FUNZIONI GENERATRICI

$$\begin{cases} p_h = u_h(\tilde p, \tilde q, t) \\[2ex] q_h = v_h(\tilde p, \tilde q, t) \end{cases} \qquad (\star)$$

$\det\left(\dfrac{\partial v_h}{\partial \tilde p_k}\right) \neq 0$

$\leftarrow$ se queste sono invertibili nelle $\tilde p$ allora posso sostituire questo secondo set di relazioni con $\tilde p_h = \hat p_h(q, \tilde q, t)$

Dall'inizio avrei potuto considerare le relazioni:

$$(*) \quad \boxed{\begin{aligned} p_h &= P_h(q, \tilde q, t) \\ \tilde p_h &= \hat p_h(q, \tilde q, t) \end{aligned}}$$

$P_h(q, \tilde q, t) = u_h(\tilde p(q, \tilde q, t), \tilde q, t)$

$\leftarrow$ invertendo questa relaz. riottengo le trasf. canoniche $(\star)$

Condiz. di Lie:

$F_1(q, \tilde q, t) \equiv F(\tilde p(q, \tilde q, t), \tilde q, t)$

$$\bar p \cdot \underline{\underline{d\bar q}} - \tilde p \cdot \underline{\underline{d\tilde q}} + K_0\, dt = dF_1 = \nabla_{q} F_1 \cdot dq + \nabla_{\tilde q} F_1 \cdot d\tilde q + \frac{\partial F_1}{\partial t} dt$$

Nella forma $(*)$ questi diventano diff. di coord. indip.

Prop. Per ogni funzione regolare $F_1(q, \tilde q, t)$ che soddisfi la condizione di invertibilità

$$\det \frac{\partial^2 F_1}{\partial q_h \partial \tilde q_k} \neq 0$$

le relazioni

$$P_h(q, \tilde q, t) = \frac{\partial F_1}{\partial q_h}(q, \tilde q, t)$$

$$\tilde P_h(q, \tilde q, t) = -\frac{\partial F}{\partial \tilde q_h}(q, \tilde q, t)$$

$$K_0 = \frac{\partial F_1}{\partial t}$$

definisco (implicitam., cioè a meno di un'inversione) una trasf. canonica con $K = \tilde H + \dfrac{\partial F_1}{\partial t}$

- Si dice che F_1 genera una trasformazione canonica.

- In questa maniera si ottengono tutte e SOLE le trasf. canoniche che consentono di prendere q e $\tilde{q}$ come variabili indipendenti (dette TRASF. LIBERE)

Per esempio la trasf. identità non si ricava nel pto mod

$$\begin{cases} p_h = \tilde{p}_h \\ q_h = \tilde{q}_h \end{cases}$$ ← non può essere inv. nelle $\tilde{p}$

$$\left((\det) \frac{\partial q_h}{\partial \tilde{p}_k} = 0 \right)$$

<u>Prop.</u> Per ogni funzione regolare $F_2(\tilde{p}, q, t)$ purchè sia soddisfatto

$$\det\left(\frac{\partial^2 F_2}{\partial \tilde{p}_h \partial q_k}\right) \neq 0 ,$$

le relazioni

$$p_h = \frac{\partial F_2(\tilde{p}, q, t)}{\partial q_h}$$

$$\tilde{q}_h = \frac{\partial F_2(\tilde{p}, q, t)}{\partial \tilde{p}_h}$$

definiscono (implicitam.) una trasf. canonica con

$$K = \tilde{H} + \frac{\partial F_2}{\partial t}$$

- F_2 genera la maggior parte delle trasf. interessanti, in particolare l'identità è generata da

$$F_2(\tilde{p}, q) = \sum_k \tilde{p}_k q_k \quad \rightarrow \quad p_h = \frac{\partial}{\partial q_h} \sum_k \tilde{p}_k q_k = \tilde{p}_h$$

$$\tilde{q}_h = \frac{\partial}{\partial \tilde{p}_h} \sum_k \tilde{p}_k q_k = q_h$$

- Trasf puntuali estese sono generate da $F_2 = \sum_k \tilde{p}_k \hat{v}_k(\bar{q}, t)$

$$p_h = \frac{\partial F_2}{\partial q_h} = \sum_k \tilde{p}_k \frac{\partial \hat{v}_k}{\partial q_h}$$

$$\tilde{q}_h = \frac{\partial F_2}{\partial \tilde{p}_h} = \hat{v}_h(q, t) \quad \leftarrow \text{inv.}$$

$\Rightarrow$ trasf. puntuali estese sono trasf. canoniche.

Esistono altri due tipi di funzioni generatrici

$F_3(p, \tilde{q}, t) \rightarrow \quad q_h = -\frac{\partial F_3}{\partial p_h} \quad \tilde{p}_h = -\frac{\partial F_3}{\partial \tilde{q}_h} \quad K = H + \frac{\partial F_3}{\partial t}$

$F_4(p, \tilde{p}, t) \rightarrow \quad q_h = -\frac{\partial F_4}{\partial p_h} \quad \tilde{q}_h = \frac{\partial F_4}{\partial \tilde{p}_h} \quad K = H + \frac{\partial F_4}{\partial t}$

ESEMPIO : OSCILLATORE ARMONICO

$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 q^2$. Scegliamo un'opportuna unità di mis. $m = 1/\omega$

$$\rightarrow \quad H = \frac{\omega}{2}(p^2 + q^2)$$

Trasf. $\begin{cases} p = \sqrt{2\tilde{p}} \cos\tilde{q} \\ q = \sqrt{2\tilde{p}} \,\text{sen}\,\tilde{q} \end{cases}$

Verifichiamo che è CANONICA

1) PARENTESI DI POISSON (fondamentali)

$$\{q, p\} = \{\sqrt{2\tilde{p}}\,\text{sen}\,\tilde{q}, \sqrt{2\tilde{p}}\cos\tilde{q}\} =$$

$$= 2\left[\frac{\partial}{\partial \tilde{q}}(\sqrt{\tilde{p}}\,\text{sen}\,\tilde{q})\frac{\partial}{\partial \tilde{p}}(\sqrt{\tilde{p}}\cos\tilde{q}) - \frac{\partial}{\partial \tilde{q}}(\sqrt{\tilde{p}}\cos\tilde{q})\frac{\partial}{\partial \tilde{p}}(\sqrt{\tilde{p}}\,\text{sen}\,\tilde{q})\right.$$

$$= \cancel{2}\left(\cancel{\sqrt{\tilde p}}\cos\tilde q\right)\left(\frac{1}{\cancel{2\sqrt{\tilde p}}}\cos\tilde q\right) + \cancel{2}\left(\cancel{\sqrt{\tilde p}}(+\sin\tilde q)\right)\left(\frac{1}{\cancel{2\sqrt{\tilde p}}}\sin\tilde p\right) =$$

$$= \cos^2\tilde q + \sin^2\tilde q = 1$$

$$\{q, q\} = \{\sqrt{2\tilde p}\sin\tilde q, \sqrt{2\tilde p}\sin\tilde p\} = \{f, f\} = 0$$

$$\{p, p\} = 0$$

//

2) Identità di LIE

$$p\,dq = \sqrt{2\tilde p}\cos\tilde q \; d\left(\sqrt{2\tilde p}\sin\tilde q\right) = 2\sqrt{\tilde p}\cos\tilde q \; d\left(\sqrt{\tilde p}\sin\tilde p\right) =$$

$$= 2\sqrt{\tilde p}\cos\tilde q\left[\frac{1}{2\sqrt{\tilde p}}\sin\tilde q\, d\tilde p + \sqrt{\tilde p}\cos\tilde q\, d\tilde q\right] =$$

$$= \cos\tilde q\sin\tilde q\, d\tilde p + 2\tilde p\cos^2\tilde q\, d\tilde q$$

dobbiamo dim. che $\exists F$ t.c. $= dF + \tilde p\, d\tilde q$, cioè F t.c.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial \tilde p} = \cos\tilde q\sin\tilde q & \longrightarrow \quad F = \tilde p\cos\tilde q\sin\tilde q + f(\tilde q) \\[2ex] \dfrac{\partial F}{\partial \tilde q} + \tilde p = 2\tilde p\cos^2\tilde q & \end{cases}$$

$$\underbrace{\tilde p + \underbrace{\tilde p\cos^2\tilde q - \tilde p\sin^2\tilde q}_{2\tilde p\cos^2\tilde q - \tilde p}}_{2\tilde p\cos^2\tilde q} + f'(\tilde q) = 2\tilde p\cos^2\tilde q \;\Rightarrow\; f' = 0, \quad f = \text{cost.}$$

$\Rightarrow \exists F = \tilde p\cos\tilde q\sin\tilde q + \text{cost.}$ t.c. trasf. soddisfa cond. Lie.

//

3) Jacobiano simplettico

$$J_{ij} = \frac{\partial w_i}{\partial \tilde x_j} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial p}{\partial \tilde p} & \dfrac{\partial p}{\partial \tilde q} \\[2ex] \dfrac{\partial q}{\partial \tilde p} & \dfrac{\partial q}{\partial \tilde q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2\tilde p}}\cos\tilde q & -\sqrt{2\tilde p}\sin\tilde q \\[2ex] \dfrac{1}{\sqrt{2\tilde p}}\sin\tilde q & \sqrt{2\tilde p}\cos\tilde q \end{pmatrix}$$

$$J^T E J = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\ }}\cos\tilde q & \frac{1}{\sqrt{\ }}\operatorname{sen}\tilde q \\ -\sqrt{\ }\operatorname{sen}\tilde q & \sqrt{\ }\cos\tilde q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\ }}\cos\tilde q & -\sqrt{\ }\operatorname{sen}\tilde q \\ \frac{1}{\sqrt{\ }}\operatorname{sen}\tilde q & \sqrt{\ }\cos\tilde q \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\ }}\operatorname{sen}\tilde q & -\frac{1}{\sqrt{\ }}\cos\tilde q \\ \sqrt{\ }\cos\tilde q & \sqrt{\ }\operatorname{sen}\tilde q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\ }}\cos\tilde q & -\sqrt{\ }\operatorname{sen}\tilde q \\ \frac{1}{\sqrt{\ }}\operatorname{sen}\tilde q & \sqrt{\ }\cos\tilde q \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = E \quad //$$

4) Definizione di trasf. canonica

$$H = \frac{\omega}{2}(p^2+q^2) \longrightarrow \begin{cases} \dot p = -\omega q \\ \dot q = \omega p \end{cases}$$ eq. di Hamilton

Riscriviamo eq. di Ham. nelle nuove coord

$$\begin{cases} \dot p = \frac{1}{\sqrt{2\tilde p}}\cos\tilde q\,\dot{\tilde p} - \sqrt{2\tilde p}\operatorname{sen}\tilde q\,\dot{\tilde q} \\ \dot q = \frac{1}{\sqrt{2\tilde p}}\operatorname{sen}\tilde q\,\dot{\tilde p} + \sqrt{2\tilde p}\cos\tilde q\,\dot{\tilde q} \end{cases}$$ sist. lineare in $\dot{\tilde q}, \dot{\tilde p}$

$$\begin{cases} \dot{\tilde p} = \sqrt{2\tilde p}\cos\tilde q\,\dot p + \sqrt{2\tilde p}\operatorname{sen}\tilde q\,\dot q = p\dot p + q\dot q \overset{\text{eq. Ham.}}{=} 0 \\ \dot{\tilde q} = \frac{1}{\sqrt{2\tilde p}}\cos\tilde q\,\dot q - \frac{1}{\sqrt{2\tilde p}}\operatorname{sen}\tilde q\,\dot p = \frac{1}{2\tilde p}(p\dot q - q\dot p) = \frac{\omega}{2\tilde p}(p^2+q^2) = \omega \end{cases}$$

$p^2+q^2 = 2\tilde p$

Nelle nuove coord. le eq. del moto sono

$$\begin{cases} p = \sqrt{2\tilde p}\cos\tilde q \\ q = \sqrt{2\tilde p}\operatorname{sen}\tilde q \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{\tilde p} = 0 \\ \dot{\tilde q} = \omega \end{cases} \quad \exists\, K \text{ t.c.} \quad \begin{aligned} &= -\frac{\partial K}{\partial \tilde q} \\ &= \frac{\partial K}{\partial \tilde p} \end{aligned} \quad \longrightarrow \quad \boxed{K = \omega\tilde p}$$

↓ solut.

$$\tilde p(t) = \tilde p_0$$

$$\tilde q(t) = \omega t + \tilde q_0 \quad \xrightarrow[\text{p, q}]{\text{sostit. in}} \quad \boxed{\begin{aligned} p(t) &= \sqrt{2\tilde p_0}\cos(\omega t + \tilde q_0) \\ q(t) &= \sqrt{2\tilde p_0}\operatorname{sen}(\omega t + \tilde q_0) \end{aligned}}$$

TRASFORMAZIONI CANONICHE INFINITESIME (e quantità conservate)

Nuove variabili differiscono da quelle vecchie solo per quantità infinitesime (ci permette nei conti di considerare solo termini del primo ordine)

$$\tilde{q}_i = q_i + \delta q_i \qquad \tilde{x}_i = x_i + \delta x_i$$

$$\tilde{p}_i = p_i + \delta p_i$$

variazioni infinitesime

FUNZIONE GENERATRICE: genera l'identità $\qquad \epsilon \ll 1$

$$F_2(q, \tilde{p}, t) = \sum_h q_h \tilde{p}_h + \epsilon\, G(q, \tilde{p}, t)$$

$$p_h = \frac{\partial F_2}{\partial q_h} = \tilde{p}_h + \epsilon \frac{\partial G}{\partial q_h} \Rightarrow \delta p_h = \tilde{p}_h - p_h = -\epsilon \frac{\partial G}{\partial q_h}$$

$$\tilde{q}_h = \frac{\partial F_2}{\partial \tilde{p}_h} = q_h + \epsilon \frac{\partial G}{\partial \tilde{p}_h} \Rightarrow \delta q_h = \tilde{q}_h - q_h = \epsilon \frac{\partial G}{\partial \tilde{p}_h}$$

$$G(q, \tilde{p}, t) = G(q, p + \underbrace{\delta p}_{O(\epsilon)}, t) \Rightarrow$$

$$\delta p_h = -\epsilon \frac{\partial G}{\partial q_h}(q, p + \delta p, t) = -\epsilon \frac{\partial G}{\partial q_h}(q, p, t) + O(\epsilon^2)$$

confondendo p con $\tilde{p}$ si commettono errori di ordine superiore (trascurabili nell'approx. $\epsilon \ll 1$)

$$\begin{cases} \delta p_k = -\epsilon \dfrac{\partial G(q,p,t)}{\partial q_k} \\[2ex] \delta q_k = \epsilon \dfrac{\partial G(q,p,t)}{\partial p_k} \end{cases} \qquad (*)$$

La funzione G è detta FUNZIONE GENERATRICE

o GENERATORE della trasf. canonica infinitesima

Presa una variabile dinamica, cioè una funz. $f(\bar{p}, \bar{q}, t)$, la sua variazione sotto la trasf. infinitesima (*) è

$$\underline{\delta f} = \sum_{h=1}^{m} \left(\frac{\partial f}{\partial p_h} \delta p_h + \frac{\partial f}{\partial q_h} \delta q_h \right) = \sum_h \left(\frac{\partial f}{\partial p_h} \left(-\epsilon \frac{\partial G}{\partial q_h} \right) + \frac{\partial f}{\partial q_h} \left(\epsilon \frac{\partial G}{\partial p_h} \right) \right) =$$

$f(p+\delta p, q+\delta q, t) - f(p, q, t)$

$$\delta f = \epsilon \sum_h \left(\frac{\partial f}{\partial q_h} \frac{\partial G}{\partial p_h} - \frac{\partial f}{\partial p_h} \frac{\partial G}{\partial q_h} \right) = \epsilon \{ f, G \}$$

Prendiamo l'Hamiltoniana; la sua variazione sotto la trasf. canonica indip. dal tempo, è

$$\delta H = \epsilon \{ H, G \} \qquad \left(\delta H = K - H = \tilde{H} - H + \cancel{\ldots} \right)$$

se trasf. indip. dat

$\Rightarrow$ Se H è invariante per le trasf. infinitesima generate da G allora $G(\bar{p}, \bar{q})$ è una COSTANTE del MOTO

versione Hamiltoniana del teorema di Nöther

Abbiamo qlcosa in più rispetto al caso Lagrangiano: la cost. del moto G GENERA le trasf. stesse.

Se consideriamo trasf. canonica dip. da t $(G = G(p, q, t))$, allora

$$\delta H = \epsilon \{ H, G \} + \epsilon \frac{\partial G}{\partial t} = \epsilon \frac{d}{dt} G$$

, cioè ancora generatore G è cost. del moto se H rimane invariata.

$K - H$

from $\frac{\partial F_2}{\partial t}$ ecko

ES. MOMENTO ANGOLARE $\leftrightarrow$ invarianza per rotazioni

$\Rightarrow$ Mom. ang. dovrebbe essere il generatore delle rotazioni infinitesime

Consideriamo M_z (dovrebbe generare rotaz. nel piano xy)

$$\begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos\epsilon & -\sin\epsilon & 0 \\ \sin\epsilon & \cos\epsilon & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\epsilon\, p_x - \sin\epsilon\, p_y \\ \sin\epsilon\, p_x + \cos\epsilon\, p_y \\ p_z \end{pmatrix}$$

$$\simeq \begin{pmatrix} p_x - \epsilon p_y \\ p_y + \epsilon p_x \\ p_z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} \delta p_x &= -\epsilon p_y \\ \delta p_y &= \epsilon p_x \\ \delta p_z &= 0 \end{aligned}$$

Stesso accade per le q

Vogliamo dim. che $\delta p_\ell = -\epsilon \{M_z, p_\ell\}$

$$\{M_i, p_\ell\} = \sum_{mn} \epsilon_{imn} \{q_m p_n, p_\ell\} = \sum_m \epsilon_{i\ell m} p_m$$

$$\{M_z, p_x\} = \sum_m \epsilon_{31m} p_m = p_y \quad \checkmark$$
($m = 2$)

$$\{M_z, p_y\} = \sum_m \epsilon_{32m} p_m = -p_x \quad \checkmark$$
($m = 1$)

$$\{M_z, p_z\} = \sum_m \epsilon_{33m} p_m = 0 \quad \checkmark$$

Il MOMENTO ANGOLARE genera le rotazioni infinitesime $SO(3)$

[Usando questi risultati, si può dim. che il vettore di Runge-Lenz $\bar{A}$, assieme al mom. ang. $\bar{M}$, generano il gruppo $SO(4)$]