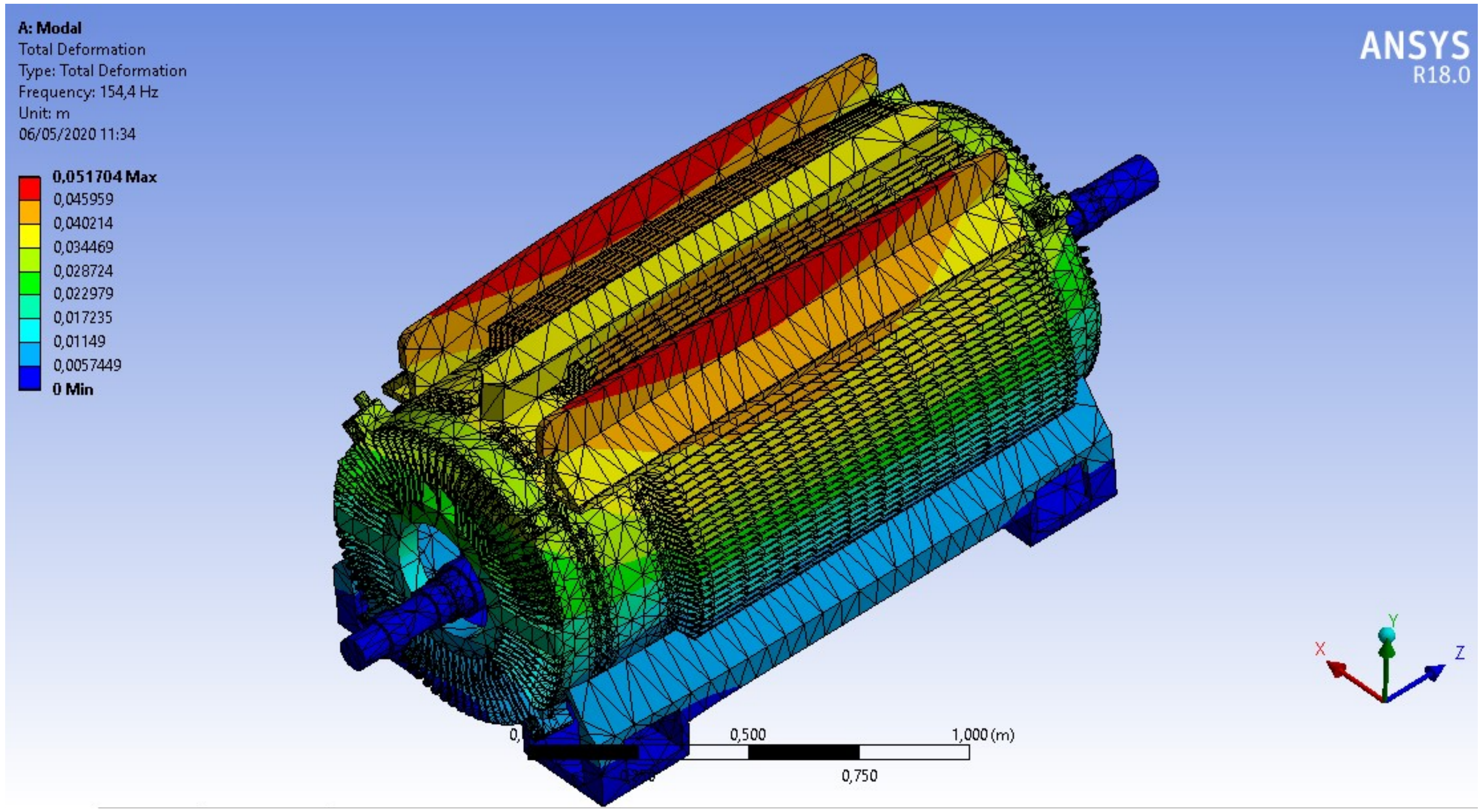
perché 6 modi rigidi?
(1-6)

perché modi ripetuti ?
(8-9, 12-13 17-18)

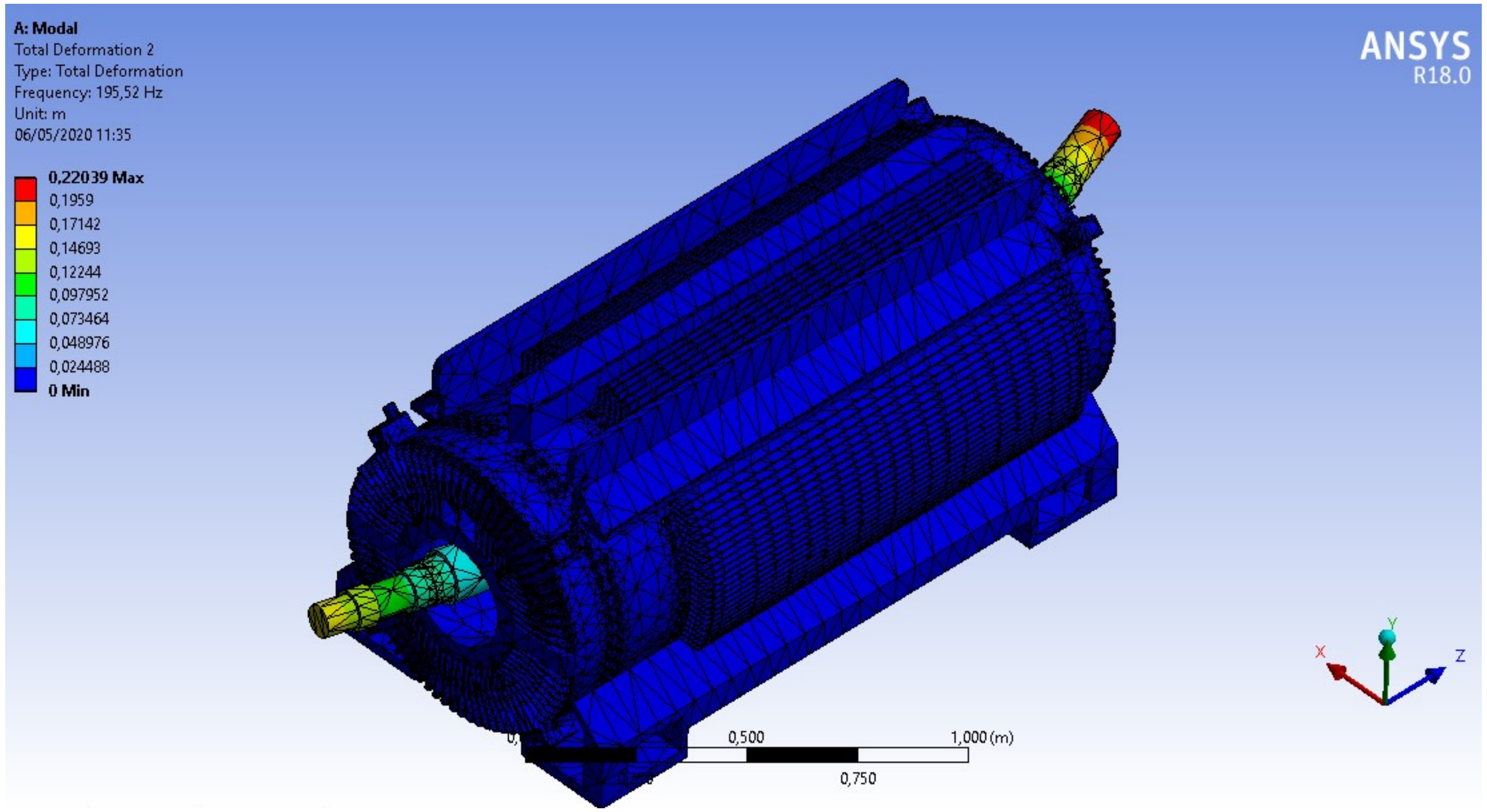
Assieme, vincolato alla base

Mode	Frequency [Hz]
1	0
2	0
3	0
4	1,0517E-04
5	2,5722E-04
6	4,4695E-04
7	154,4
8	195,52
9	195,62
10	263,71
11	310,07
12	355,64
13	356,19
14	359,17
15	379,07
16	423,01
17	459,25
18	461,17
19	525,14
20	532,73

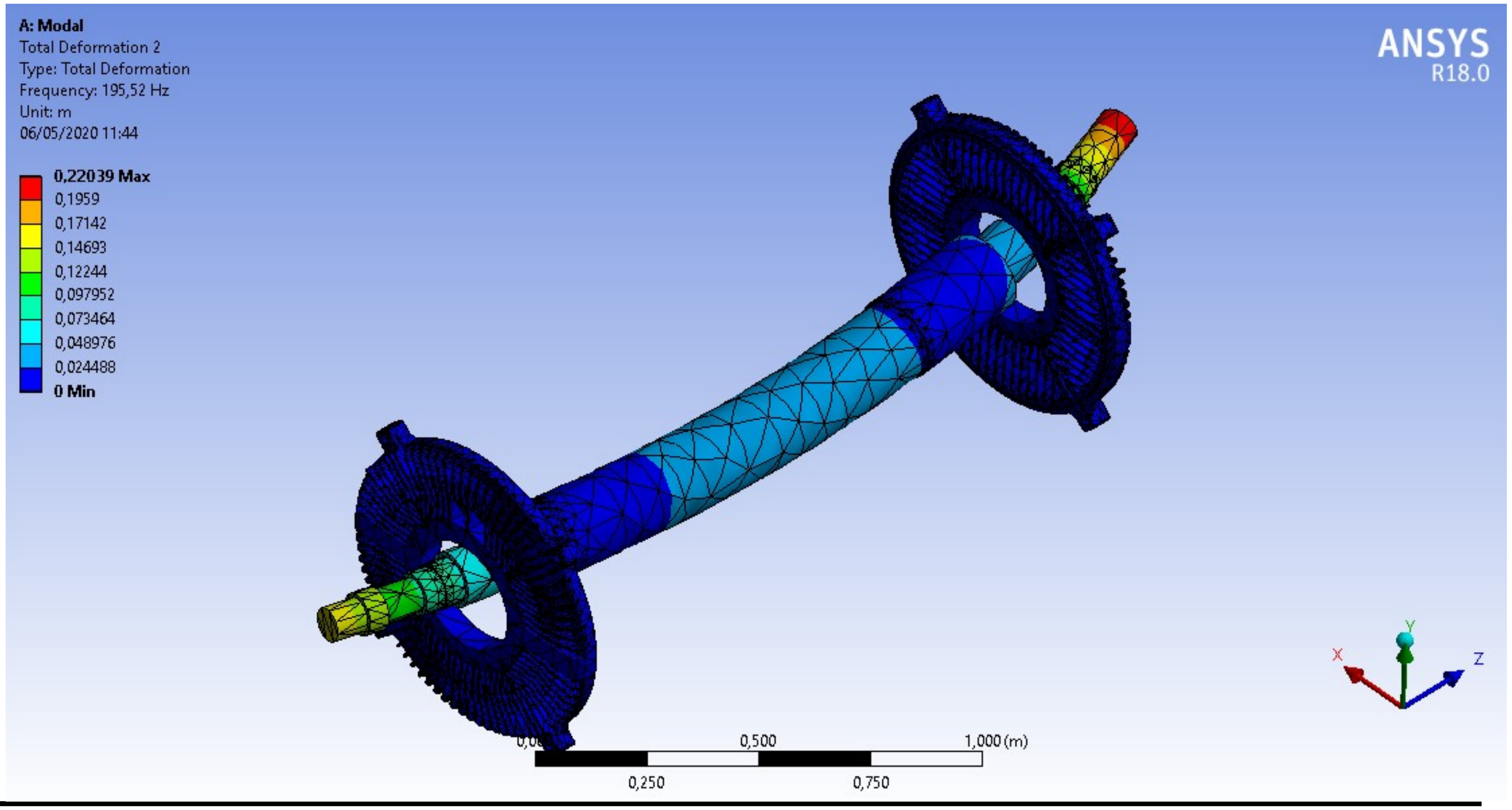
3. analizzare i risultati



Modo1

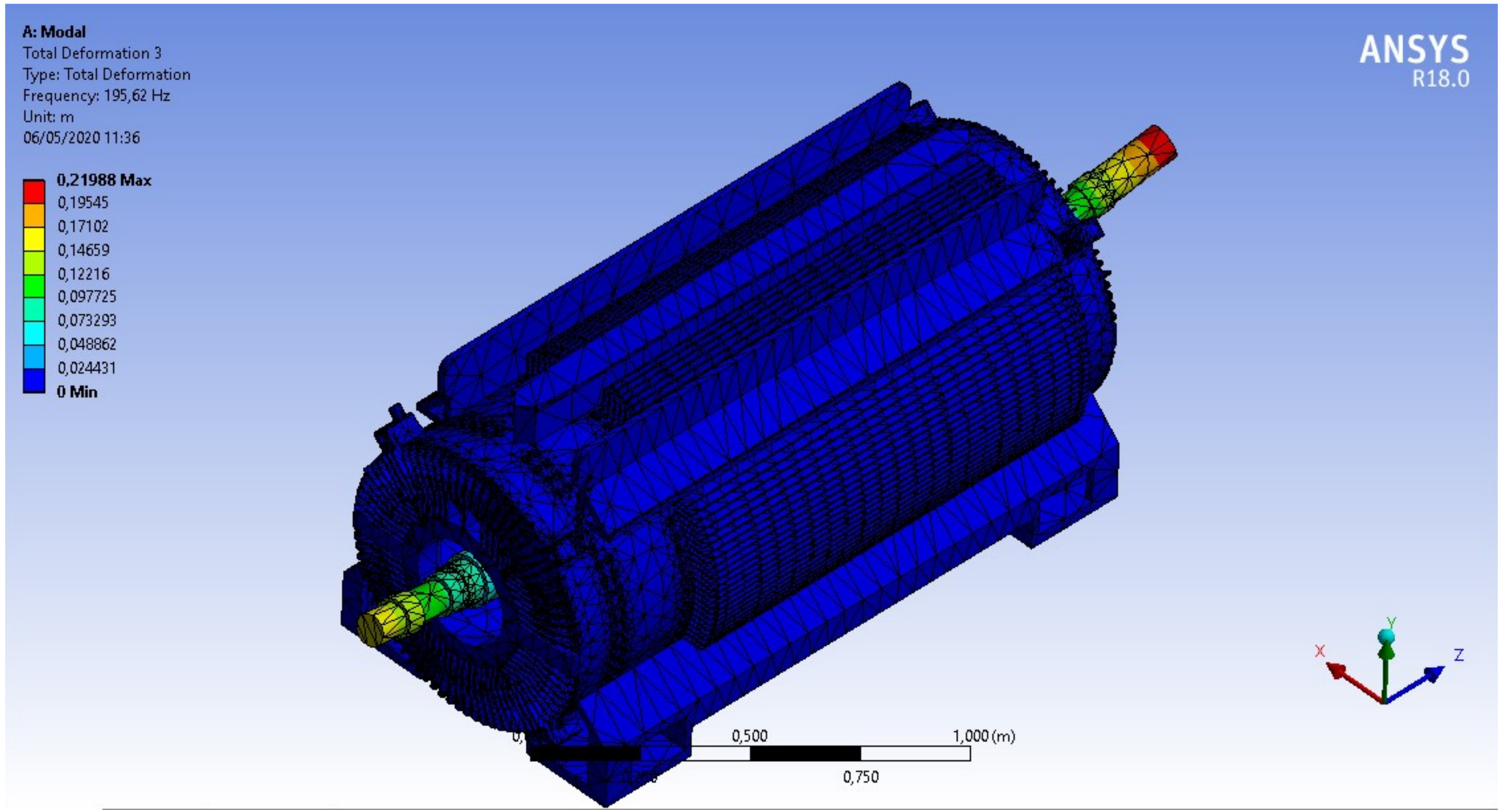


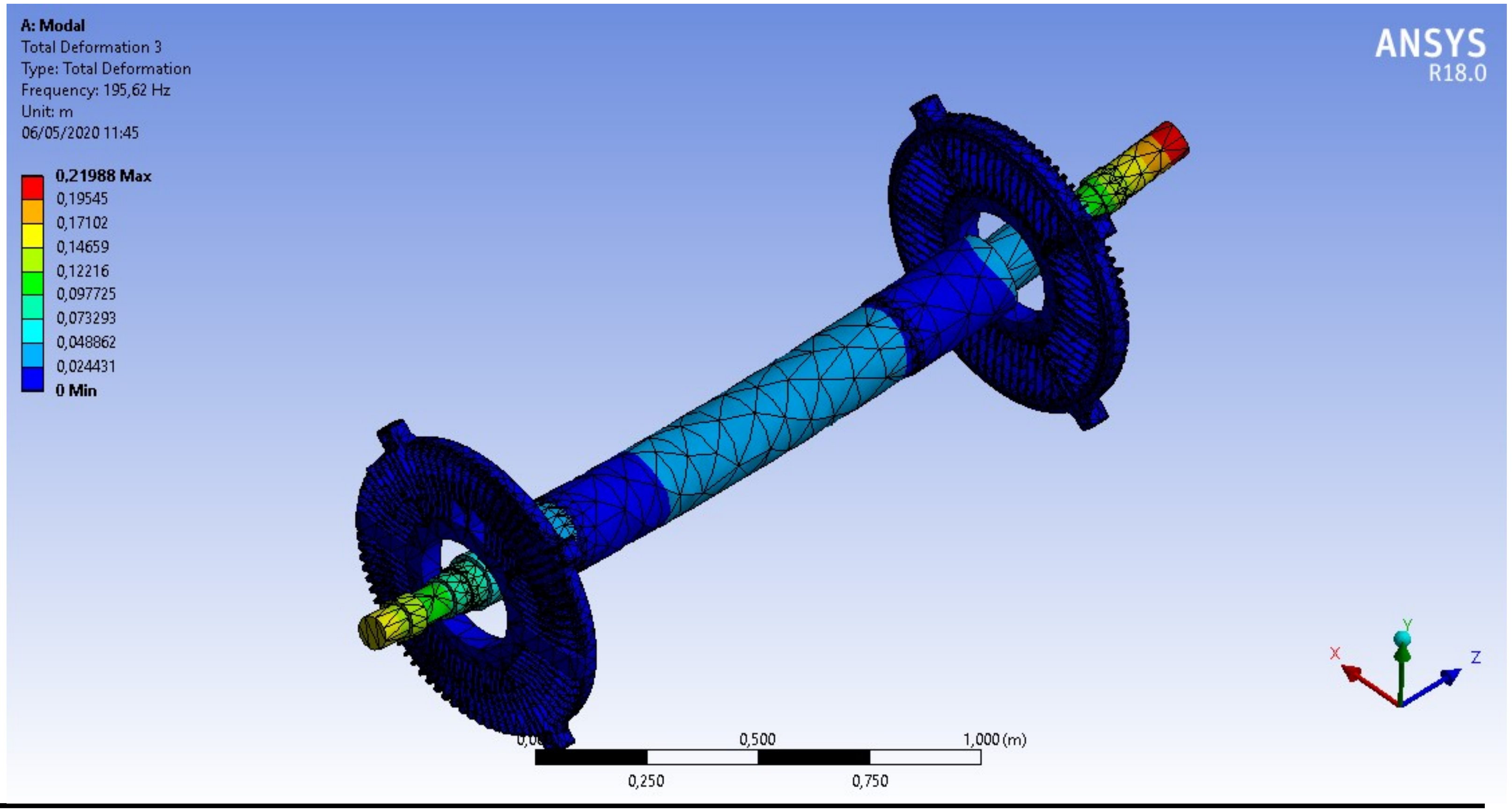
3. analizzare i risultati



Modo2

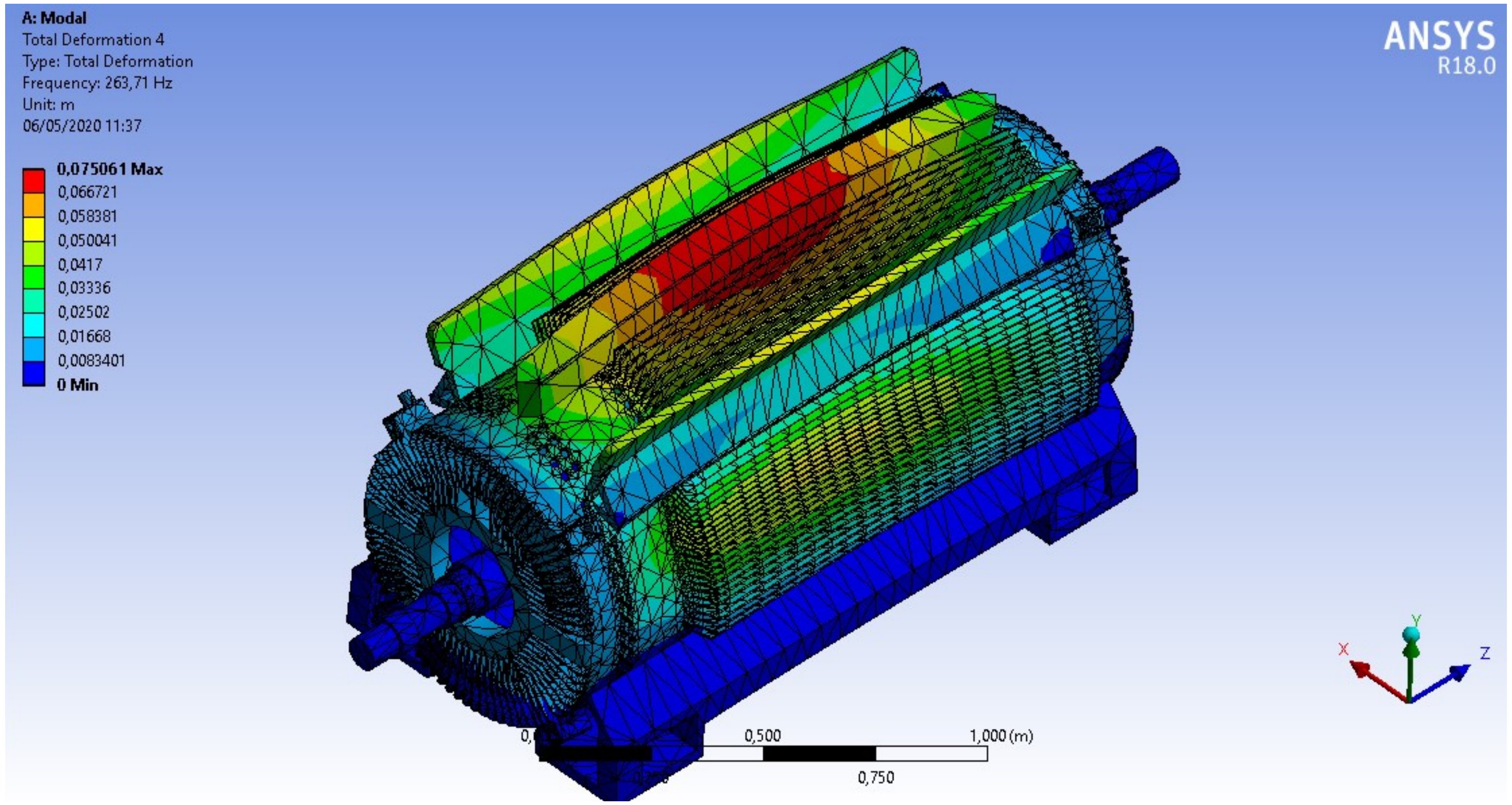
3. analizzare i risultati





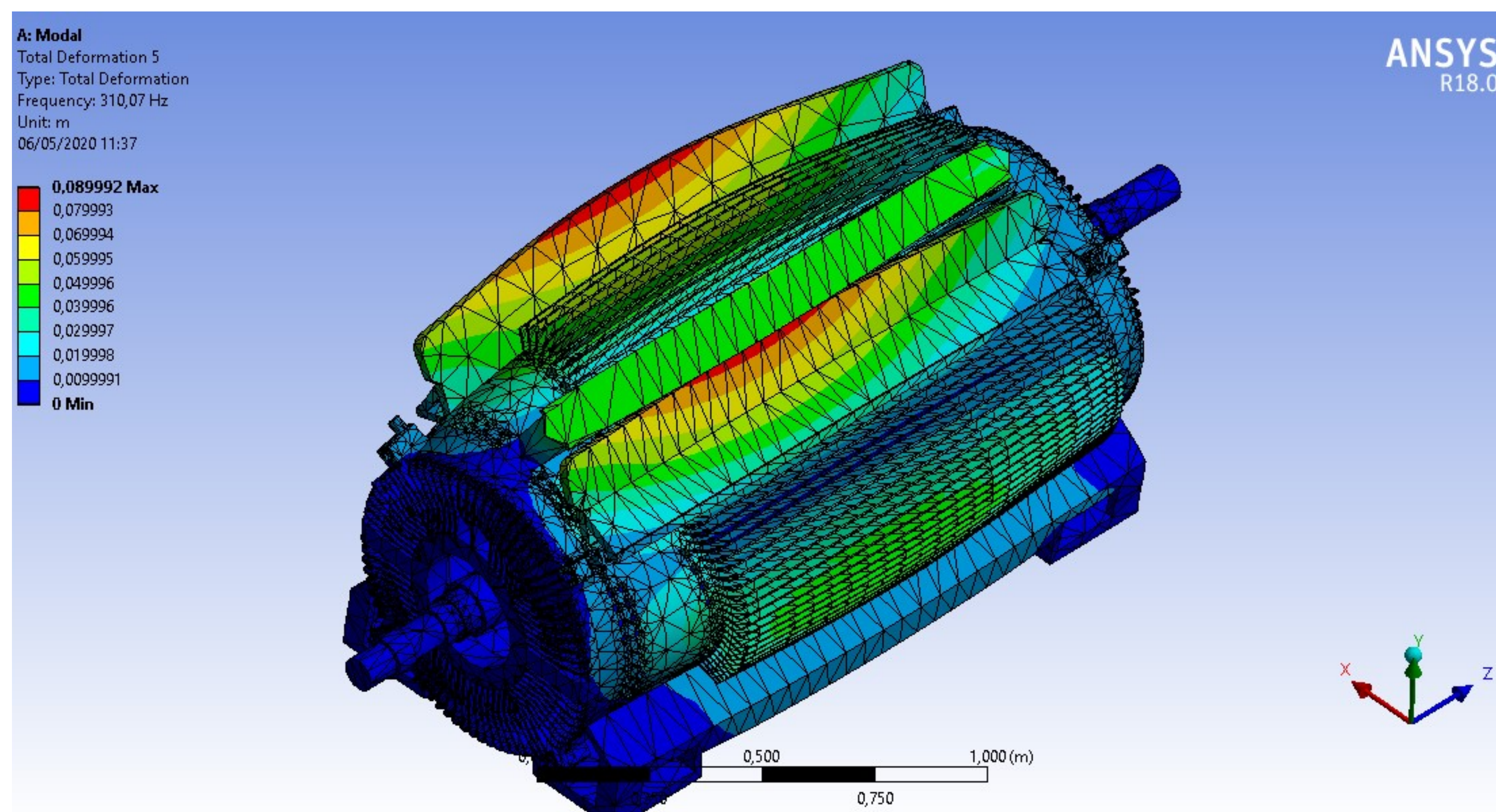
Modo3

3. analizzare i risultati



Modo4

Modo5

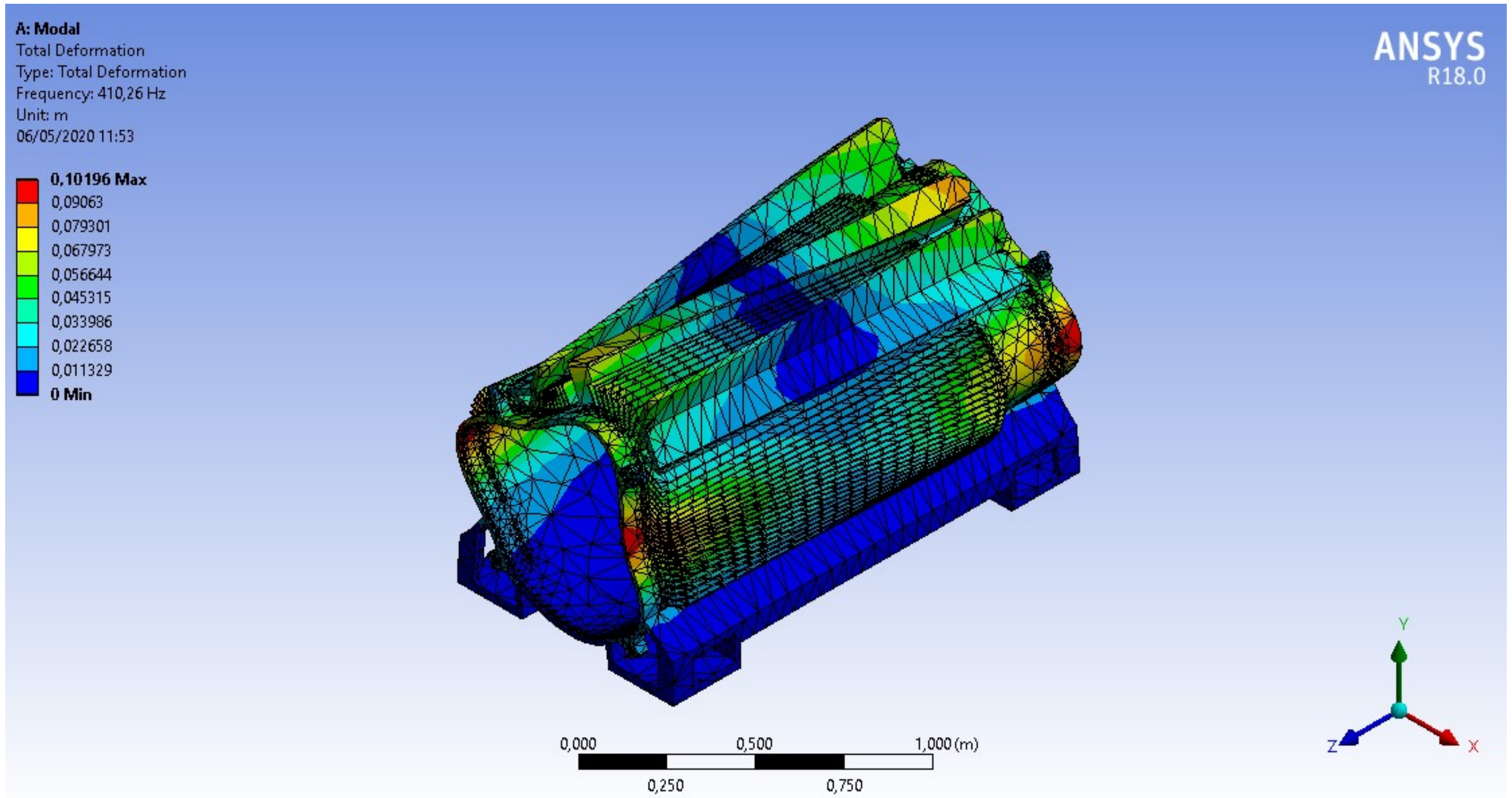


3. analizzare i risultati

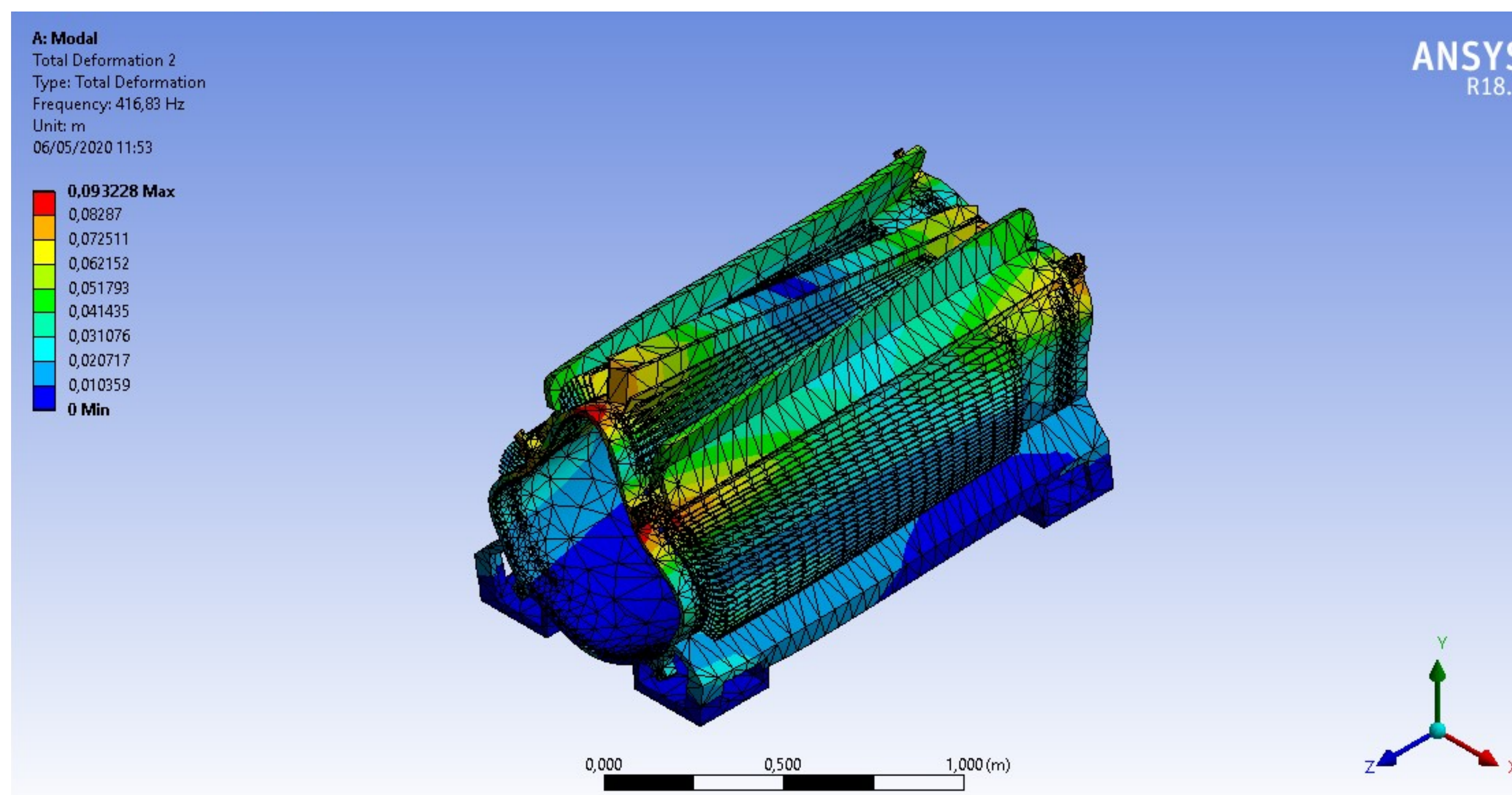
Mode	Frequency [Hz]
1	57,971
2	149,19
3	179,23
4	216,79
5	254,55
6	385,73
7	410,26
8	416,83
9	435,51
10	440,05
11	518,65
12	523,89
13	560,28
14	595,7
15	607,62
16	617,85
17	634,75
18	639,86
19	654,93
20	695,21

Solo carcassa, vincolata alla base

3. analizzare i risultati

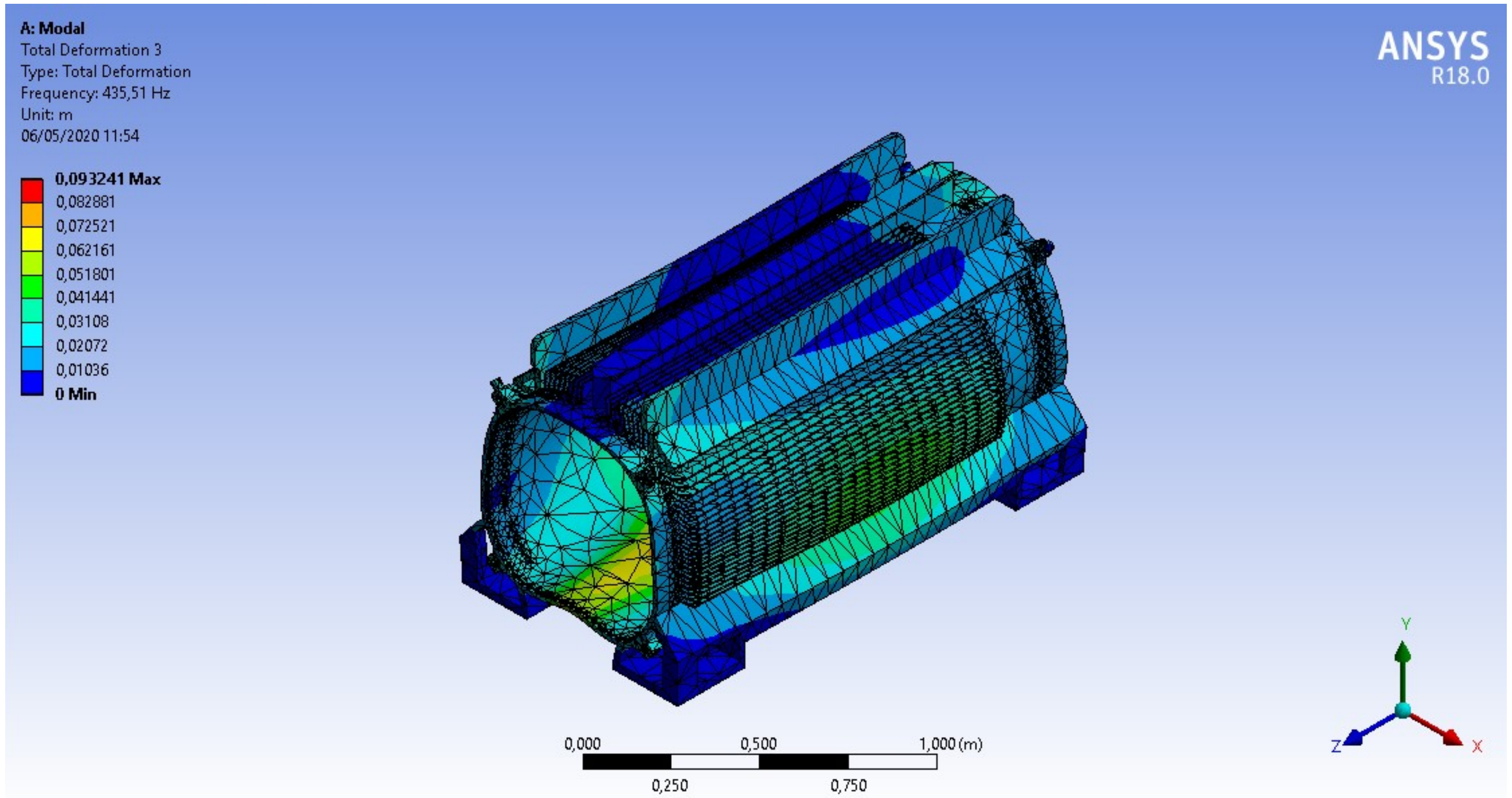


Modo1

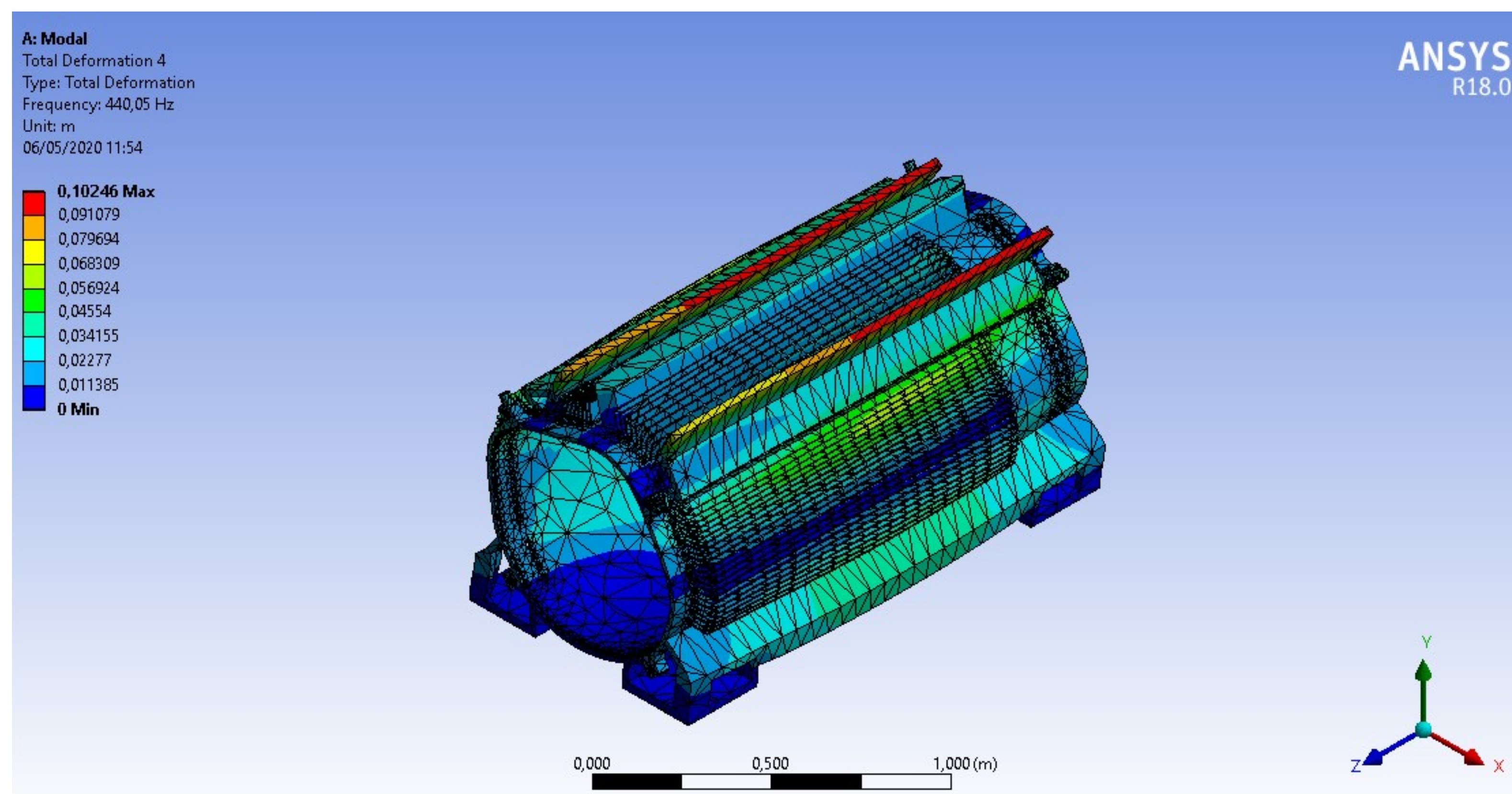


Modo2

3. analizzare i risultati



Modo3



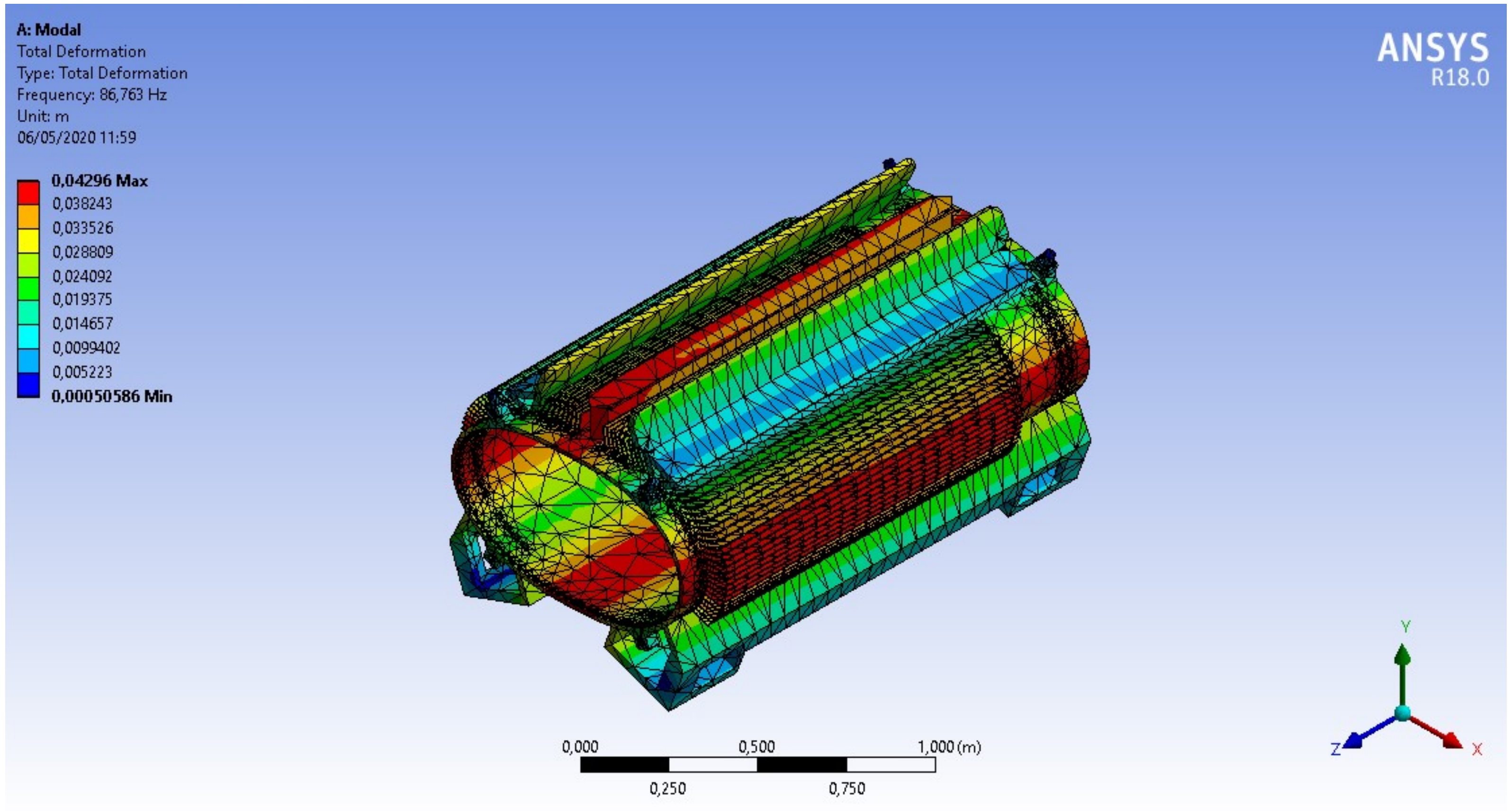
Modo4

3. analizzare i risultati

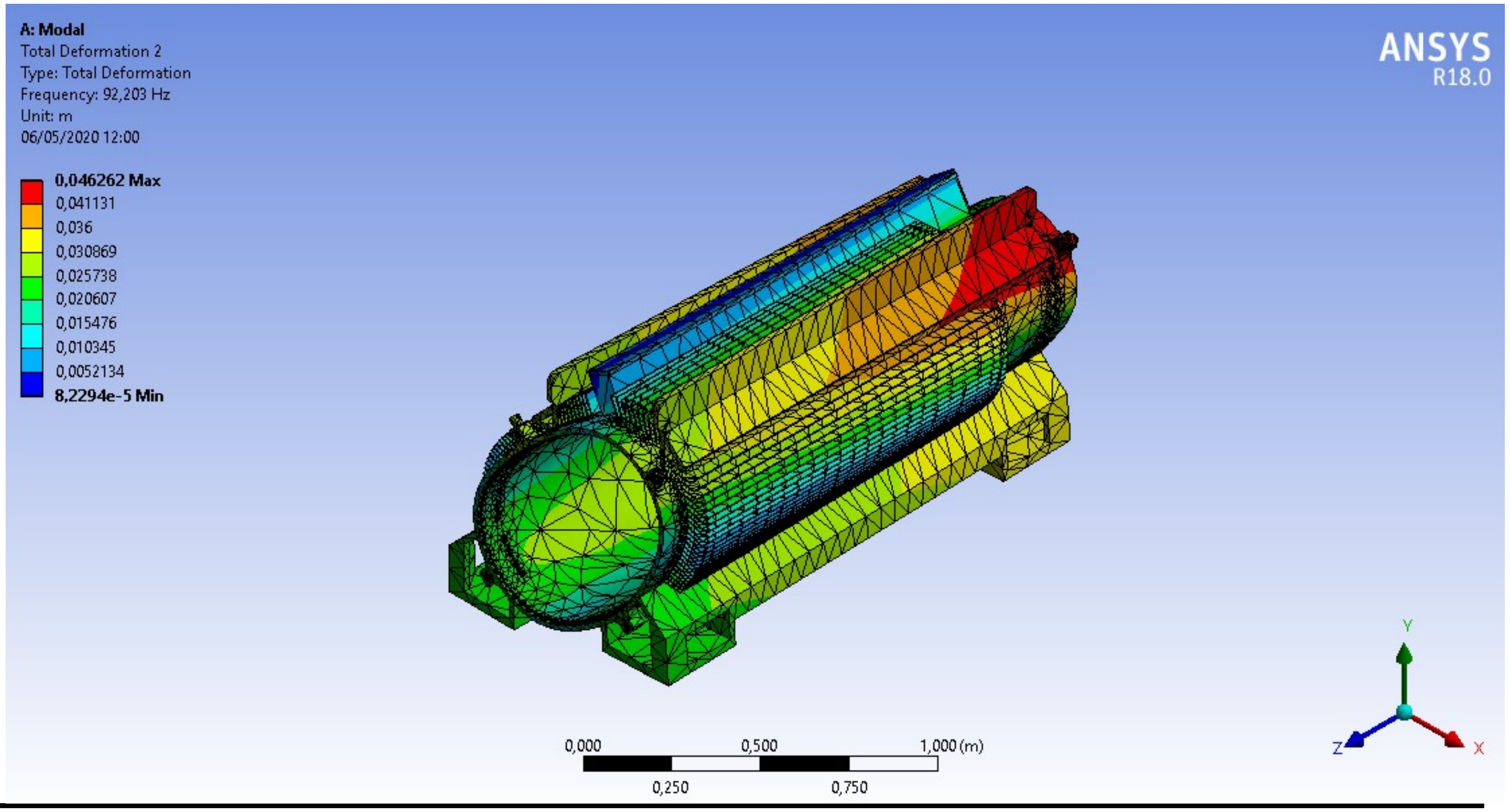
Mode	Frequency [Hz]
1	0
2	0
3	7,6048E-04
4	2,3164E-03
5	3,7939E-03
6	5,0323E-03
7	86,763
8	92,203
9	101,37
10	196
11	241,06
12	258,91
13	319,91
14	391,54
15	400,87
16	517,83
17	541,15
18	568,92
19	585,76
20	599,09

Solo carcassa, free-free

3. analizzare i risultati



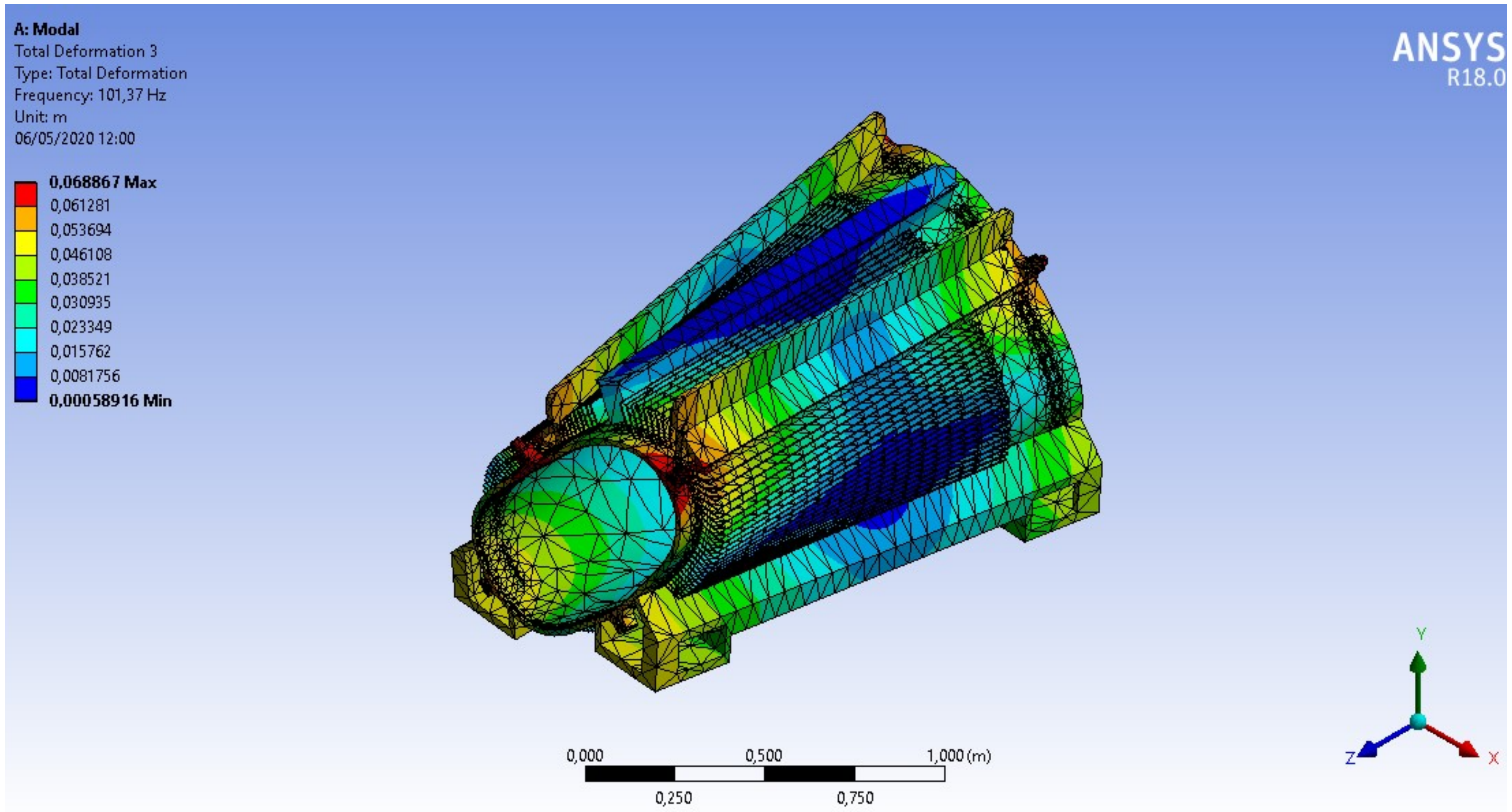
Modo1



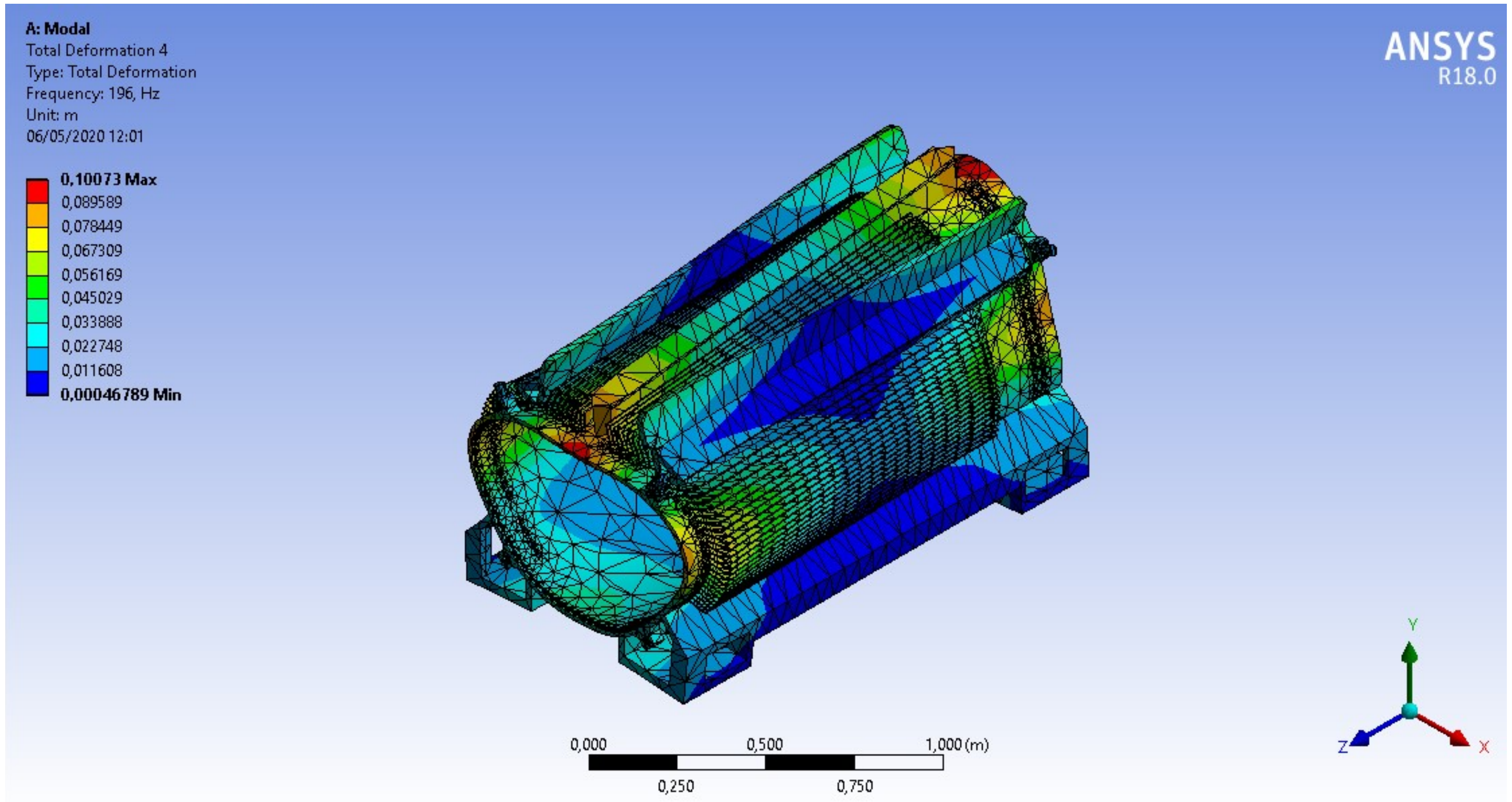
Modo2

Luigi BREGANT
bregant@units.it

3. analizzare i risultati



Modo3



Modo4