

# INTEGRAZIONE IN PIÙ VARIABILI

## SECONDA PARTE

### 4 Proprietà dell'integrale

Molte delle proprietà viste per gli integrali di Riemann per funzioni con dominio contenuto in  $\mathbb{R}$ , continuano a valere per funzioni con dominio contenuto in  $\mathbb{R}^2$ .

**Proposizione 4.1** (Linearità dell'integrale). *Per ogni  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  e  $f, g \in \mathcal{R}(\Omega)$  vale*

$$\int_{\Omega} (\lambda f + \mu g) = \lambda \left( \int_{\Omega} f \right) + \mu \left( \int_{\Omega} g \right).$$

Quindi l'insieme  $\mathcal{R}(\Omega)$ , delle funzioni integrabili secondo Riemann su  $\Omega$ , risulta uno spazio vettoriale e l'applicazione di integrazione  $I : \mathcal{R}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ , definita come  $I(f) = \int_{\Omega} f$ , è un'applicazione lineare appartenente al duale di  $\mathcal{R}(\Omega)$ .

**Proposizione 4.2** (Monotonia dell'integrale). *Siano  $f, g \in \mathcal{R}(\Omega)$  tali che  $f(x) \leq g(x)$  per ogni  $x \in \Omega$ . Allora*

$$\int_{\Omega} f \leq \int_{\Omega} g.$$

**Esercizio 4.3.** *Scrivere la dimostrazione delle Proposizioni 4.1 e 4.2 ispirandosi alle dimostrazioni degli enunciati analoghi visti nel corso di analisi precedente.*

Senza perdere in generalità si può supporre che  $\Omega$  sia un rettangolo. Infatti, per un insieme misurabile  $\Omega$  generico, la tesi si ottiene considerando le estensioni  $\tilde{f}, \tilde{g}$  su un rettangolo  $Q$  contenente  $\Omega$ .

**Teorema 4.4** (Teorema della composta). *Consideriamo una funzione  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f \in \mathcal{R}(\Omega)$ , dove  $\Omega$  è misurabile, e una funzione continua  $F : [\inf_{\Omega} f, \sup_{\Omega} f] \rightarrow \mathbb{R}$ . Allora la funzione  $G = F \circ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  è integrabile su  $\Omega$ , ovvero  $G \in \mathcal{R}(\Omega)$ .*

*Dimostrazione.* Consideriamo un rettangolo  $Q \supset \Omega$  e l'intervallo  $[m, M]$  dove  $m = \inf_{\Omega} f$  e  $M = \sup_{\Omega} f$ . La funzione  $F$  è uniformemente continua su  $[m, M]$ , quindi

$$\exists R > 0 : F([m, M]) \subseteq [-R, R]; \tag{1}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : |s_1 - s_2| < \delta \Rightarrow |F(s_2) - F(s_1)| < \varepsilon. \tag{2}$$

Essendo  $f \in \mathcal{R}(\Omega)$  allora  $\tilde{f} \in \mathcal{R}(Q)$ . Consideriamo la funzione  $\tilde{G}$  estensione a zero della funzione  $G = F \circ f$  su  $Q$ ; mostreremo che  $\tilde{G} \in \mathcal{R}(Q)$ .<sup>1</sup>

Richiamando i valori  $\varepsilon$  e  $\delta$  introdotti precedentemente, valendo  $\tilde{f} \in \mathcal{R}(Q)$  e  $|\partial\Omega| = 0$  ( $\Omega$  è misurabile!) allora esiste una partizione  $D$  di  $Q$  tale che<sup>2</sup>

$$S(D, \tilde{f}) - s(D, \tilde{f}) < \delta\varepsilon, \tag{3}$$

$$S(D, \chi_{\partial\Omega}) < \varepsilon. \tag{4}$$

Per ogni rettangolo  $Q_{kh}$  della partizione  $D$ , abbiamo tre posizioni possibili del rettangolo rispetto all'insieme  $\Omega$ :

$$Q_{kh} \cap \partial\Omega \neq \emptyset, \quad Q_{kh} \subset \bar{\Omega}^c, \quad Q_{kh} \subset \overset{\circ}{\Omega}.$$

Analizziamoli uno alla volta.

$$(a) : \quad Q_{kh} \cap \partial\Omega \neq \emptyset \Rightarrow \sup_{Q_{kh}} \tilde{G} - \inf_{Q_{kh}} \tilde{G} \leq 2R,$$

<sup>1</sup>Attenzione:  $\tilde{G} \neq F \circ \tilde{f}$ !

<sup>2</sup>Per quale motivo posso assumere che la partizione  $D$  soddisfi contemporaneamente entrambe le condizioni? Rispondere a questa domanda per esercizio.

infatti per ogni  $x \in Q_{kh}$ , se  $x \in \Omega$  allora  $\tilde{G}(x) = G(x) = F(f(x)) \in F([m, M]) \subseteq [-R, R]$ , cf. (1), se invece  $x \notin \Omega$  allora  $\tilde{G}(x) = 0$ . In entrambi i casi vale  $\tilde{G}(x) \in [-R, R]$ , da cui la stima sopra.

$$(b) : \quad Q_{kh} \subset \bar{\Omega}^c \Rightarrow \tilde{G} = 0 \text{ su } Q_{kh} \Rightarrow \sup_{Q_{kh}} \tilde{G} - \inf_{Q_{kh}} \tilde{G} = 0 - 0 = 0.$$

Rimane il caso

$$(c) : \quad Q_{kh} \subset \mathring{\Omega}, \quad \text{quindi } G = \tilde{G} \text{ e } f = \tilde{f} \text{ in } Q_{kh},$$

che dividiamo in due sottocasi per ottenere le stime adeguate.

$$(c1) : \quad Q_{kh} \subset \mathring{\Omega} \text{ e vale } M_{kh} - m_{kh} < \delta \Rightarrow \sup_{Q_{kh}} \tilde{G} - \inf_{Q_{kh}} \tilde{G} < \varepsilon,$$

infatti in questo caso, essendo  $M_{kh} - m_{kh} = \sup_{Q_{kh}} f - \inf_{Q_{kh}} f < \delta$  allora per ogni  $x_1, x_2 \in Q_{kh}$  vale  $|f(x_1) - f(x_2)| < \delta$ , quindi abbiamo la stima precedente usando l'uniforme continuità di  $F$ , cf. (2).

$$(c2) : \quad Q_{kh} \subset \mathring{\Omega} \text{ e vale } M_{kh} - m_{kh} \geq \delta \quad \text{perlomeno } \sup_{Q_{kh}} \tilde{G} - \inf_{Q_{kh}} \tilde{G} \leq 2R,$$

in questo caso abbiamo poca fortuna e *ci dobbiamo accontentare* di usare la limitatezza della  $F$ , cf. (1), come già fatto nel caso (a).

Possiamo ora dare una stima del valore  $S(D, \tilde{G}) - s(D, \tilde{G})$  spezzando la somma sui quattro gruppi<sup>3</sup>

$$\begin{aligned} S(D, \tilde{G}) - s(D, \tilde{G}) &= \sum_{k,h} \left( \sup_{Q_{kh}} \tilde{G} - \inf_{Q_{kh}} \tilde{G} \right) |Q_{kh}| \quad (\text{spezziamo la somma sui casi}) \\ &= \sum_{(a)} \left( \sup_{Q_{kh}} \tilde{G} - \inf_{Q_{kh}} \tilde{G} \right) |Q_{kh}| + \sum_{(b)} \left( \sup_{Q_{kh}} \tilde{G} - \inf_{Q_{kh}} \tilde{G} \right) |Q_{kh}| \\ &\quad + \sum_{(c1)} \left( \sup_{Q_{kh}} \tilde{G} - \inf_{Q_{kh}} \tilde{G} \right) |Q_{kh}| + \sum_{(c2)} \left( \sup_{Q_{kh}} \tilde{G} - \inf_{Q_{kh}} \tilde{G} \right) |Q_{kh}| \\ &\leq 2R \sum_{(a)} |Q_{kh}| + 0 + \varepsilon \sum_{(c1)} |Q_{kh}| + 2R \sum_{(c2)} |Q_{kh}| \\ &\leq 2R \sum_{(a)} |Q_{kh}| + 0 + \varepsilon |Q| + 2R \sum_{(c2)} |Q_{kh}| \end{aligned}$$

A questo punto il nostro obiettivo è mostrare che l'area totale dei rettangolini dei casi (a) e (c2) è *sufficientemente piccola*. Per quanto riguarda il caso (a) troviamo, usando (4),

$$\sum_{(a)} |Q_{kh}| = S(D, \chi_{\partial\Omega}) < \varepsilon.$$

Per quanto riguarda il caso (c2) vale

$$\delta \sum_{(c2)} |Q_{kh}| \leq \sum_{(c2)} (M_{kh} - m_{kh}) |Q_{kh}| \leq \sum_{k,h} \left( \sup_{Q_{kh}} \tilde{f} - \inf_{Q_{kh}} \tilde{f} \right) |Q_{kh}| = S(D, \tilde{f}) - s(D, \tilde{f}) \leq \delta \varepsilon,$$

da cui possiamo semplificare il  $\delta$  trovando  $\sum_{(c2)} |Q_{kh}| \leq \varepsilon$ . Riprendendo il calcolo precedente, troviamo

$$\begin{aligned} S(D, \tilde{G}) - s(D, \tilde{G}) &\leq \dots \leq 2R \sum_{(a)} |Q_{kh}| + 0 + \varepsilon |Q| + 2R \sum_{(c2)} |Q_{kh}| \\ &\leq 2R\varepsilon + 0 + \varepsilon |Q| + 2R\varepsilon, \end{aligned}$$

da cui la tesi. □

<sup>3</sup>La notazione  $\sum_{(*)}$  significa: somma sui rettangoli  $Q_{kh}$  che soddisfano (\*).

**Corollario 4.5.** Sia  $\Omega$  misurabile,  $f, g \in \mathcal{R}(\Omega)$  allora

- $|f| \in \mathcal{R}(\Omega)$ ,
- $f^2 \in \mathcal{R}(\Omega)$ ,
- $\max(f, g) \in \mathcal{R}(\Omega)$  e  $\min(f, g) \in \mathcal{R}(\Omega)$ ,
- quindi  $f^+ = \max(f, 0) \in \mathcal{R}(\Omega)$  e  $f^- = \max(-f, 0) \in \mathcal{R}(\Omega)$ .
- $fg \in \mathcal{R}(\Omega)$ .

*Dimostrazione.* Per i primi due punti usiamo il teorema precedente rispettivamente nel caso  $F(y) = |y|$  e  $F(y) = y^2$ , quindi ricordando che

$$\max(f, g) = \frac{1}{2} [(f + g) + |f - g|], \quad \min(f, g) = \frac{1}{2} [(f + g) - |f - g|], \quad fg = \frac{1}{2} [(f + g)^2 - f^2 - g^2].$$

le altre seguono facilmente. □

**Teorema 4.6** (Teorema della media integrale). Sia  $\Omega$  misurabile limitato, con  $|\Omega| \neq 0$ , e una funzione  $f \in \mathcal{R}(\Omega)$  con  $m = \inf_{\Omega} f$  e  $M = \sup_{\Omega} f$ . Allora

$$m \leq \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} f \leq M.$$

*Dimostrazione.* Preso un rettangolo  $Q \supset \Omega$ , valendo  $m\chi_{\Omega} \leq \tilde{f} \leq M\chi_{\Omega}$ , segue dalla monotonia dell'integrale che  $m|\Omega| \leq \int_{\Omega} f \leq M|\Omega|$ , da cui la tesi. □

**Corollario 4.7.** Sia  $\Omega$  misurabile limitato, con  $|\Omega| = 0$ , e una funzione  $f$  limitata. Allora  $f \in \mathcal{R}(\Omega)$  e  $\int_{\Omega} f = 0$ .

**Corollario 4.8.** Sia  $\bar{\Omega}$  insieme chiuso misurabile limitato, con  $|\Omega| \neq 0$ , e una funzione  $f : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  continua. Allora esiste  $\xi \in \bar{\Omega}$  tale che

$$f(\xi) = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} f.$$

**Proposizione 4.9** (Additività rispetto al dominio di integrazione). Siano  $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{R}^2$  insiemi misurabili limitati tali che  $|\Omega_1 \cap \Omega_2| = 0$ , e definiamo  $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ . Sia  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  limitata.

Se  $f|_{\Omega_1} \in \mathcal{R}(\Omega_1)$  e  $f|_{\Omega_2} \in \mathcal{R}(\Omega_2)$ , allora  $f \in \mathcal{R}(\Omega)$  e vale

$$\int_{\Omega} f = \int_{\Omega_1} f + \int_{\Omega_2} f.$$

*Dimostrazione.* Consideriamo  $Q \supset \Omega$  e l'estensione  $\tilde{f}$  di  $f$ , allora

$$\tilde{f} = \tilde{f} (\chi_{\Omega_1} + \chi_{\Omega_2} - \chi_{\Omega_1 \cap \Omega_2}) = \tilde{f} \chi_{\Omega_1} + \tilde{f} \chi_{\Omega_2} - \tilde{f} \chi_{\Omega_1 \cap \Omega_2}.$$

Osserviamo che il primo e il secondo addendo sono funzioni di  $\mathcal{R}(Q)$  per ipotesi valendo

$$\tilde{f} \chi_{\Omega_1} = \widetilde{f|_{\Omega_1}} \quad \text{e} \quad \tilde{f} \chi_{\Omega_2} = \widetilde{f|_{\Omega_2}},$$

mentre il terzo addendo appartiene a  $\mathcal{R}(Q)$ , usando il Corollario 4.7. Sempre dal Corollario 4.7 e usando la linearità dell'integrale abbiamo

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f &= \int_Q \tilde{f} = \int_Q \tilde{f} \chi_{\Omega_1} + \int_Q \tilde{f} \chi_{\Omega_2} - \int_Q \tilde{f} \chi_{\Omega_1 \cap \Omega_2} \\ &= \int_{\Omega_1} f + \int_{\Omega_2} f - \int_{\Omega_1 \cap \Omega_2} f \end{aligned}$$

concludendo la dimostrazione. □

**Proposizione 4.10.** Dati due insiemi misurabili  $\Omega_1$  e  $\Omega$  tali che  $\Omega_1 \subset \Omega$ , se  $f \in \mathcal{R}(\Omega)$  allora  $f \in \mathcal{R}(\Omega_1)$ .

*Dimostrazione.* Consideriamo  $Q \supset \Omega$ , essendo  $\Omega_1$  misurabile, allora  $\chi_{\Omega_1} \in \mathcal{R}(Q)$ . Sappiamo che  $\widetilde{f} \in \mathcal{R}(Q)$ , quindi usando che il prodotto di funzioni integrabili è integrabile, cf. Corollario 4.5, troviamo che  $\widetilde{f}|_{\Omega_1} = \widetilde{f}\chi_{\Omega_1} \in \mathcal{R}(Q)$  cosicché  $f \in \mathcal{R}(\Omega_1)$ .  $\square$

**Proposizione 4.11** (Proprietà degli insiemi misurabili). *Siano  $\Omega_1$  e  $\Omega_2$  due insiemi misurabili limitati. Allora  $\Omega_1 \cap \Omega_2$  e  $\Omega_1 \cup \Omega_2$  sono misurabili. Inoltre, se  $\Omega_1 \subseteq \Omega_2$  allora  $\Omega_2 \setminus \Omega_1$  è misurabile.*

*Dimostrazione.* Preso un rettangolo  $Q \supset \Omega_1 \cup \Omega_2$ , le seguenti identità

$$\begin{aligned}\chi_{\Omega_1 \cap \Omega_2} &= \chi_{\Omega_1} \cdot \chi_{\Omega_2}, \\ \chi_{\Omega_1 \cup \Omega_2} &= \chi_{\Omega_1} + \chi_{\Omega_2} - \chi_{\Omega_1 \cap \Omega_2}, \\ \chi_{\Omega_2 \setminus \Omega_1} &= \chi_{\Omega_2} - \chi_{\Omega_1}, \quad (\text{questa vale se } \Omega_1 \subseteq \Omega_2)\end{aligned}$$

danno facilmente la tesi.  $\square$

## 5 Integrazione in $N \geq 3$ dimensioni

La teoria vista finora può essere riscritta nel caso di funzioni  $f : \Omega \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  con  $N \geq 3$ . Dobbiamo solo adattare alcune definizioni. Il "rettangolo"  $Q$  è definito ora come

$$Q = [a^1, b^1] \times [a^2, b^2] \times \cdots \times [a^N, b^N] = \prod_{i=1}^N [a^i, b^i]$$

e per  $N = 3$  è a tutti gli effetti un parallelepipedo. La partizione  $D$  sarà individuata come  $D = D_1 \times D_2 \times \cdots \times D_N$  dove

$$D_i = \{x_0^i, x_1^i, x_2^i, \dots, x_{r_i}^i\}, \quad \text{con} \quad a^i = x_0^i < x_1^i < x_2^i < \cdots < x_{r_i}^i = b^i.$$

è una partizione del corrispondente intervallo  $[a^i, b^i]$ . Ogni partizione  $D$  suddivide  $Q$  in piccoli "rettangolini" che denoteremo con

$$Q_{k_1, \dots, k_N} = I_{k_1} \times \cdots \times I_{k_N} = [x_{k_1-1}^1, x_{k_1}^1] \times \cdots \times [x_{k_N-1}^N, x_{k_N}^N],$$

con misura

$$|Q_{k_1, \dots, k_N}| = (x_{k_1}^1 - x_{k_1-1}^1) \cdots (x_{k_N}^N - x_{k_N-1}^N)$$

dove ogni indice  $k_i$  varia nell'insieme  $\{1, \dots, r_i\}$ .

Le somme superiori e inferiori quindi sono definite come

$$\begin{aligned}S(D, f) &= \sum_{k_1, \dots, k_N} M_{k_1, \dots, k_N} |Q_{k_1, \dots, k_N}| = \sum_{k_1, \dots, k_N} \left( \sup_{Q_{k_1, \dots, k_N}} f \right) |Q_{k_1, \dots, k_N}|, \\ s(D, f) &= \sum_{k_1, \dots, k_N} m_{k_1, \dots, k_N} |Q_{k_1, \dots, k_N}| = \sum_{k_1, \dots, k_N} \left( \inf_{Q_{k_1, \dots, k_N}} f \right) |Q_{k_1, \dots, k_N}|.\end{aligned}$$

**Definizione 5.1.** *Dato un rettangolo  $Q \subset \mathbb{R}^N$  e una funzione  $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$  limitata, essa si dice integrabile secondo Riemann su  $Q$  se vale*

$$\sup_D s(D, f) = \inf_D S(D, f)$$

e tale valore è detto **integrale di Riemann di  $f$  su  $Q$** .

Le notazioni in questo caso sono:

$$\int_Q f, \quad \int_Q f(x) dx, \quad \int_Q f(x_1, \dots, x_N) dx_1 \cdots dx_N,$$

in particolare, se  $N = 3$ ,

$$\iiint_Q f(x, y, z) dx dy dz.$$

**Definizione 5.2.** Consideriamo  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  limitato e una funzione  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  limitata. Sia  $Q \supset \Omega$  e definiamo l'estensione a zero di  $f$  come

$$\tilde{f} : Q \rightarrow \mathbb{R}, \quad \tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in \Omega, \\ 0 & \text{se } x \notin \Omega. \end{cases}$$

Diremo che  $f$  è **integrabile secondo Riemann su  $\Omega$**  se la sua estensione  $\tilde{f}$  è integrabile secondo Riemann su  $Q$ , ponendo

$$\int_{\Omega} f(x) dx = \int_Q \tilde{f}(x) dx.$$

**Definizione 5.3** (Insiemi misurabili). Sia  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  limitato contenuto in un rettangolo  $Q$ . Diremo che  $\Omega$  è **misurabile secondo Peano-Jordan** se la funzione caratteristica di  $\Omega$

$$\chi_{\Omega} : Q \rightarrow \mathbb{R}, \quad \chi_{\Omega} = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \Omega \\ 0 & \text{se } x \notin \Omega \end{cases}$$

è integrabile secondo Riemann su  $Q$ . Definiamo **misura di  $\Omega$**  il valore

$$|\Omega| = \int_{\Omega} 1 dx = \int_Q \chi_{\Omega} dx.$$

Nel caso  $N = 3$ , la misura di  $\Omega$ , è il suo volume, spesso denotato con  $\text{Vol}(\Omega)$ .

**Esempio 5.4.** Se  $E$  è un sottoinsieme limitato di un iperpiano in  $\mathbb{R}^N$  allora  $|E| = 0$ . Se  $N = 3$ , in particolare troviamo che le facce di un poliedro hanno misura nulla.

Per funzioni  $f : \Omega \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  continuano a valere i teoremi e i risultati visti finora. In particolare **le funzioni limitate generalmente continue definite su insiemi misurabili risultano integrabili secondo Riemann**. Alcuni risultati meritano tuttavia una "riscrittura".

**Osservazione 5.5.** Sia  $N \geq 3$ ,  $\Omega \subset \mathbb{R}^{N-1}$  misurabile e una funzione  $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g \in \mathcal{R}(\Omega)$ , allora il suo grafico

$$G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R} \mid x \in \Omega, y = g(x)\} \subset \mathbb{R}^N$$

ha misura nulla. Inoltre, se  $g(x) \geq 0$  per ogni  $x \in \Omega$ , allora l'insieme

$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R} \mid x \in \Omega, 0 \leq y \leq g(x)\} \subset \mathbb{R}^N$$

è misurabile con misura

$$|T| = \int_{\Omega} g(x) dx.$$

Riscriviamo ora il teorema di riduzione per  $N \geq 3$ . A questo scopo consideriamo una decomposizione dello spazio  $\mathbb{R}^N$  come segue

$$\mathbb{R}^N = \mathbb{R}^K \times \mathbb{R}^{N-K}, \quad x = (x_1, \dots, x_N) = (\xi, \eta), \quad \xi = (x_1, \dots, x_K), \quad \eta = (x_{K+1}, \dots, x_N).$$

Analogamente possiamo decomporre un generico rettangolo  $Q$ :

$$Q = \prod_{i=1}^N [a^i, b^i] = Q_{\xi} \times Q_{\eta} = \prod_{i=1}^K [a^i, b^i] \times \prod_{i=K+1}^N [a^i, b^i].$$

**Teorema 5.6** (Teorema di Riduzione). Sia  $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f \in \mathcal{R}(Q)$ . Data la decomposizione  $Q = Q_{\xi} \times Q_{\eta}$  come sopra, supponiamo che per ogni  $\xi \in Q_{\xi}$  esista l'integrale  $F(\xi) = \int_{Q_{\eta}} f(\xi, \eta) d\eta$ , allora  $F \in \mathcal{R}(Q_{\xi})$  e vale

$$\int_Q f(x) dx = \int_{Q_{\xi} \times Q_{\eta}} f(\xi, \eta) d\xi d\eta = \int_{Q_{\xi}} \left( \int_{Q_{\eta}} f(\xi, \eta) d\eta \right) d\xi.$$

Scrivere per esercizio la dimostrazione, adattando quella del corrispondente teorema per  $N = 2$ .

**Osservazione 5.7.** Il precedente teorema vale anche rimescolando le variabili.

In particolare, data  $f$  continua, se prendiamo il caso  $K = N - 1$  allora  $Q_\eta$  è un segmento. In questo caso il teorema precedente ci dice che possiamo integrare una variabile alla volta, eliminandole via via.

**Esempio 5.8.** Dato  $Q = [1, 2] \times [0, 1] \times [0, 2]$ , sia  $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$  definita come  $f(x) = \sqrt{x + y + z}$  calcoliamo  $\iiint_Q f$ .

$$\begin{aligned} \iiint_Q f(x, y, z) \, dx dy dz &= \int_{[1,2] \times [0,1]} \left( \int_0^2 (x + y + z)^{1/2} \, dz \right) \, dx dy \\ &= \int_{[1,2] \times [0,1]} \left[ \frac{2}{3} \cdot (x + y + z)^{3/2} \right]_{z=0}^{z=2} \, dx dy \\ &= \frac{2}{3} \int_1^2 \left( \int_0^1 (x + y + 2)^{3/2} - (x + y)^{3/2} \, dy \right) \, dx \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5} \int_1^2 \left[ (x + y + 2)^{5/2} - (x + y)^{5/2} \right]_{y=0}^{y=1} \, dx \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5} \int_1^2 (x + 3)^{5/2} - (x + 1)^{5/2} - (x + 2)^{5/2} + (x)^{5/2} \, dx \\ &= \frac{8}{105} \left( 5^{7/2} - 3^{7/2} - 4^{7/2} + 2^{7/2} - 4^{7/2} + 2^{7/2} + 3^{7/2} - 1^{7/2} \right) = \dots \end{aligned}$$

Vediamo ora come si applica il teorema di riduzione nel caso  $N = 3$ . Nella seguente osservazione possono essere scambiati i ruoli delle variabili  $x, y, z$  come nel teorema precedente.

**Osservazione 5.9** (Strategie in  $\mathbb{R}^3$ ). Consideriamo il quadrato  $Q = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$ , e supponiamo per semplicità  $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$  continua. Mediante la scelta  $K = 1$  e  $K = 2$  nel teorema di riduzione troviamo

$$\begin{aligned} \iiint_Q f(x, y, z) \, dx dy dz &= \int_{a_1}^{b_1} \left( \iint_{[a_2, b_2] \times [a_3, b_3]} f(x, y, z) \, dy dz \right) \, dx && \text{integrazione per strati.} \\ \iiint_Q f(x, y, z) \, dx dy dz &= \iint_{[a_1, b_1] \times [a_2, b_2]} \left( \int_{a_3}^{b_3} f(x, y, z) \, dz \right) \, dx dy && \text{integrazione per fili,} \end{aligned}$$

Vediamo ora come si adatta nel caso  $N \geq 3$  la definizione di dominio normale rispetto ad un asse. Per semplicità daremo la definizione di dominio normale. A questo scopo, scriveremo ogni elemento  $x \in \mathbb{R}^N$  come  $x = (x', x_N) \in \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R}$ .

**Definizione 5.10.** Siano  $\Omega \subset \mathbb{R}^{N-1}$  un insieme misurabile e due funzioni  $g_1, g_2 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , tali che  $g_1, g_2 \in \mathcal{R}(\Omega)$  e  $g_1(x') \leq g_2(x')$  per ogni  $x' \in \Omega$ . L'insieme

$$\mathcal{E} = \{x = (x', x_N) \in \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R} \mid x' \in \Omega, g_1(x') \leq x_N \leq g_2(x')\} \subset \mathbb{R}^N \quad (5)$$

si dice **dominio normale rispetto alle variabili  $x'$**  (o **regione  $x_N$ -semplice**).

**Proposizione 5.11** (Misura di un dominio normale). L'insieme  $\mathcal{E}$  in (5) è misurabile. In particolare, scegliendo  $Q \supset \Omega$  e  $[m, M]$  tale che  $m \leq g_1(x') \leq g_2(x') \leq M$  per ogni  $x' \in \Omega$  cosicché  $Q \times [m, M] \supset \mathcal{E}$ , integrando per fili, troviamo

$$\begin{aligned} |\mathcal{E}| &= \iint_{Q \times [m, M]} \chi_{\mathcal{E}}(x', x_N) \, dx' \, dx_N = \int_Q \left( \int_m^M \chi_{\mathcal{E}}(x', x_N) \, dx_N \right) \, dx' \\ &= \int_\Omega \left( \int_m^M \chi_{\mathcal{E}}(x', x_N) \, dx_N \right) \, dx' + \int_{Q \setminus \Omega} \left( \int_m^M \chi_{\mathcal{E}}(x', x_N) \, dx_N \right) \, dx' \\ &= \int_\Omega \left( \int_m^{g_1(x')} 0 \, dx_N + \int_{g_1(x')}^{g_2(x')} 1 \, dx_N + \int_{g_2(x')}^M 0 \, dx_N \right) \, dx' \\ &= \int_\Omega g_2(x') - g_1(x') \, dx'. \end{aligned}$$

**Teorema 5.12** (Integrazione su domini normali). Dato un dominio normale  $\mathcal{E}$  definito come in (5). Supponiamo in più che  $\Omega$  sia chiuso (quindi compatto), che le funzioni  $g_1, g_2 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  e  $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}$  siano continue allora  $f \in \mathcal{R}(\mathcal{E})$  e vale

$$\int_{\mathcal{E}} f = \int_{\mathcal{E}} f(x', x_N) dx' dx_N = \int_{\Omega} \left( \int_{g_1(x')}^{g_2(x')} f(x', x_N) dx_N \right) dx'.$$

**Osservazione 5.13.** La precedente osservazione resta valida cambiando leggermente le ipotesi su  $f$ . Possiamo chiedere che  $f$  sia limitata e continua su

$$\mathring{\mathcal{E}} = \{x = (x', x_N) \in \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R} \mid x' \in \mathring{\Omega}, g_1(x') < x_N < g_2(x')\} \subset \mathcal{E}$$

ottenendo lo stesso risultato.

**Osservazione 5.14** (Volume dei solidi di rotazione). Sia  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  e  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua non negativa. Definiamo l'insieme

$$A = \{(y, z) \in \mathbb{R}^2 \mid z \in [a, b], 0 \leq y \leq \varphi(z)\}.$$

Consideriamo l'insieme  $T$  che otteniamo ruotando  $A$  attorno all'asse  $z$ , ovvero

$$T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \in [a, b], \sqrt{x^2 + y^2} \leq \varphi(z)\},$$

detto **solido di rotazione di profilo**  $\varphi$ . L'insieme  $T$  è misurabile e, integrando per strati abbiamo, dato  $Q = [a, b] \times \tilde{Q} \supset T$ ,

$$\begin{aligned} |T| &= \int_Q \chi_T(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b \left( \int_{\tilde{Q}} \chi_T(x, y, z) dx dy \right) dz \\ &= \int_a^b \left( \int_{T_z} 1 dx dy \right) dz \\ &= \int_a^b \text{Area}(T_z) dz = \pi \int_a^b (\varphi(z))^2 dz \end{aligned}$$

dove  $T_z = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, y, z) \in T\} \subset \mathbb{R}^2$ .

**Risorsa internet:** <https://www.geogebra.org/m/YVembngS> In questa pagina internet, inserendo due funzioni  $f$  e  $g$  potete visualizzare un solido di rotazione avente due profili: il bordo esterno è individuato dalla funzione  $f$ , il bordo interno dalla funzione  $g$ . Attenzione: le notazioni non sono le stesse adottate qui sopra.

**Osservazione 5.15** (Principio di Cavalieri). Definiamo un solido come un insieme limitato  $T \subset \mathbb{R}^3$  tale che le sezioni orizzontali  $T \cap \{z = \bar{z}\}$  siano misurabili come oggetti bidimensionali, ovvero tale che l'insieme

$$S_{\bar{z}} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, y, \bar{z}) \in T\} \subset \mathbb{R}^2$$

sia misurabile per ogni  $\bar{z} \in \mathbb{R}$ .

Siano  $T_1, T_2$  due solidi misurabili in  $\mathbb{R}^3$  tali che

$$\text{Area}(T_1 \cap \{z = \bar{z}\}) = \text{Area}(T_2 \cap \{z = \bar{z}\})$$

per ogni  $\bar{z}$ , allora  $\text{Vol}(T_1) = \text{Vol}(T_2)$ .

**Esempio 5.16.** Calcoliamo la formula per il volume del cono  $T$  di raggio  $r$  e altezza  $h$ . La sezione  $A$  è individuata dalla retta  $z = h(1 - \frac{y}{r})$ , da cui, isolando la variabile  $y$ , ricaviamo  $y = \varphi(z) = r(1 - \frac{z}{h})$ . Quindi

$$\text{Vol}(T) = \pi \int_0^h r^2 \left(1 - \frac{z}{h}\right)^2 dz = \pi h \frac{r^2}{3} \left[ -\left(1 - \frac{z}{h}\right)^3 \right]_0^h = \frac{1}{3} \pi r^2 h.$$

**Esercizio 5.17.** Calcolare il volume del cilindro di raggio  $r$  e altezza  $h$  e della sfera di raggio  $r$ .

**Esempio 5.18.** Calcoliamo il volume di

$$T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \in [0, 1], x^2 + y^2 \leq e^{-2z}\}.$$

Esso è un solido di rotazione avente profilo  $\varphi(z) = e^{-z}$ , quindi

$$\text{Vol}(T) = \pi \int_0^1 e^{-2z} dz = \pi \left[ -\frac{1}{2} e^{-2z} \right]_0^1 = \frac{\pi}{2}(1 - e^{-2}).$$

**Definizione 5.19** (Baricentro e momento d'inerzia). Consideriamo una regione  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  misurabile. Sia  $\mu \in \mathcal{R}(\Omega)$  positiva (la densità di massa), definiamo la **massa** totale del corpo  $\Omega$  come  $m = \int_{\Omega} \mu(x) dx$ .

Definiamo il **baricentro**<sup>4</sup> di  $\Omega$  come il punto  $G = (x_1^G, \dots, x_N^G) \in \mathbb{R}^N$  tale che

$$x_i^G = \frac{1}{m} \int_{\Omega} x_i \mu(x) dx.$$

Nel caso in cui consideriamo  $\mu$  costante, viene detto **centroide**.

Definiamo il **momento d'inerzia** rispetto ad una retta  $r$  (o ad un punto  $P$ ) come

$$I = \int_{\Omega} (d(x))^2 \mu(x) dx,$$

dove  $d(x) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  è la distanza tra un punto  $x \in \Omega$  e la retta  $r$  (o il punto  $P$ ). In particolare, per  $N = 3$ , scegliendo come retta l'asse  $z$  abbiamo il momento d'inerzia rispetto all'asse  $z$ :

$$I_z = \int_{\Omega} (x^2 + y^2) \mu(x, y, z) dx dy dz.$$

Scegliendo invece  $P = (0, 0, 0)$  troviamo

$$I_P = \int_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) \mu(x, y, z) dx dy dz.$$

**Esempio 5.20.** Nel caso  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ , il centroide è  $G = (x_G, y_G)$ , dove

$$x_G = \frac{1}{|\Omega|} \iint_{\Omega} x dx dy \quad e \quad y_G = \frac{1}{|\Omega|} \iint_{\Omega} y dx dy.$$

In questo caso infatti, essendo  $\mu = 1$  troviamo  $m = |\Omega|$ . Nel caso di densità costante  $\mu = 1$ , i momenti d'inerzia rispetto all'asse  $x$  e  $y$  e rispetto all'origine risultano

$$\begin{aligned} I_x &= \iint_{\Omega} y^2 dx dy, \\ I_y &= \iint_{\Omega} x^2 dx dy, \\ I_O &= \iint_{\Omega} (x^2 + y^2) dx dy \end{aligned}$$

**Esercizio 5.21.** Trovare la posizione del centroide di un triangolo equilatero.

Trovare il centroide di un cono con diametro e altezza di ugual lunghezza. Trovare il momento d'inerzia rispetto all'asse  $z$  della sfera di raggio  $R$  centrata nell'origine, del cilindro di raggio  $R$  e altezza  $h$ .

**Esercizio 5.22.** Calcolare il baricentro dei solidi di rotazione aventi densità di massa costante ottenuti mediante una rotazione completa attorno all'asse  $z$  dei seguenti sottoinsiemi del piano  $y, z$ :  $E_1 = B_1((2, 0)) \cup B_1((6, 0))$  e  $E_2 = B_1((1, 1)) \cup B_1((3, 3))$  e confrontare il risultato ottenuto (specialmente per quanto riguarda il valore  $z_G$ ) con le coordinate del baricentro dei corpi planari  $E_1, E_2$ .

<sup>4</sup>Per essere più rigorosi dal punto di vista fisico, questa è la definizione del centro di massa, il caso particolare della definizione di baricentro in presenza della sola forza peso  $P = mg$ .



## 5.1 Il cambio di variabili negli integrali

**Definizione 5.23.** Siano  $U, V \subset \mathbb{R}^N$  due aperti, la funzione  $T : U \rightarrow V$  si dice  $C^1$ -diffeomorfismo se essa è biiettiva, di classe  $C^1$  e ha inversa  $T^{-1}$  di classe  $C^1$ .

**Osservazione 5.24.** Se  $T$  è  $C^1$ -diffeomorfismo allora  $\det J_T(y) \neq 0$  per ogni  $y \in U$ . Infatti  $\text{Id} = T^{-1} \circ T$  da cui, usando il teorema della derivata della composta,  $I_{\mathbb{R}^N} = J_{T^{-1}}(T(y)) \cdot J_T(y)$ , quindi  $J_{T^{-1}}(T(y)) = [J_T(y)]^{-1}$ .

**Osservazione 5.25.** Sia  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  aperto, sia  $T : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$  di classe  $C^1$  iniettiva, se per ogni  $y \in \Omega$ ,  $\det J_T(y) \neq 0$  allora, ricordando il teorema di inversione locale, abbiamo che  $T(\Omega)$  è aperto e  $T : \Omega \rightarrow T(\Omega)$  è  $C^1$ -diffeomorfismo.

Ricordiamo ora la formula del teorema del cambio di variabili visto per funzioni di variabile reale, dove usualmente abbiamo  $a < b$ :

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f(g(y)) g'(y) dy.$$

Esso può essere riscritto come

$$\int_{[a,b]} f(x) dx = \int_{g^{-1}([a,b])} f(g(y)) |g'(y)| dy.$$

Per funzioni di variabile vettoriale, ci aspetteremmo qualcosa del tipo

$$\int_{\Omega} f(x) dx = \int_{T^{-1}(\Omega)} f(T(y)) \quad ??? \quad dy.$$

**Proposizione 5.26.** Sia  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  aperto, sia  $T : \Omega \rightarrow T(\Omega)$ , biiettiva di classe  $C^1$  tale che  $\det J_T(y) \neq 0$  per ogni  $y \in \Omega$ . Dato  $S \subseteq \Omega$  tale che  $\bar{S} \subseteq \Omega$  è compatto, allora  $S$  è misurabile se e solo se  $T(S)$  è misurabile.

**Teorema 5.27** (Cambio di variabili). Sia  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  aperto, sia  $T : \Omega \rightarrow T(\Omega)$ , biiettiva di classe  $C^1$  tale che  $\det J_T(y) \neq 0$  per ogni  $y \in \Omega$ .

Dato  $A \subseteq T(\Omega)$  tale che  $\bar{A} \subseteq T(\Omega)$  è compatto. Se  $A$  è misurabile e  $f \in C(\bar{A})$ , allora vale la **formula del cambio di variabili**:

$$\int_A f(x) dx = \int_{T^{-1}(A)} f(T(y)) |\det J_T(y)| dy,$$

dove  $J_T$  è la matrice Jacobiana di  $T$  nel punto  $y \in \Omega$ .

La dimostrazione è omessa.

**Osservazione 5.28.** Se  $\Omega$  è limitato, allora, dato  $S \subseteq \Omega$ ,  $\bar{S}$  sarà compatto automaticamente.

Se  $\Omega$  e  $T(\Omega)$  sono misurabili e limitati allora posso considerare  $f \in C(A)$  limitata.

**Osservazione 5.29** (! Importante !). Possiamo rinunciare alla biunivocità di  $T$  e l'ipotesi  $\det J_T(y) \neq 0$  purché ciò accada su un insieme di misura nulla.

**Osservazione 5.30.** Notiamo che<sup>5</sup>

$$\frac{|T(B_r(y_0))|}{|B_r(y_0)|} = \frac{1}{|B_r(y_0)|} \int_{T(B_r(y_0))} 1 dx = \frac{1}{|B_r(y_0)|} \int_{B_r(y_0)} |\det J_T(y)| dy,$$

dove nella prima uguaglianza scriviamo la definizione di misura dell'insieme  $T(B_r(y_0))$  e nella seconda abbiamo fatto uso della formula del cambio di variabili nel caso  $A = T(B_r(y_0))$  e  $f = 1$ , osservando che  $T^{-1}(A) = B_r(y_0)$ .

Sfruttando il teorema della media, essendo  $\det J_T$  continuo su  $B_r(y_0)$ , segue che per ogni  $r > 0$  esiste un elemento  $\xi_r \in B_r(y_0)$  tale che

$$\frac{1}{|B_r(y_0)|} \int_{B_r(y_0)} |\det J_T(y)| dy = |\det J_T(\xi_r)|.$$

<sup>5</sup>In questa formula, la notazione  $|\cdot|$  potrebbe creare confusione. Essa è utilizzata sia per denotare la misura di un insieme (nelle frazioni) sia per denotare il valore assoluto del determinante della matrice Jacobiana a destra.

Passando al limite  $r \rightarrow 0$  abbiamo che  $\lim_{r \rightarrow 0} \xi_r = y_0$  e quindi, riassumendo,

$$\frac{|T(B_r(y_0))|}{|B_r(y_0)|} = \frac{1}{|B_r(y_0)|} \int_{B_r(y_0)} |\det J_T(y)| dy = |\det J_T(\xi_r)| \xrightarrow{r \rightarrow 0^+} |\det J_T(y_0)|$$

Possiamo quindi vedere  $|\det J_T(y)|$  come un tasso puntuale di variazione o un fattore di riscaldamento della misura  $N$ -dimensionale.

Non deve quindi sorprendere la presenza del determinante. Infatti, come noto dalla scuola secondaria, per  $v, w \in \mathbb{R}^2$  il modulo del prodotto vettoriale  $|v \wedge w| = |\det(v \ w)|$  è l'area del parallelogramma individuata dai vettori  $v, w$ , mentre per  $v, w, z \in \mathbb{R}^3$  il valore assoluto del prodotto misto  $|(v \wedge w) \cdot z| = |\det(v \ w \ z)|$  è il volume del parallelepipedo individuato dai vettori  $v, w, z$ . Nel corso di geometria si è vista anche la generalizzazione a dimensioni  $N > 3$ .

## 5.2 Esercizi e applicazioni

**Esercizio 5.31.** Calcoliamo l'area del parallelogramma  $\mathcal{P}$  di vertici  $A = (0, 0)$ ,  $B = (a, b)$ ,  $C = (a + c, b + d)$  e  $D = (c, d)$ . Introducendo il cambio di variabile (si noti che è un'applicazione lineare)

$$T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad T(X, Y) = (x, y), \quad \begin{cases} x = aX + cY \\ y = bX + dY \end{cases}$$

troviamo

$$\det J_T(X, Y) = \det \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = ad - bc.$$

Quindi, osservando che il parallelogramma, nelle nuove variabili è il quadrato  $[0, 1] \times [0, 1]$ , troviamo che

$$\text{Area} = \iint_{\mathcal{P}} 1 \, dx dy = \int_0^1 dX \int_0^1 dY |ad - bc| = |ad - bc|.$$

**Esercizio 5.32** (Volume delimitato da un ellissoide). Calcoliamo il volume di

$$E = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \right\},$$

ovvero la regione di spazio delimitata da un ellissoide di assi  $a, b, c > 0$ .

Introduciamo il cambio di variabili

$$\begin{cases} u = x/a \\ v = y/b \\ w = z/c \end{cases}$$

cosicché il diffeomorfismo da considerare per applicare il teorema del cambio di variabili è

$$T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad T(u, v, w) = (au, bv, cw)$$

dove

$$S = T^{-1}(E) = \{(u, v, w) \in \mathbb{R}^3 \mid u^2 + v^2 + w^2 \leq 1\}.$$

Per la formula del cambio di variabili ci serve

$$\det J_T(u, v, w) = \det \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} = abc,$$

quindi troviamo

$$\begin{aligned} |E| &= \iiint_E 1 \, dx dy dz = \iiint_{T^{-1}(E)} |\det J_T(u, v, w)| \, dudvdw \\ &= \iiint_S (abc) \, dudvdw \\ &= (abc) \iiint_S dudvdw = \frac{4}{3} \pi abc, \end{aligned}$$

dove nell'ultimo passaggio dobbiamo semplicemente calcolare il volume di una palla di raggio 1.

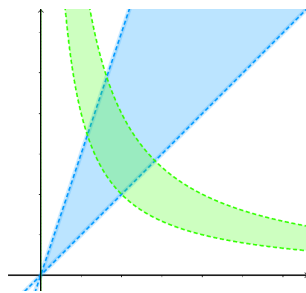


Figura 1: Vedi Esercizio 5.33.

**Esercizio 5.33.** Calcoliamo l'area dell'insieme

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < y < 3x, 1 < xy < 2\}.$$

Notiamo che la prima condizione nasconde l'espressione  $1 < y/x < 3$ , quindi se sostituissimo

$$\begin{cases} p = xy \\ m = y/x \end{cases} \quad (6)$$

troveremmo un insieme molto semplice (un rettangolo!)

$$\tilde{E} = \{(p, m) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 < m < 3, 1 < p < 2\} = (1, 2) \times (1, 3).$$

Un integrale su  $\tilde{E}$  è banale da risolvere piuttosto che un integrale su  $E$ . Cerchiamo quindi di isolare le variabili  $x, y$  dal sistema, trovando (posto  $m > 0$ )

$$\begin{cases} p = xy \\ m = y/x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p/m = x^2 \\ pm = y^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{p/m} \\ y = \sqrt{pm} \end{cases} \quad (7)$$

quindi

$$T : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+, \quad T(p, m) = (\sqrt{p/m}, \sqrt{pm})$$

$$\det J_T(p, m) = \det \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{pm}} & -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{p}{m^3}} \\ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{m}{p}} & \frac{1}{2}\sqrt{\frac{p}{m}} \end{pmatrix} = \frac{1}{2m}.$$

Possiamo quindi calcolare l'area di  $E$ :

$$|E| = \iint_E 1 \, dx dy = \iint_{\tilde{E}} 1 \cdot \frac{1}{2m} \, dp dm = \frac{1}{2} \left( \int_1^2 1 \, dp \right) \left( \int_1^3 dm \frac{1}{m} \right) = \frac{1}{2} [\log m]_1^3 = \frac{1}{2} \log 3. \quad (8)$$

In alternativa possiamo evitare di calcolare esplicitamente  $T$  e sfruttare direttamente il sistema (6): in questo caso stiamo costruendo la funzione  $T^{-1}$ !

$$T^{-1} : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+, \quad T^{-1}(x, y) = (p, m) = (xy, y/x)$$

$$\det J_{T^{-1}}(x, y) = \det \begin{pmatrix} y & x \\ -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \end{pmatrix} = 2\frac{y}{x} = 2m. \quad (9)$$

Quindi ricordando che

$$J_{T^{-1}}(T(y)) = [J_T(y)]^{-1} \quad \Rightarrow \quad \det J_{T^{-1}}(T(y)) = [\det J_T(y)]^{-1}$$

allora  $\det J_T = \frac{1}{2m}$  e concludiamo come in (8).

Notiamo che nell'ultimo passaggio in (9), dobbiamo esprimere il determinante nelle variabili  $p, m$ , in questo caso è ovvio il passaggio, ma a volte siamo costretti comunque a intraprendere i calcoli visti in (7). Concludendo, questa seconda via non è necessariamente più vantaggiosa della precedente.

Calcolare il centroide di  $E$  come esercizio.

**Esercizio 5.34.** Calcoliamo ora l'integrale

$$\iint_E \sin(xy)x^2 dx dy$$

dove  $E$  è l'insieme dell'esercizio precedente. Adottando lo stesso cambio di coordinate otteniamo

$$\begin{aligned} \iint_E \sin(xy)x^2 dx dy &= \iint_{\tilde{E}} \sin(p) \frac{p}{m} \frac{1}{2m} dp dm \\ &= \frac{1}{2} \left( \int_1^2 p \sin(p) dp \right) \left( \int_1^3 \frac{1}{m^2} dm \right) \\ &= \frac{1}{2} [\sin p - p \cos p]_1^2 \left[ -\frac{1}{m} \right]_1^3 = \frac{1}{3} (\sin 2 - 2 \cos 2 - \sin 1 + \cos 1). \end{aligned}$$

**Esercizio 5.35.** Dalle superiori sappiamo che, dati tre punti nel piano  $A = (x_A, y_A)$ ,  $B = (x_B, y_B)$  e  $C = (x_C, y_C)$ , il baricentro del triangolo di vertici  $A, B, C$  è

$$G = \left( \frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \right).$$

*Suggerimento: usare il cambio di variabile  $(x, y) \mapsto (v, w)$  dove  $v$  e  $w$  sono i vettori individuati da due lati del triangolo.*

Vediamo ora degli esempi di cambi di variabile decisamente importanti.

### 5.2.1 Coordinate polari

Consideriamo l'insieme

$$\Omega = (0, +\infty) \times (-\pi/2, 3\pi/2) \subset \mathbb{R}^2$$

e la funzione

$$\Phi : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \Phi(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta).$$

Notiamo che  $\Phi(\bar{\Omega}) = \mathbb{R}^2$  e  $\Phi(\Omega) = \mathbb{R}^2 \setminus F$  dove  $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0, y \leq 0\}$ . La funzione  $\Phi$  è invertibile in  $\Phi(\Omega)$  con inversa  $\Phi^{-1} : \Phi(\Omega) \rightarrow \Omega$  definita come

$$\Phi^{-1}(x, y) = \begin{cases} \left( \sqrt{x^2 + y^2}, \arctan \frac{y}{x} \right) & x > 0, \\ \left( y, \frac{\pi}{2} \right) & x = 0, \\ \left( \sqrt{x^2 + y^2}, \arctan \frac{y}{x} + \pi \right), & x < 0. \end{cases}$$

Dato  $E \subset \mathbb{R}^2$  insieme limitato misurabile "in coordinate cartesiane", notiamo che è possibile scomporlo nei sottoinsiemi disgiunti

$$E_0 = E \cap (\{0\} \times \mathbb{R}), \quad E_1 = E \cap (\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}), \quad E_2 = E \cap (\mathbb{R}^- \times \mathbb{R}).$$

Essi sono tutti insiemi misurabili e  $|E_0| = 0$  e le funzioni  $\Phi|_{E_i} : E_i \rightarrow \Phi(E_i)$ , dove  $i = 1, 2$ , sono  $C^1$ -diffeomorfismi. Inoltre

$$\begin{aligned} \Phi^{-1}(E_1) &\subset (0, +\infty) \times (-\pi/2, \pi/2), \\ \Phi^{-1}(E_2) &\subset (0, +\infty) \times (\pi/2, 3\pi/2), \\ \Phi^{-1}(E_0) &\subset (0, +\infty) \times \{-\pi/2, \pi/2, 3\pi/2\}. \end{aligned}$$

Possiamo quindi applicare il teorema del cambio di variabili sugli insiemi  $E_i$  ( $i = 1, 2$ ) tramite l'applicazione  $\Phi$ . Calcoliamo

$$\det J_\Phi(r, \theta) = \det \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix} = r.$$

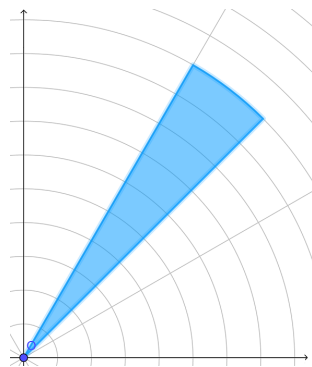


Figura 2: Vedi Esercizio 5.39.

Quindi dato l'insieme misurabile limitato  $E \subset \mathbb{R}^2$  "in coordinate cartesiane" e una funzione continua  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  limitata allora

$$\begin{aligned} \iint_E f(x, y) \, dx dy &= \iint_{E_0} f(x, y) \, dx dy + \iint_{E_1} f(x, y) \, dx dy + \iint_{E_2} f(x, y) \, dx dy \\ &= \iint_{\Phi^{-1}(E_1)} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r \, dr d\theta + \iint_{\Phi^{-1}(E_2)} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r \, dr d\theta \\ &= \iint_{\Phi^{-1}(E)} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r \, dr d\theta \end{aligned}$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo usato che

$$\Phi^{-1}(E) \setminus (\Phi^{-1}(E_1) \cup \Phi^{-1}(E_2)) = \Phi^{-1}(E_0), \quad \text{dove} \quad |\Phi^{-1}(E_0)| = 0.$$

**Osservazione 5.36.** Da qui in avanti modificheremo il dominio della funzione  $\Phi$  a "nostro vantaggio" di volta in volta, spesso considereremo il dominio  $(0, +\infty) \times (0, 2\pi)$ .

**Esercizio 5.37.** Mostrare che  $|\det J_{\Phi^{-1}}(x, y)| = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$  in ogni punto di  $E_1$  ed  $E_2$ , facendo i calcoli espliciti.

**Esempio 5.38** (L'area del cerchio). Il cerchio di raggio  $R$

$$\overline{B}_R(0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq R^2\}$$

viene trasformato in coordinate polari  $(r, \theta)$  nel rettangolo  $[0, R] \times [0, 2\pi]$ , quindi

$$|\overline{B}_R(0)| = \iint_{\overline{B}_R(0)} 1 \, dx dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R r \, dr = 2\pi \frac{R^2}{2} = \pi R^2.$$

**Esercizio 5.39.** Calcoliamo  $\iint_E xy \, dx dy$  nell'insieme

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq y \leq \sqrt{3}x, x^2 + y^2 \leq 4\}.$$

L'insieme  $E$  in coordinate polari  $(r, \theta)$  diventa l'insieme  $[0, 2] \times [\pi/4, \pi/3]$ , quindi

$$\begin{aligned} \iint_E xy \, dx dy &= \int_{\pi/4}^{\pi/3} d\theta \int_0^2 dr (r \cos \theta)(r \sin \theta) r \\ &= \left( \int_{\pi/4}^{\pi/3} \sin \theta \cos \theta \, d\theta \right) \cdot \left( \int_0^2 r^3 \, dr \right) = \left[ \frac{\sin^2 \theta}{2} \right]_{\pi/4}^{\pi/3} \cdot \left[ \frac{r^4}{4} \right]_0^2 = \frac{1}{8} \left( \frac{3}{4} - \frac{1}{2} \right) \cdot 16 = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

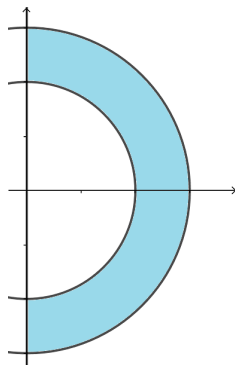


Figura 3: Vedi Esercizio 5.40.

**Esercizio 5.40.** Calcoliamo il baricentro e il momento di inerzia rispetto agli assi  $x$  e  $y$  di un corpo bidimensionale di densità superficiale costante  $\mu \equiv 1$  che occupa la regione

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4 \leq x^2 + y^2 \leq 9, x \geq 0\}.$$

Notiamo subito che in coordinate polari  $(r, \theta)$  diventa l'insieme  $[2, 3] \times [-\pi/2, \pi/2]$ , quindi possiamo calcolare

$$|C| = \iint_C dx dy = \int_2^3 dr \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta r = \frac{1}{2} [r^2]_2^3 \cdot [\theta]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{5}{2}\pi,$$

$$B_x = \iint_C x dx dy = \int_2^3 dr \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta r (r \cos \theta) = \frac{1}{3} [r^3]_2^3 \cdot [\sin \theta]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{1}{3} 19 \cdot 2 = \frac{38}{3},$$

$$B_y = \iint_C y dx dy = \int_2^3 dr \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta r (r \sin \theta) = \frac{1}{3} [r^3]_2^3 \cdot [-\cos \theta]_{-\pi/2}^{\pi/2} = 0.$$

La massa è l'area stessa  $m = |C|$ , mentre il baricentro risulta  $G = (x_G, y_G)$  dove

$$x_G = \frac{B_x}{m} = \frac{38}{3} \cdot \frac{2}{5\pi} = \frac{76}{15\pi} < 2, \quad y_G = \frac{B_y}{m} = 0.$$

Il fatto di aver ottenuto  $y_G = 0$  non deve stupire data la simmetria dell'oggetto. Il fatto che  $x_G < 2$  ci dà che  $G \notin C$ , ovvero il baricentro è esterno all'insieme. Calcoliamo ora i momenti di inerzia:

$$\begin{aligned} I_x &= \iint_C y^2 dx dy = \int_2^3 dr \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta r^3 \sin^2 \theta \\ &= \left( \int_2^3 r^3 dr \right) \cdot \left( \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2 \theta d\theta \right) = \dots = \frac{3^4 - 2^4}{4} \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_y &= \iint_C x^2 dx dy = \int_2^3 dr \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta r^3 \cos^2 \theta \\ &= \left( \int_2^3 r^3 dr \right) \cdot \left( \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 \theta d\theta \right) = \dots = \frac{3^4 - 2^4}{4} \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

**Esercizio 5.41.** Calcoliamo l'area di

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2x, y \geq 0\}.$$

Se sostituiamo  $(x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$  troviamo

$$\begin{aligned} 1 &\leq r^2 \leq 2r \cos \theta, & \rho \sin \theta &\geq 0 \\ \Rightarrow 1 &\leq r \leq 2 \cos \theta, & \sin \theta &\geq 0 \\ \Rightarrow 1 &\leq r \leq 2 \cos \theta, & \sin \theta &\geq 0, \cos \theta &\geq 1/2 \\ \Rightarrow 1 &\leq r \leq 2 \cos \theta, & 0 &\leq \theta \leq \pi/3. \end{aligned}$$

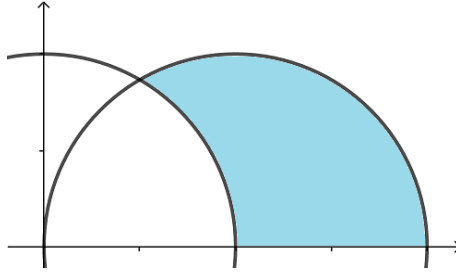


Figura 4: Vedi Esercizio 5.41.

Quindi osserviamo che, passando alle coordinate polari l'insieme  $E$  diventa

$$T^{-1}(E) = \tilde{E} = \{(r, \theta) \in \mathbb{R}^2 \mid \theta \in [0, \pi/3], 1 \leq r \leq 2 \cos \theta\},$$

che è un dominio normale su cui sappiamo integrare. Quindi

$$\begin{aligned} |E| &= \iint_{\tilde{E}} r \, dr d\theta = \int_0^{\pi/3} d\theta \int_1^{2 \cos \theta} dr \, r \\ &= \int_0^{\pi/3} d\theta \frac{1}{2} [r^2]_1^{2 \cos \theta} \\ &= \int_0^{\pi/3} \frac{1}{2} (4 \cos^2 \theta - 1) d\theta = \dots \end{aligned}$$

Similmente possiamo integrare una funzione, ad esempio, data  $f(x, y) = xy$

$$\begin{aligned} \iint_E xy \, dx dy &= \iint_{\tilde{E}} r^3 \sin \theta \cos \theta \, dr d\theta \\ &= \int_0^{\pi/3} d\theta \int_1^{2 \cos \theta} dr \, r^3 \sin \theta \cos \theta \\ &= \int_0^{\pi/3} d\theta \sin \theta \cos \theta \int_1^{2 \cos \theta} dr \, r^3 \\ &= \int_0^{\pi/3} d\theta \sin \theta \cos \theta \frac{1}{4} [r^4]_1^{2 \cos \theta} \\ &= \frac{1}{4} \int_0^{\pi/3} (16 \cos^4 \theta - 1) \sin \theta \cos \theta d\theta = \dots \end{aligned}$$

**Esercizio 5.42.** Calcolare misura, baricentro e momenti d'inerzia dell'insieme

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \geq 1, 0 \leq y \leq x \leq 2\}.$$

**Esempio 5.43** (L'integrale della gaussiana). Dimostriamo ora che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

Che la funzione  $f(x) = e^{-x^2}$  appartenga a  $\tilde{\mathcal{R}}(\mathbb{R})$  è facile da verificare. Quindi possiamo scrivere

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \lim_{R \rightarrow +\infty} I(R), \quad \text{dove } I(R) := \int_{-R}^{+R} e^{-x^2} dx.$$

Notiamo che

$$I(R)^2 = \left( \int_{-R}^{+R} e^{-x^2} dx \right)^2 = \int_{-R}^{+R} e^{-x^2} dx \int_{-R}^{+R} e^{-y^2} dy = \int_{-R}^{+R} dx \int_{-R}^{+R} dy e^{-(x^2+y^2)}.$$

Denotiamo con  $Q_R$  il quadrato  $[-R, +R] \times [-R, +R] \subset \mathbb{R}^2$  e con  $\overline{B}_R \subset \mathbb{R}^2$  la palla chiusa di raggio  $R$  centrata nell'origine. Notiamo che, definito

$$\mathcal{I}(R) := \iint_{B_R} e^{-(x^2+y^2)} dx dy,$$

vale, essendo la funzione integranda positiva,

$$\mathcal{I}(R) \leq I(R)^2 \leq \mathcal{I}(R\sqrt{2}). \quad (10)$$

Andiamo quindi a calcolare  $\mathcal{I}(R)$  al variare di  $R$  introducendo coordinate polari.

$$\mathcal{I}(R) = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R dr r e^{-r^2} = 2\pi \left[ -\frac{e^{-r^2}}{2} \right]_0^R = \pi(1 - e^{-R^2}).$$

Quindi, dalla (10), troviamo

$$\pi(1 - e^{-R^2}) \leq I(R)^2 \leq \pi(1 - e^{-2R^2})$$

e, passando al limite per  $R \rightarrow +\infty$ , usando il teorema dei carabinieri concludiamo

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} I(R)^2 = \pi \quad \Rightarrow \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

### 5.2.2 Coordinate cilindriche

Se trattando un insieme  $A \subset \mathbb{R}^3$  consideriamo due variabili, ad esempio  $x, y$ , e ad esse associamo le coordinate polari, allora troviamo le coordinate cilindriche. In particolare, dato

$$\Omega = (0, +\infty) \times (0, 2\pi) \times \mathbb{R}$$

consideriamo la funzione  $\Phi : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3$  definita da

$$\Phi(r, \theta, z) = (r \cos \theta, r \sin \theta, z).$$

Notiamo che  $\Phi(\Omega) = \mathbb{R}^3 \setminus F$  dove  $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 0, y = 0\}$ . Seguendo il procedimento adottato per le coordinate polari possiamo notare che

$$\iint_E f(x, y, z) dx dy dz = \iint_{\Phi^{-1}(E)} f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) r dr d\theta dz,$$

infatti anche in questo caso

$$\det J_\Phi(r, \theta, z) = \det \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & r \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = r.$$

### 5.2.3 Coordinate sferiche

Dato l'insieme

$$\Omega = (0, +\infty) \times (0, 2\pi) \times (0, \pi)$$

consideriamo la funzione  $\Phi : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3$  definita da

$$\Phi(\rho, \theta, \varphi) = (\rho \sin \varphi \cos \theta, \rho \sin \varphi \sin \theta, \rho \cos \varphi).$$

Notiamo che anche in questo caso  $\Phi(\Omega) = \mathbb{R}^3 \setminus F$  dove  $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 0, y = 0\}$ . Seguendo il procedimento adottato per le coordinate cilindriche, calcolando

$$\det J_\Phi(\rho, \theta, \varphi) = \det \begin{pmatrix} \sin \varphi \cos \theta & -\rho \sin \varphi \sin \theta & \rho \cos \varphi \cos \theta \\ \sin \varphi \sin \theta & \rho \sin \varphi \cos \theta & \rho \cos \varphi \sin \theta \\ \cos \varphi & 0 & -\rho \sin \varphi \end{pmatrix} = \dots = -\rho^2 \sin \varphi.$$



il cambio di variabili stavolta dà

$$\iint_E f(x, y, z) dx dy dz = \iint_{\Phi^{-1}(E)} f(\rho \sin \varphi \cos \theta, \rho \sin \varphi \sin \theta, \rho \cos \varphi) \rho^2 \sin \varphi d\rho d\theta d\varphi.$$

Vediamo ora un'applicazione delle coordinate cilindriche.

**Teorema 5.44** (Teorema di Guldino). *Consideriamo un insieme  $A \subseteq \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0, y \geq 0\}$  e supponiamo che  $A$  visto come sottoinsieme di  $\mathbb{R}^2$  sia misurabile (ovvero che l'insieme  $\tilde{A} = \{(y, z) \in \mathbb{R}^2 \mid (0, y, z) \in A\}$  sia misurabile) con misura positiva. Sia  $V$  il solido di rotazione ottenuto ruotando  $A$  di un angolo  $\alpha \in (0, 2\pi]$  (in senso orario o antiorario) attorno all'asse  $z$ . Allora*

$$|V| = \text{Vol}(V) = \alpha \text{Area}(A) y_G = \alpha |\tilde{A}| y_G,$$

dove  $y_G$  è la coordinata  $y$  del baricentro di  $\tilde{A}$ .

*Dimostrazione.* Dimostriamo il teorema per una rotazione in senso orario. In coordinate cilindriche otteniamo che  $V$  si può scrivere come

$$\tilde{V} = \{(r, \theta, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (r, z) \in \tilde{A}, \theta \in [\pi/2 - \alpha, \pi/2]\}$$

quindi possiamo calcolare

$$\begin{aligned} |V| &= \iiint_V dx dy dz = \iiint_{\tilde{V}} r d\theta dr dz \\ &= \iint_{\tilde{A}} \left( \int_{\pi/2 - \alpha}^{\pi/2} r d\theta \right) dr dz = \iint_{\tilde{A}} \left( \int_{\pi/2 - \alpha}^{\pi/2} d\theta \right) r dr dz \\ &= \alpha \iint_{\tilde{A}} r dr dz = \alpha \iint_{\tilde{A}} y dy dz = \alpha |\tilde{A}| y_G, \end{aligned}$$

ricordando la formula di  $y_G$ , data nella Definizione 5.19. □

**Esempio 5.45** (Volume del toro). *Il volume del toro di raggi  $r$  e  $R$  è  $V = 2\pi(\pi r^2)R$ , usando il Teorema di Guldino, con i valori  $\alpha = 2\pi$ ,  $|\tilde{A}| = \pi r^2$  e  $y_G = R$ .*

**Esercizio 5.46.** *Calcolare il volume del solido di rotazione ottenuto ruotando di un giro completo attorno all'asse  $z$  l'insieme*

$$A = \{(y, z, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid |y| \geq z, y^2 + z^2 \leq 4\}.$$

**Esercizio 5.47** (Coordinate iperboliche). *Determinare un insieme aperto  $\Omega$  opportuno affinché il cambio di variabile*

$$T : \Omega \rightarrow T(\Omega), \quad T(R, \beta) = (x, y), \quad \begin{cases} x = R \cosh \beta, \\ y = R \sinh \beta, \end{cases}$$

sia invertibile e soddisfi le ipotesi del Teorema 5.27. Determinare anche  $T(\Omega)$ . Quindi calcolare  $|\det J_T(R, \beta)|$ .

**Esempio 5.48** (Momento d'inerzia della sfera). *Consideriamo un corpo sferico di raggio  $R$  e densità costante  $\mu$  e calcoliamo il suo momento d'inerzia rispetto ad un asse. La sfera*

$$B_R(0) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\},$$

in coordinate sferiche è descritta dall'insieme

$$\{(\rho, \theta, \varphi) \in \mathbb{R}^3 \mid \rho \in [0, R], \theta \in [0, 2\pi], \varphi \in [0, \pi]\}.$$

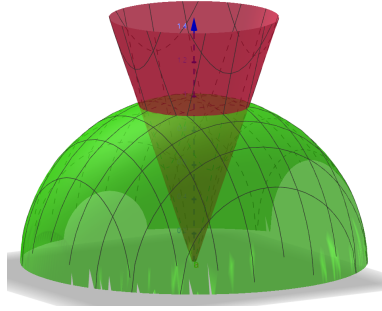


Figura 5: Vedi Esercizio 5.50.

Quindi per il momento d'inerzia, ricordando che per la massa vale  $M = \frac{4}{3}\pi R^3\mu$ , abbiamo

$$\begin{aligned}
 I_z &= \iiint_{B_R(0)} \mu(x^2 + y^2) dx dy dz = \int_0^R d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi d\varphi \rho^2 \sin \varphi \cdot \mu \cdot \rho^2 \sin^2 \varphi \\
 &= \mu \left( \int_0^{2\pi} 1 d\theta \right) \left( \int_0^R \rho^4 d\rho \right) \left( \int_0^\pi \sin^3 \varphi d\varphi \right) \\
 &= 2\pi\mu \left[ \frac{1}{5}\rho^5 \right]_0^R \left[ -\cos \varphi + \frac{1}{3}\cos^3 \varphi \right]_0^\pi \\
 &= 2\pi\mu \frac{R^5}{5} \frac{4}{3} = \frac{2}{5}MR^2.
 \end{aligned}$$

**Esercizio 5.49.** Calcola il momento d'inerzia del cilindro di raggio  $R$  e altezza  $h$ , rispetto al suo asse.

**Esercizio 5.50** (Il gelato). Consideriamo l'insieme

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3(x^2 + y^2) \leq z^2, z \geq 0, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}.$$

In coordinate sferiche  $C$  diventa

$$\tilde{C} = \{(\rho, \theta, \varphi) \in \mathbb{R}^3 \mid \rho \in [0, 1], \theta \in [0, 2\pi], \varphi \in [0, \pi/6]\}.$$

Calcoliamo il volume di  $C$ :

$$\begin{aligned}
 |C| &= \iiint_C dx dy dz = \int_0^1 d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/6} d\varphi \rho^2 \sin \varphi \\
 &= \int_0^1 \rho^2 d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/6} \sin \varphi d\varphi \\
 &= \left[ \frac{\rho^3}{3} \right]_0^1 \cdot 2\pi \cdot [-\cos \varphi]_0^{\pi/6} = \frac{2}{3}\pi \left( 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \right).
 \end{aligned}$$

Graficamente "si vede" chi è  $\tilde{C}$ , ma gli estremi di integrazione si possono anche trovare algebricamente, ricordando i vincoli naturali per gli angoli:

$$\begin{aligned}
 3(x^2 + y^2) \leq z^2 &\Rightarrow 3\rho^2 \sin^2 \varphi \leq \rho^2 \cos^2 \varphi \\
 &\hookrightarrow 3 \sin^2 \varphi \leq \cos^2 \varphi \\
 &\hookrightarrow \tan^2 \varphi \leq 1/3 \\
 &\hookrightarrow \varphi \in [0, \pi/6] \cup [5\pi/6, \pi] \\
 z \geq 0 &\Rightarrow \rho \cos \varphi \geq 0 \\
 &\hookrightarrow \cos \varphi \geq 0 \\
 &\hookrightarrow \varphi \in [0, \pi/2] \\
 x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 &\Rightarrow \rho \leq 1
 \end{aligned}$$

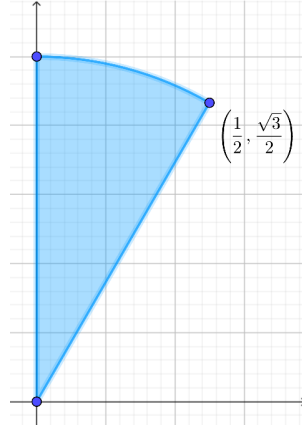


Figura 6: Vedi Esercizio 5.50, una "sezione" dell'insieme  $\widehat{C}$  per  $\theta$  fissato.

Facciamo lo stesso calcolo usando le coordinate cilindriche. In questo caso l'insieme  $C$  si può scrivere, una volta introdotte le coordinate cilindriche, come

$$\widehat{C} = \{(r, \theta, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3r^2 \leq z^2, z \geq 0, r^2 + z^2 \leq 1\}.$$

che può essere scritto come dominio normale rispetto alle variabili  $r, \theta$  (o regione  $z$ -semplice) nel seguente modo:

$$\widehat{C} = \{(r, \theta, z) \in \mathbb{R}^3 \mid r \in [0, 1/2], \theta \in [0, 2\pi], \sqrt{3}r \leq z \leq \sqrt{1-r^2}\}. \quad (11)$$

Per il calcolo del volume abbiamo quindi

$$\begin{aligned} |C| &= \iiint_C dx dy dz = \int_0^{1/2} dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_{\sqrt{3}r}^{\sqrt{1-r^2}} dz r \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{1/2} r dr \int_{\sqrt{3}r}^{\sqrt{1-r^2}} 1 dz \\ &= 2\pi \int_0^{1/2} r (\sqrt{1-r^2} - \sqrt{3}r) dr \\ &= 2\pi \left[ -\frac{1}{3}(1-r^2)^{3/2} - \sqrt{3}\frac{r^3}{3} \right]_0^{1/2} = \dots = \frac{2}{3}\pi \left( 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \end{aligned}$$

Come terza alternativa,  $\widehat{C}$  si può scrivere anche come dominio normale rispetto alle variabili  $z, \theta$  (o regione  $r$ -semplice):

$$\begin{aligned} \widehat{C} &= \{(r, \theta, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \in [0, 1], \theta \in [0, 2\pi], 0 \leq r \leq g(z)\}, \quad (12) \\ g(z) &= \begin{cases} z/\sqrt{3} & 0 \leq z \leq \sqrt{3}/2, \\ \sqrt{1-z^2} & \sqrt{3}/2 \leq z \leq 1. \end{cases} \end{aligned}$$

In questo caso otteniamo

$$\begin{aligned}
 |C| &= \iiint_C dx dy dz = \int_0^1 dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{g(z)} dr r \\
 &= 2\pi \int_0^1 \frac{1}{2} g^2(z) dz \\
 &= \pi \left( \int_0^{\sqrt{3}/2} \frac{1}{3} z^2 dz + \int_{\sqrt{3}/2}^1 (1 - z^2) dz \right) \\
 &= \pi \left( \left[ \frac{1}{9} z^3 \right]_0^{\sqrt{3}/2} + \left[ z - \frac{1}{3} z^3 \right]_{\sqrt{3}/2}^1 \right) \\
 &= \dots = \frac{2}{3} \pi \left( 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \right)
 \end{aligned}$$

**Esercizio 5.51.** Consideriamo ancora lo stesso insieme  $C$  dell'esercizio precedente. Calcoliamo

$$\iiint_C x^2 dx dy dz.$$

In questo caso, data la simmetria di  $C$  rispetto all'asse  $z$  notiamo che

$$\iiint_C x^2 dx dy dz = \iiint_C y^2 dx dy dz,$$

quindi

$$\iiint_C x^2 dx dy dz = \frac{1}{2} \iiint_C (x^2 + y^2) dx dy dz.$$

Quindi calcoliamo direttamente quest'ultimo integrale. Per calcolarlo adotteremo le coordinate cilindriche esprimendo  $\widehat{C}$  come in (12).

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} \iiint_C (x^2 + y^2) dx dy dz &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 dz \int_0^{g(z)} dr r^3 \\
 &= \pi \int_0^1 \left[ \frac{1}{4} r^4 \right]_0^{g(z)} dz \\
 &= \pi \int_0^1 \frac{1}{4} (g(z))^4 dz \\
 &= \frac{\pi}{4} \left( \int_0^{\sqrt{3}/2} \frac{z^4}{9} dz + \int_{\sqrt{3}/2}^1 (1 - z^2)^2 dz \right) = \dots
 \end{aligned}$$

**Esercizio 5.52.** Consideriamo ancora lo stesso insieme  $C$  e calcoliamo

$$I = \iiint_C z dx dy dz.$$

Una volta scoperto il valore  $I$ , possiamo trovare il centroide di  $C$  come  $G = (0, 0, z_G)$ , con  $z_G = I/|C|$  dove la misura di  $|C|$  è già stata calcolata in precedenza. Le prime due coordinate sono ovvie data la simmetria

dell'insieme. Vedendo l'insieme  $C$  in coordinate cilindriche come in (11),

$$\begin{aligned}
 I &= \iiint_C z \, dx \, dy \, dz = \int_0^{1/2} dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_{\sqrt{3}r}^{\sqrt{1-r^2}} dz \, r \, z \\
 &= 2\pi \int_0^{1/2} dr \, r \left[ \frac{1}{2} z^2 \right]_{\sqrt{3}r}^{\sqrt{1-r^2}} \\
 &= \pi \int_0^{1/2} r(1-4r^2) \, dr \\
 &= \pi \left[ -\frac{1}{16}(1-4r^2)^2 \right]_0^{1/2} = \dots = \frac{\pi}{16}.
 \end{aligned}$$

**Esempio 5.53.** Consideriamo ora la funzione  $f(x, y) = (x^2 + y^2)^{\alpha/2} = \|(x, y)\|^\alpha$  con dominio l'anello  $\mathcal{A} = B_R(0) \setminus B_\delta(0) \subset \mathbb{R}^2$ . L'integrale risulta

$$\iint_{\mathcal{A}} f(x, y) \, dx \, dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_\delta^R dr \, r \cdot r^\alpha = 2\pi \int_\delta^R r^{\alpha+1} \, dr.$$

Ricordando quanto già visto per gli integrali generalizzati, notiamo che, se  $\alpha > -2$ , possiamo passare al limite  $\delta \rightarrow 0$  e trovare

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} 2\pi \int_\delta^R r^{\alpha+1} \, dr = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{2\pi}{\alpha+2} [r^{\alpha+2}]_\delta^R = \frac{2\pi}{\alpha+2} R^{\alpha+2}.$$

Invece, se  $\alpha < -2$ , possiamo passare al limite  $R \rightarrow \infty$  e trovare

$$\lim_{R \rightarrow \infty} 2\pi \int_\delta^R r^{\alpha+1} \, dr = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{2\pi}{\alpha+2} [r^{\alpha+2}]_\delta^R = \frac{2\pi}{|\alpha+2|} \delta^{\alpha+2}.$$

Passiamo ora a dimensione  $N = 3$  e riscriviamo il precedente risultato.

**Esempio 5.54.** Consideriamo ora la funzione  $f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{\alpha/2} = \|(x, y, z)\|^\alpha$  con dominio l'anello  $\mathcal{A} = B_R(0) \setminus B_\delta(0) \subset \mathbb{R}^3$ . L'integrale risulta, passando a coordinate sferiche,

$$\iiint_{\mathcal{A}} f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi d\varphi \sin \varphi \int_\delta^R d\rho \, \rho^2 \cdot \rho^\alpha = 4\pi \int_\delta^R \rho^{\alpha+2} \, d\rho.$$

Quindi, se  $\alpha > -3$ , possiamo passare al limite  $\delta \rightarrow 0$  e trovare

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} 4\pi \int_\delta^R \rho^{\alpha+2} \, d\rho = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{4\pi}{\alpha+3} [r^{\alpha+3}]_\delta^R = \frac{4\pi}{\alpha+3} R^{\alpha+3}.$$

Invece, se  $\alpha < -3$ , possiamo passare al limite  $R \rightarrow \infty$  e trovare

$$\lim_{R \rightarrow \infty} 4\pi \int_\delta^R \rho^{\alpha+2} \, d\rho = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{4\pi}{\alpha+3} [r^{\alpha+3}]_\delta^R = \frac{4\pi}{|\alpha+3|} \delta^{\alpha+3}.$$

Dal primo dei due risultati è interessante notare che un oggetto sferico di raggio  $R$  con densità di massa  $\mu(x, y, z) = \frac{1}{x^2+y^2+z^2}$ , che quindi tende ad infinito avvicinandoci all'origine, ha massa finita  $m = 4\pi R$ .

Vediamo ora il caso per  $N$  generico, senza entrare nei dettagli.

**Esempio 5.55.** Consideriamo ora la funzione  $f(x) = \|x\|^\alpha$  con dominio l'anello  $\mathcal{A} = B_R(0) \setminus B_\delta(0) \subset \mathbb{R}^N$ . Anche in dimensione  $N$  è possibile introdurre delle coordinate sferiche, in particolare, per funzioni radiali, ovvero tali che esiste una funzione  $g : (\delta, R) \rightarrow \mathbb{R}$  tale che  $f(x) = g(\|x\|)$ , possiamo scrivere

$$\int_{\mathcal{A}} f(x) \, dx = \omega_N \int_\delta^R \rho^{N-1} g(\rho) \, d\rho$$

dove  $\omega_N$  è il contributo dato dall'integrazione delle coordinate angolari. Abbiamo già visto che  $\omega_2 = 2\pi$  (la lunghezza della circonferenza unitaria),  $\omega_3 = 4\pi$  (la superficie della sfera unitaria). Più in generale (solo per pura curiosità) si ha

$$\omega_N = \frac{2\pi^{N/2}}{\Gamma(N/2)}$$

dove la  $\Gamma$  è la funzione Gamma di Eulero. Nel caso particolare  $f(x) = \|x\|^\alpha$  abbiamo  $g(\rho) = r^\alpha$  e quindi

$$\int_{\mathcal{A}} f(x) dx = \omega_N \int_{\delta}^R \rho^{N-1+\alpha} d\rho$$

Quindi, se  $\alpha > -N$ , possiamo passare al limite  $\delta \rightarrow 0$  e trovare

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \omega_N \int_{\delta}^R r^{\alpha+N-1} dr = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\omega_N}{\alpha+N} [r^{\alpha+N}]_{\delta}^R = \frac{\omega_N}{\alpha+N} R^{\alpha+N}.$$

Invece, se  $\alpha < -N$ , possiamo passare al limite  $R \rightarrow \infty$  e trovare

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \omega_N \int_{\delta}^R r^{\alpha+N-1} dr = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\omega_N}{\alpha+N} [r^{\alpha+N}]_{\delta}^R = \frac{\omega_N}{|\alpha+N|} \delta^{\alpha+N}.$$

## 6 Appendice

Ricordiamo le notazioni introdotte nel teorema di riduzione: consideriamo una decomposizione dello spazio  $\mathbb{R}^N$  come segue

$$\mathbb{R}^N = \mathbb{R}^K \times \mathbb{R}^{N-K}, \quad x = (x_1, \dots, x_N) = (\xi, \eta), \quad \xi = (x_1, \dots, x_K), \quad \eta = (x_{K+1}, \dots, x_N).$$

Analogamente possiamo decomporre un generico rettangolo  $Q$ :

$$Q = \prod_{i=1}^N [a^i, b^i] = Q_{\xi} \times Q_{\eta} = \prod_{i=1}^K [a^i, b^i] \times \prod_{i=K+1}^N [a^i, b^i].$$

Consideriamo un insieme misurabile  $\Omega$  tale che possa essere scritto come  $\Omega = \Omega_{\xi} \times \Omega_{\eta}$  dove  $\Omega_{\xi}$  e  $\Omega_{\eta}$  sono rispettivamente insiemi misurabili di  $\mathbb{R}^K$  e  $\mathbb{R}^{N-K}$ . Supponiamo di voler integrare una funzione integrabile  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  e che  $f$  sia a variabili separabili ovvero tale che possiamo scrivere  $f(x) = f(\xi, \eta) = g(\xi)h(\eta)$  dove le funzioni  $g : \Omega_{\xi} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $h : \Omega_{\eta} \rightarrow \mathbb{R}$  sono funzioni integrabili, allora vale

$$\int_{\Omega} f(x) dx = \int_{\Omega} g(\xi)h(\eta) d\xi d\eta = \left( \int_{\Omega_{\xi}} g(\xi) d\xi \right) \left( \int_{\Omega_{\eta}} h(\eta) d\eta \right)$$

Infatti, possiamo trovare un rettangolo  $Q = Q_{\xi} \times Q_{\eta}$  tale che  $\Omega_{\xi} \subseteq Q_{\xi}$  e  $\Omega_{\eta} \subseteq Q_{\eta}$  e usare il teorema di riduzione come segue, osservando che  $\chi_{\Omega}(\xi, \eta) = \chi_{\Omega_{\xi}}(\xi)\chi_{\Omega_{\eta}}(\eta)$ ,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f(x) dx &= \int_Q \chi_{\Omega}(x) f(x) dx = \int_{Q_{\xi} \times Q_{\eta}} \chi_{\Omega}(\xi, \eta) f(\xi, \eta) d\xi d\eta \\ &= \int_{Q_{\xi}} \left( \int_{Q_{\eta}} \chi_{\Omega_{\xi}}(\xi)\chi_{\Omega_{\eta}}(\eta) g(\xi)h(\eta) d\eta \right) d\xi \\ &= \int_{Q_{\xi}} \left( \int_{Q_{\eta}} \chi_{\Omega_{\eta}}(\eta) h(\eta) d\eta \right) \chi_{\Omega_{\xi}}(\xi) g(\xi) d\xi \\ &= \left( \int_{Q_{\xi}} \chi_{\Omega_{\xi}}(\xi) g(\xi) d\xi \right) \left( \int_{Q_{\eta}} \chi_{\Omega_{\eta}}(\eta) h(\eta) d\eta \right) = \left( \int_{\Omega_{\xi}} g(\xi) d\xi \right) \left( \int_{\Omega_{\eta}} h(\eta) d\eta \right) \end{aligned}$$