SISTEMI DINAMICI

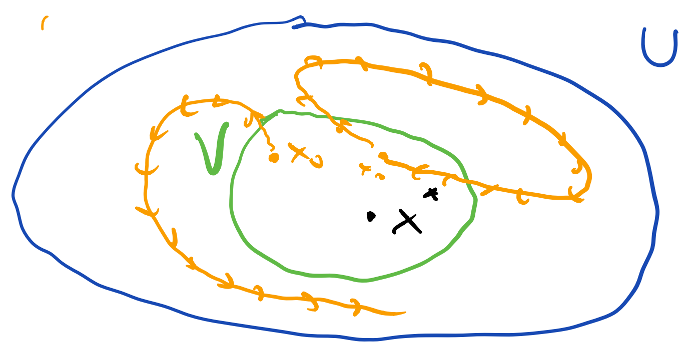
– LEZIONE DEL 14 MAGGIO 2020

– PRIMA PARTE

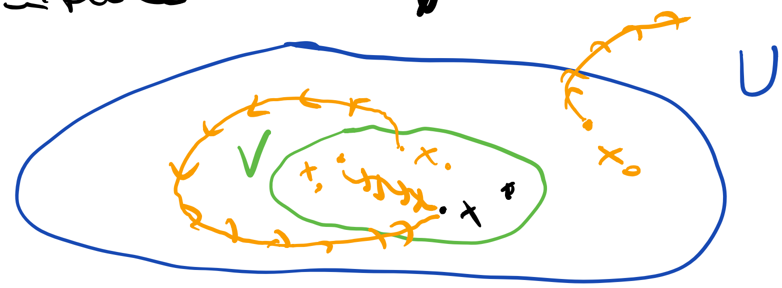
Sistemi dinamici non-lineari

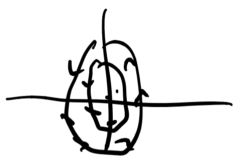
<u>Stabilità</u> : misura di quanto le orbite che partono vicine, rimangono vicine

<u>Definizione</u> Il punto di equilibrio x^* di un flusso φ_t si dice <u>stabile à la Liapunov</u> se per ogni intorno U, possiamo trovare un intorno $V \subset U$, tale che per ogni soluzione $x(t) = \varphi_t(x)$ che inizia in V (= con dato iniziale in V) rimane in U per $t \geq 0$. Se x^* non è stabile, lo chiamiamo instabile.



Def Il punto di equilibrio x^*, si dice asintoticamente stabile se è stabile e in aggiunta possiamo scegliere V, in modo tale che $|x(t) - x^*| \to 0$ per $t \to \infty$ per ogni dato iniziale in V



Ad esempio, un centro ($\dot{x} = Ax$, A autovalori puramente immaginari ) è stabile ma non asintoticamente stabile.

Teorema: [stabilità lineare $\to$ stabilità asintotica]
Sia x^* un punto di equilibrio tale che tutti gli autovalori di $Df(x^*)$ hanno parte reale <0. ($\dot{x} = f(x)$). Allora x^* è asintoticamente stabile.

Dim Segue da Teo Hartman - Grobman che vedremo

Per determinare la stabilità $\Longrightarrow$ criterio di

Liapunov.

<u>Definizione</u> Sia x^* un punto di equilibrio di un flusso φ_t. Sia $L: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funzione continua. L è detta di Liapunov (forte) per x^* se $\exists$ un intorno aperto U di x^* tale che $L(x^*) = 0$ e $\forall x \in U \setminus x^*$ valgono

- $L(x) > 0$
- $L(\varphi_t(x)) < L(x)$ per $t > 0$

(se $L(\varphi_t(x)) \leq L(x)$, allora abbiamo una funzione di Liapunov debole) $\dashv$

Notiamo, $L \in C^1$, la seconda condizione segue se richiediamo $\frac{dL}{dt} < 0$ (≤ 0)

$\to$ nel seguito assumeremo sempre di trovarci in questa situazione

Questo equivale a

$$\frac{d}{dt} L = \nabla L(x) \cdot \frac{dx}{dt} = \nabla L(x) \cdot f(x) < 0$$

$\dot{x} = f(x)$

→ il gradiente di L punta in direzione opposta al campo vettoriale f

<u>Teorema</u> [criterio di Liapunov] Sia x^* un punto di equilibrio di un flusso φ_t. Se possiamo trovare una funzione di Liapunov (debole) L per x^*, allora x^* è stabile. Se L è una funzione di Liapunov forte allora x^* è asintoticamente stabile.

<u>Dim</u> Prendiamo $\delta > 0$ tale che la palla $B_\delta(x^*)$ di raggio δ sia tutta contenuta in U. Consideriamo $\partial B_\delta(x^*)$ (sfera) e chiamiamo m il valore minimo di L su questa sfera. Allora $L > 0$ $\Rightarrow m > 0$. Poniamo

$$U_1 = \{ x \in B_\delta(x^*) \mid L(x) < m \}$$

Siccome L (funz Liapunov debole) non aumenta lungo le orbite, $L(\varphi_t(x)) < m$, nessuna soluzione che inizia dentro U_1

può arrivare a $\partial B_\delta(x^*)$. Quindi ogni soluzione che inizia in U_1, non lascia mai $B_\delta(x^*)$: abbiamo dimostrato che x^* stabile.

Per dimostrare la stabilità asintotica, assumiamo L forte. $\Rightarrow$ strettamente decrescente lungo le orbite in $U \setminus x^*$. Prendiamo una soluzione $x(t)$ che inizi in $U_1 \setminus x^*$ e supponiamo che $x(t_n) \longrightarrow z_0$ per una sequenza $t_n \to \infty$

In particolare siccome L è continua

$L(\varphi_{t_n}(x)) \longrightarrow L(z_0)$ per $t_n \longrightarrow \infty$

Siccome L è decrescente lungo le orbite

$$L(\varphi_t(x)) > L(z_0)$$

Adesso, supponiamo per assurdo che $z_0 \neq x^*$

Prendiamo $z(t)$ la soluzione con dato iniziale z_0. Allora, $\forall s > 0$, siccome z_0 non è l'equilibrio, $L(z(s)) < L(z_0)$.

Per continuità: per ogni soluzione $y(s)$ sufficientemente vicina a z_0, abbiamo che

$$L(y(s)) < L(z_0)$$

Adesso scegliamo $y(0) = x(\tau_n)$, perché per n abbastanza grande $x(\tau_n)$ è arbitrariamente vicino a z_0.

$$L(\varphi_{\tau_n+s}(x)) < L(z_0)$$

abbiamo trovato la contraddizione

Quindi $x^* = z_0$ $\therefore$ x^* è l'unico punto limite possibile e quindi è p.to di equilibrio asintoticamente stabile ∎

<u>Esempio</u> Il sistema di Lorenz, è un modellino per previsioni atmosferiche

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y-x) \\ \dot{y} = rx - y - xz \\ \dot{z} = -bz + xy \end{cases} \qquad \sigma, r, b > 0$$

$(0,0,0)$ è un equilibrio $\longrightarrow$ $Df(0) = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix}$

la direzione z è autovettore con autovalore $-b$ $\longrightarrow$ attrattivo per $b > 0$

Per gli altri due autovalori

$$\lambda^2 + (\sigma+1)\lambda + \sigma(1-r) = 0$$

Quindi $(\sigma > 0)$, nel piano xy l'origine

è attrattiva per $r < 1$ $\quad (1 - r > 0)$

invece è una sella per $r > 1$

Quindi 3D l'origine è asintoticamente stabile per $r < 1$ e instabile per $r > 1$

$(r = 1\ ?)$

Costruiamo una funzione di Liapunov:

$$L = A x^2 + B y^2 + C z^2 \qquad L(x^*) \neq 0$$

$$\frac{dL}{dt} = 2A\dot{x}x + 2B\dot{y}y + 2C\dot{z}z$$

$$= 2A\,\sigma(y-x)x + 2B(rx - y - xz)y + 2C(xy - bz)z$$

$$= 2A\sigma yx - 2A\sigma x^2 + 2Brxy - 2By^2 - \underline{2Bxzy} + \underline{2Cxyz} - 2Cbz^2$$

$C = B$

$$= 2A\sigma yx - 2A\sigma x^2 + 2Brxy - 2By^2 - 2Bbz^2$$

$$= (2A\sigma + 2Br)xy - 2A\sigma x^2 - 2By^2 - 2Bbz^2$$

$$A = \frac{1}{2\sigma}, \quad B = \frac{1}{2}$$

$$= (1+r)xy - (x^2+y^2+bz^2)$$

$$= -\left(x - \frac{r+1}{2}y\right)^2 - \left(1 - \frac{(r+1)^2}{4}\right)y^2 - bz^2$$

$b > 0$ per $r < 1$ $\quad \frac{dL}{dt} < 0$

$$L = \frac{1}{2\sigma}x^2 + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}z^2$$

$\longrightarrow$ l'origine è asintoticamente stabile

Notiamo che per $r = 1$, $\left.\frac{dL}{dt}\right|_Z = 0$

$$Z = \{(x,y,z) : x = y,\ z = 0\}$$

non è Liapunov forte per $r = 1$

Nonostante questo si può concludere che l'origine è asintoticamente stabile per $r=1$ perché Z non è invariante $\left(\left.\frac{dz}{dt}\right|_Z \neq 0\right)$

<u>Teorema</u> (Principio di LaSalle) Sia x^* un punto di equilibrio per φ_t, L una funzione di Liapunov debole, definita su un intorno U di x^*. Assumiamo inoltre che U sia

compatto e invariante in avanti $\left(\varphi_t(\Lambda) \subset \Lambda \;\; \forall t \geq 0 \right)$

sia $Z = \left\{ x \in U \;\middle|\; \frac{dL}{dt} = 0 \right\}$

l'insieme dove L non decresce.

Allora se $\{x^*\}$ è il sottoinsieme invariante in avanti più grande di Z, allora è asintoticamente stabile e attrae tutti i punti di U.

Dim [Sketch] Dalla dim del teorema di Liapunov (seconda parte ma con una funzione di Liapunov debole: $> \longrightarrow \geq$, $< \longrightarrow \leq$)

se $x \in U$, $x(t) \longrightarrow \bar{x}$ ($\bar{x}$ è in U perché U è invariante in avanti)

vale $L(\varphi_s(\bar{x})) = L(\bar{x}) \quad \forall s \geq 0$

Allora $\varphi_s(\bar{x}) \in Z \quad \left(Z = \left\{ \frac{dL}{dt} = 0 \right\} \right)$

Quindi l'orbita di $\bar{x}$ deve essere un sottoinsieme invariante in avanti di Z. Allora per ipotesi deve essere $\bar{x} = x^*$ ∎