TRASFORMAZIONI CANONICHE

Trasf. di coord nello SPAZIO DELLE FASI

$$\begin{cases} p_h = u_h(\tilde{p},\tilde{q},t) \\ q_h = v_h(\tilde{p},\tilde{q},t) \end{cases} \quad \leftrightarrow \quad x_i = w_i(\tilde{x},t)$$

t.c. $\forall H(p,q,t)$, $\exists K(\tilde{p},\tilde{q},t)$ t.c. se le eq. del moto nelle coord (p,q) assumono la forma delle eq. di Ham. con Hamiltoniana H, allora anche le eq. del moto nelle nuove coord. $(\tilde{p},\tilde{q})$ assumono la forma di eq. di Hamilton con Hamiltoniana K.

$$K(\tilde{p},\tilde{q},t) = c\,\tilde{H}(\tilde{p},\tilde{q},t) + K_0(\tilde{p},\tilde{q},t)$$

CRITERIO DI CANONICITA': soddisfa condiz. di Lie, cioè:

$$c\sum_{h=1}^{n} u_h\, dv_h = \sum_{h=1}^{n} \tilde{p}_h\, d\tilde{q}_h + dF - K_0\, dt$$

$$c\,\underbrace{\bar{u}\cdot d\bar{v}}_{\bar{p}\cdot d\bar{q}} = \tilde{\bar{p}}\cdot d\tilde{\bar{q}} + dF - K_0\,dt \qquad \text{con} \quad K_0 = \frac{\partial F}{\partial t} - c\sum_{k=1}^{n} u_k \frac{\partial v_k}{\partial t}$$

Nel formalismo compatto, la condiz. di Lie prende la forma

$$\bar{w}\cdot E\,d\bar{w} = \tilde{\bar{x}}\cdot E\,d\tilde{\bar{x}} + dG - 2K_0\,dt$$

dove $G \equiv 2F + \tilde{\bar{p}}\cdot\tilde{\bar{q}} - \bar{u}\cdot\bar{v}$

TRASFORMAZIONI CANONICHE E PARENTESI DI POISSON

$$\{f,g\} = \sum_{h=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial q_h}\frac{\partial g}{\partial p_h} - \frac{\partial f}{\partial p_h}\frac{\partial g}{\partial q_h}\right)$$

$$= \sum_{i,j=1}^{2n} \frac{\partial f}{\partial x_i} E_{ij} \frac{\partial g}{\partial x_j} \qquad E = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbb{1}_n \\ \mathbb{1}_n & 0 \end{pmatrix}$$

Parentesi di Poisson fondam. : $\{x_i, x_j\} = E_{ij}$

<u>Def.</u> Una trasf. di coord. $x_i = w_i(\tilde{x},t)$ PRESERVA LE PARENTESI di POISSON se $\forall f(\bar{x},t), g(\bar{x},t)$, e indicando

$$F(\tilde{x},t) = f(w(\tilde{x},t),t) \qquad G(\tilde{x},t) = g(w(\tilde{x},t),t),$$

si ha $\quad \{f,g\}(w(\tilde{x},t),t) = \{F,G\}(\tilde{x},t)$

<u>Prop.</u> Tutte le parentesi di Poisson sono preservate se sono preservate le parentesi di Poisson fondamentali, cioè se

$$E_{ij} = \{w_i, w_j\} \qquad \text{ovvero} \qquad \{u_h, u_k\} = 0 = \{v_h, v_k\}$$
$$\{u_h, v_k\} = -\delta_{hk}$$

<u>Dim</u> $\{F,G\} = \sum_{ij=1}^{2n} \frac{\partial F}{\partial \tilde{x}_i} E_{ij} \frac{\partial G}{\partial \tilde{x}_j} = \sum_{ij}\left(\sum_m \frac{\partial f}{\partial x_m}\frac{\partial w_m}{\partial \tilde{x}_i}\right) \cdot E_{ij} \cdot$

$$\cdot \left(\sum_\ell \frac{\partial g}{\partial x_\ell}\frac{\partial w_\ell}{\partial \tilde{x}_j}\right) =$$

$$= \sum_{m,\ell} \frac{\partial f}{\partial x_m} \overbrace{\left(\sum_{ij} \frac{\partial w_m}{\partial \tilde{x}_i} E_{ij} \frac{\partial w_\ell}{\partial \tilde{x}_j}\right)}^{\{w_m, w_\ell\}} \frac{\partial g}{\partial x_\ell} =$$

$$= \sum_{m\ell} \frac{\partial f}{\partial x_m}\{w_m, w_\ell\}\frac{\partial g}{\partial x_\ell} \underset{\substack{\text{Par. P. fondam.}\\ \text{sono presev.}}}{=} \sum_{m\ell} \frac{\partial f}{\partial x_m} E_{m\ell} \frac{\partial g}{\partial x_\ell} = \{f,g\} \quad //$$

Prop. La trasf. di coord. $\bar{x} = \bar{w}(\tilde{x}, t)$ preserva le parent. di Poisson SE E SOLO SE $J_{ij} = \frac{\partial w_i}{\partial \tilde{x}_j}$ è una matrice simplettica, cioè

$$J E J^T = E$$

Matrici ortogonali:
$$O O^T = \mathbb{1}$$
$$O \mathbb{1} O^T = \mathbb{1}$$

Dim.
$$\{w_k, w_\ell\} = \sum_{ij} \frac{\partial w_k}{\partial \tilde{x}_i} E_{ij} \frac{\partial w_\ell}{\partial \tilde{x}_j} = \sum_{ij} J_{ki} E_{ij} J_{\ell j} =$$
$$= \sum_j (JE)_{kj} J_{\ell j} = \sum_j (JE)_{kj} (J^T)_{j\ell} = (JEJ^T)_{k\ell}$$

è preservata se e solo se $= E_{k\ell}$, cioè se e solo se
$$E = JEJ^T. \quad //$$

Prop. Trasf. di coord. $x_i = w_i(\tilde{x}, t)$ preserva le par. di Poisson SE E SOLO SE soddisfa la condizione di Lie.

Dim (prendiamo $c = 1$)

Condiz. di Lie: $\sum_{ij} w_i E_{ij} \underline{dw_j} = \sum_{ij} \tilde{x}_i E_{ij} d\tilde{x}_j + dG - 2K_0 dt$

Calcoliamoci $dw_j = \sum_\ell \underline{\frac{\partial w_j}{\partial \tilde{x}_\ell}} d\tilde{x}_\ell + \frac{\partial w_j}{\partial t} dt = \sum_\ell J_{j\ell} d\tilde{x}_\ell + \frac{\partial w_j}{\partial t} dt$

$$\sum_{ij\ell} w_i E_{ij} J_{j\ell} \underline{d\tilde{x}_\ell} + \sum_{ij} w_i E_{ij} \frac{\partial w_j}{\partial t} dt =$$

$$= \sum_{ij} \tilde{x}_i E_{ij} \underline{d\tilde{x}_j} + \sum_j \frac{\partial G}{\partial \tilde{x}_j} \underline{d\tilde{x}_j} + \frac{\partial G}{\partial t} dt - 2K_0 dt$$

$$\sum_\ell d\tilde{x}_\ell \left(\sum_{ij} w_i E_{ij} J_{j\ell} - \sum_i \tilde{x}_i E_{i\ell} - \frac{\partial G}{\partial \tilde{x}_\ell} \right) +$$
$$+ \left(\sum_{ij} w_i E_{ij} \frac{\partial w_j}{\partial t} + \frac{\partial G}{\partial t} - 2K_0 \right) dt = 0$$

devono annullarsi tutti i coeff. dei $d\tilde{x}_\ell$ e di dt

Coeff. $(d\tilde{x}_\ell) = 0$ se solo se $\sum_{ij} w_i E_{ij} J_{j\ell} - \sum_i \tilde{x}_i E_{i\ell} \equiv A_\ell$ e

un gradiente di una funzione, cioè se il suo rotore sia nullo

cioè se $\frac{\partial}{\partial \tilde{x}_k} A_\ell - \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_\ell} A_k = 0$.

$$0 = \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_k}\left(\sum_{ij} w_i E_{ij} J_{j\ell} - \sum_i \tilde{x}_i E_{i\ell}\right) - (k \leftrightarrow \ell)$$

$$= \left[\sum_{ij} J_{ik} E_{ij} J_{j\ell} + \sum_{ij} w_i E_{ij} \underbrace{\frac{\partial^2 w_j}{\partial \tilde{x}_k \partial \tilde{x}_\ell}}_{\text{simm. in } k\leftrightarrow\ell} - \sum_i \delta_{ik} E_{i\ell}\right] - (k\leftrightarrow\ell)$$

$$= \underbrace{(J^T E J)_{k\ell}}_{} - \underbrace{E_{k\ell}}_{\text{antisimm. in } k\leftrightarrow\ell} - (k\leftrightarrow\ell)$$

$(J^T E J)^T = J^T E^T (J^T)^T \overset{!}{=} J^T(-E)J = -J^T E J$ antisim. $(k\leftrightarrow\ell)$

antisimm. in $k\leftrightarrow\ell$ $\Rightarrow -E_{k\ell} + E_{\ell k} = -E_{k\ell} - E_{k\ell} = -2E_{k\ell}$

$$= 2\left[J^T E J - E\right]_{k\ell}$$

$J^T E J = E \iff J E J^T = E$ (vedi sotto)

condiz. Lie soddisfatta $\iff$ A_ℓ è gradiente di funz. $\iff$ $J^T E J = E$ $\iff$ (J simpl.)

$\iff$ trasf. coord. preserva le parentesi di Poisson //

$\Rightarrow$ [Trasf. è canonica $\iff$ preserva le parentesi di Poisson (fondamentali)]

Esempio 6) $\quad p_h = \tilde{p}_h \qquad q_h = \tilde{q}_h + \alpha \tilde{p}_h t$

$$\{u_h, u_k\} = \{\tilde{p}_h, \tilde{p}_k\} = 0$$

$$\{v_h, v_k\} = \{\tilde{q}_h + \alpha t \tilde{p}_h, \tilde{q}_k + \alpha t \tilde{p}_k\} =$$

$$= \alpha t \{\tilde{q}_h, \tilde{p}_k\} + \alpha t \{\tilde{p}_h, \tilde{q}_k\} = \alpha t \underbrace{[\delta_{hk} - \delta_{hk}]}_{=0}$$

$$\{u_h, v_k\} = \{\underline{\tilde{p}_h}, \tilde{q}_k + \alpha t \underline{\tilde{p}_k}\} = \{\tilde{p}_h, \tilde{q}_k\} = -\delta_{hk}$$

Osservazione: $\quad c \neq 1$? $\qquad$ c compare in $K = \underline{c}\tilde{H} + K_0$

e nelle condiz. di Lie in $c\,\bar{p} \cdot d\bar{q}$

Composizione di trasf. canoniche è canonica; quindi possiamo sempre comporre la trasf. con la trasf. canonica

2) $\quad p_h = \alpha \tilde{p}_h \qquad q_h = \beta \tilde{q}_h \qquad$ con $\quad \alpha \cdot \beta = 1/c$.

FLUSSO HAMILTONIANO come trasf. canonica

$$\dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x}, t) = E \nabla_x H$$

$\downarrow$

soluzione $\bar{x} = \bar{x}(t; \bar{x}_0)$: questa definisce una famiglia (al variare di t) di mappe nello sp. delle fasi, detto FLUSSO HAMILTONIANO

$$\Phi_t : T^*Q \to T^*Q$$
$$\bar{x}_0 \mapsto \Phi_t(\bar{x}_0) = \bar{x}(t, \bar{x}_0)$$

Prop. Consideriamo il sist. Hamiltoniano con Ham H e indichiamo con $\bar{p} = \bar{u}(\tilde{p}, \tilde{q}, t)$ $\quad \bar{q} = \bar{v}(\tilde{p}, \tilde{q}, t)$ $\quad (*)$
il flusso Hamiltoniano con DATI INIZIALI $(\tilde{p}, \tilde{q})$.
Allora la trasf. $(*)$ è CANONICA.

Detto altrimenti, la mappa Φ_t è una trasf. canonica $\forall t$

Dim. Vogliamo dimostrare che $J E J^T = E$, con
$$J_{ij} = \frac{\partial w_i}{\partial \tilde{x}_j} = \frac{\partial (\Phi_t)_i}{\partial \tilde{x}_j} = \frac{\partial x_i(t; \tilde{x})}{\partial \tilde{x}_j}$$

Usiamo che $J E J^T = E \iff J^T E J = E$

(Infatti $J E J^T = E \Rightarrow J$ invertibile ; infatti
$0 \neq \det E = \det(J E J^T) = (\det J)^2 (\underbrace{\det E}_{\neq 0}) \Rightarrow \det J \neq 0$

$E^2 = -\mathbb{1}$

$J E J^T = E \iff -J E J^T E = \mathbb{1} \iff J^{-1} = -E J^T E$

$J J^{-1} = \mathbb{1} \Rightarrow J^{-1} J = 0 \iff -E J^T E \cdot J = \mathbb{1} \iff J^T E J = E$)

Sicuramente $J^T E J = E$ per $t=0$; infatti $\Phi_{t=0_i}(\tilde{x}) = \tilde{x}_i$

$\Rightarrow J_{t=0} = \mathbb{1}$

Calcoliamo ora

$$\frac{d}{dt}\underbrace{\left(\sum_{j,k=1}^{2n} \overset{=(J^T)_{ij}}{J_{ji}} E_{jk} J_{kh}\right)}_{(J^T E J)_{ih}} = \frac{d}{dt}\left[\sum_{jk} \frac{\partial \overset{x_j(t,\tilde{x})}{x_j}}{\partial \tilde{x}_i} E_{jk} \frac{\partial x_k}{\partial \tilde{x}_h}\right] =$$

$$= \sum_{jk}\left[\frac{\partial}{\partial \tilde{x}_i}\left(\frac{\partial x_j}{\partial t}\right) E_{jk} \frac{\partial x_k}{\partial \tilde{x}_h} + \frac{\partial x_j}{\partial \tilde{x}_i} E_{jk} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_h}\left(\frac{\partial x_k}{\partial t}\right)\right] = \qquad \dot{x} = E\nabla_x H$$

$$\frac{\partial x_j}{\partial t} = \sum_{e} E_{je}\frac{\partial H}{\partial x_e} \qquad \frac{\partial x_k}{\partial t} = \sum_m E_{km}\frac{\partial H}{\partial x_m}$$

$$= \sum_{jkea} E_{je} \frac{\partial^2 H}{\partial x_a \partial x_e} \frac{\partial x_a}{\partial \tilde{x}_i} E_{jk} \frac{\partial x_k}{\partial \tilde{x}_h} + \sum_{jkmb} \frac{\partial x_j}{\partial \tilde{x}_i} E_{jk} E_{km} \frac{\partial^2 H}{\partial x_b \partial x_m} \frac{\partial x_b}{\partial \tilde{x}_h} =$$

$$= \sum_{jkea} (J^T)_{ia} (\partial^2 H)_{ae} E_{ej} (-1) E_{jk} J_{kh}$$

$$+ \sum_{jkmb} (J^T)_{ij} E_{jk} E_{km} (\partial^2 H)_{mb} J_{bh} \qquad E^2 = -\mathbb{1}$$

$$= \left[J^T(\partial^2 H) E^2 (-1) J + J^T E^2 (\partial^2 H) J\right]_{ih}$$

$$= \left[J^T(\partial^2 H) J - J^T(\partial^2 H) J\right]_{ih} = 0$$

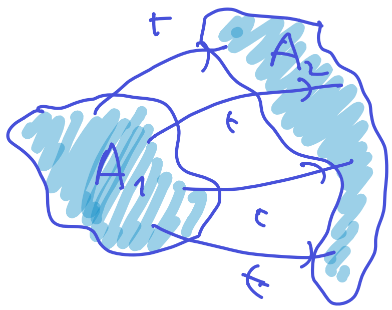
$\Rightarrow \frac{d}{dt}(J^T E J) = 0 \Rightarrow J^T E J(t)$ è una matrice costante.

Inoltre abbiamo che $J^T E J(t=0) = E \Rightarrow J^T E J = E \ \forall t$ //

Corollario. [TEOREMA DI LIOUVILLE]

Le trasformazioni canoniche univalenti ($c=1$), e tra esse il FLUSSO HAMILTONIANO, preservano il volume euclideo

$$dp_1 \cdots dp_n \, dq_1 \cdots dq_n$$



La regione A_1 evolve nel tempo t in una regione A_2 di ugual volume (euclideo)

Dim.

$$\underset{\mathrm{vol}(A_1)}{\int_{A_1}} \underbrace{dp_1 \cdots dp_n \, dq_1 \cdots dq_n}_{dx_1 \cdots dx_{2n}} = \int_{A_2} |\det J| \, d\tilde{p}_1 \cdots d\tilde{p}_n \, d\tilde{q}_1 \cdots d\tilde{q}_n$$

facciamo cambiam. coord. $x_i = w_i(\tilde{x}, t)$

Siccome la trasf. è canonica, allora

$$J^T E J = E \Rightarrow (\det J)^2 \cdot \det E = \det E$$

$$\Rightarrow (\det J)^2 = 1 \Rightarrow |\det J| = 1$$

$$\Downarrow$$

$$\int_{A_2} d\tilde{p}_1 \cdots d\tilde{p}_n \, d\tilde{q}_1 \cdots d\tilde{q}_n = \mathrm{Vol}(A_2)$$

//