La differenza fra il numero di stati Bosonici e il numero di stati Fermionici è un INVARIANTE sotto def. continue (susy) della teoria.

Questo inv. è chiamato WITTEN INDEX

$$\dim \mathcal{H}^B_{(0)} - \dim \mathcal{H}^F_{(0)} = \underbrace{\mathrm{Tr}\left[(-1)^F e^{-\beta H}\right]}_{\text{qualche volta è indicato come } \mathrm{Tr}(-1)^F}$$

L'indice di Witten è insensibile al dettaglio di H (deformando cont. H, $\mathrm{Tr}(-1)^F$ non cambia) anche di $\hbar$.

Osservazione:

poiché $Q^2 = 0$, possiamo definire un "complesso" di spazi vettoriali (con grado $\mathbb{Z}_2$)

carica di susy

[Complesso di sp. vett.

$$\cdots \to V_1 \xrightarrow{\phi_{12}} V_2 \xrightarrow{\phi_{23}} V_3 \xrightarrow{\phi_{34}} \cdots \quad \text{t.c.} \quad \mathrm{Im}\,\phi_{12} \subseteq \mathrm{Ker}\,\phi_{23}$$

↪ diventa una sequenza esatta se $\mathrm{Im}\,\phi_{12} = \mathrm{Ker}\,\phi_{23}$

$$\cdots \xrightarrow{Q} \underbrace{\mathcal{H}^F \xrightarrow{Q} \mathcal{H}^B \xrightarrow{Q} \mathcal{H}^F}\xrightarrow{Q} \mathcal{H}^B \xrightarrow{Q} \cdots \qquad (*)$$

⇒ Possiamo definire la coomologia di questo complesso

$$\underline{H^B(Q)} \equiv \frac{\mathrm{Ker}\,Q : \mathcal{H}^B \to \mathcal{H}^F}{\mathrm{Im}\,Q : \mathcal{H}^F \to \mathcal{H}^B}$$

$$H^F(Q) = \frac{\mathrm{Ker}\,Q : \mathcal{H}^F \to \mathcal{H}^B}{\mathrm{Im}\,Q : \mathcal{H}^B \to \mathcal{H}^F}$$

$v \in \mathrm{Ker}_{BF}$ $\quad w+v \in \mathrm{Ker}_{BF}$

$w \in \mathrm{Im}_{FB}$

↳ $w = Qu$ ⇒

⇒ $w+v = v + Qu$

$Q(w+v) = Qv + Q^2 u = 0$

Elementi di $H^B(Q)$ sono classi di equiv. dove la relaz. di equiv. è: dati $v, u \in \ker Q: \mathcal{H}^B \to \mathcal{H}^F$

$$v \cong u \quad , \text{ se } \quad u = v + w \quad \exists w \in \operatorname{Im} Q: \mathcal{H}^F \to \mathcal{H}^B$$

- gli elem. di $\ker Q: \mathcal{H}^B \to \mathcal{H}^F$ sono detti CHIUSI
- " " " $\operatorname{Im} Q: \mathcal{H}^F \to \mathcal{H}^B$ " " ESATTI

[Es di complesso:

$$\Lambda_0 \xrightarrow{d} \Lambda_1 \xrightarrow{d} \Lambda_2 \xrightarrow{d} \Lambda_3 \xrightarrow{d} \dots \qquad \Lambda_p = \{p\text{-forme}\}$$

- Le forme ω t.c. $d\omega = 0$ sono dette chiuse $\qquad d$ = differenziale
- Le forme α t.c. $\alpha = d\lambda$ sono dette esatte]

$$\dots \to \mathcal{H}^F \xrightarrow{Q} \mathcal{H}^B \xrightarrow{Q} \mathcal{H}^F \xrightarrow{Q} \mathcal{H}^B \to \dots$$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}^B_{(0)} & \xrightarrow{Q} & \mathcal{H}^F_{(0)} \\ \oplus & & \oplus \\ \mathcal{H}^B_{(1)} & \xrightarrow{Q} & \mathcal{H}^F_{(1)} \\ \oplus & & \oplus \\ \vdots & \xrightarrow{Q} & \vdots \end{array}$$

Q non mischia i livelli energetici

Possiamo definire un complesso per ogni livello di energia

$$\dots \to \mathcal{H}^F_{(n)} \xrightarrow{Q} \mathcal{H}^B_{(n)} \xrightarrow{Q} \mathcal{H}^F_{(n)} \to \dots$$

Se $n \neq 0$: il complesso diventa una SEQUENZA ESATTA:

se $|\alpha\rangle$ è Q-chiuso (cioè $\underline{Q|\alpha\rangle = 0}$), allora

siccome in $\mathcal{H}_{(n)}$ abbiamo $\dfrac{Q\bar{Q} + \bar{Q}Q}{2E_n} = 1$, applicando ad $|\alpha\rangle$

ottieniamo $\dfrac{Q\bar{Q} + \cancel{\bar{Q}Q}}{2E_n} |\alpha\rangle = |\alpha\rangle$

$$\hookrightarrow Q\left[\frac{\bar{Q}|\alpha\rangle}{2E_n}\right] = |\alpha\rangle \quad \text{cioè } |\alpha\rangle \text{ è Q-esatto.}$$

$\Rightarrow$ la coomologia è triviale

(tutti i quozienti sono triviali $\quad V \cong W \quad V/W = \{0\}$)

Per $n=0$: $\quad Q|_{\mathcal{H}_{(0)}} = 0 \Rightarrow Q|\psi\rangle = 0 \quad \forall |\psi\rangle \in \mathcal{H}^{B,F}_{(0)}$

$$\to \mathcal{H}^F_{(0)} \to \mathcal{H}^B_{(0)} \to \mathcal{H}^F_{(0)} \to$$

$\Rightarrow$ la coomologia di $\mathcal{H}^B_{(0)}$ e $\mathcal{H}^F_{(0)}$ è data dagli spazi stessi.

$\rightsquigarrow$ la coomologia del complesso $(*)$ viene puramente dai ground states :

$$H^B(Q) = \mathcal{H}^B_{(0)} \qquad H^F(Q) = \mathcal{H}^F_{(0)}$$

$\rightsquigarrow$ Lo SPAZIO DEI GROUND STATES supersimmetrici è caratterizzato dalla coomologia di Q.

P.I. per FERMIONI

Definiamo i seguenti stati

$$|\eta\rangle \equiv e^{\hat{\bar\psi}\eta}|0\rangle \qquad \langle\bar\eta| \equiv \langle 0|e^{\bar\eta\hat\psi}$$

$$\Rightarrow \hat\psi|\eta\rangle = \eta|\eta\rangle = \eta(1+\hat{\bar\psi}\eta)|0\rangle \qquad \langle\bar\eta|\hat{\bar\psi} = \langle\bar\eta|\bar\eta$$

$$\hookrightarrow = \hat\psi(1+\hat{\bar\psi}\eta)|0\rangle = \cancel{\hat\psi|0\rangle} + (1-\hat{\bar\psi}\cancel{\hat\psi})\eta|0\rangle =$$

Questi stati obbediscono alla normalizzazione

$$\langle\bar\eta|\eta\rangle = \langle 0|(1+\bar\eta\hat\psi)(1+\hat{\bar\psi}\eta)|0\rangle =$$

$$= \underbrace{\langle 0|0\rangle}_{=1} + \bar\eta\eta\underbrace{\langle 0|\hat\psi\hat{\bar\psi}|0\rangle}_{\langle 1|1\rangle = 1} = (1+\bar\eta\eta) = e^{\bar\eta\eta}$$

Gli stati $|\eta\rangle$ formano una base per V_F, cioè

$$\mathbb{1}_{V_f} = \int d^2\eta\, e^{-\bar\eta\eta}|\eta\rangle\langle\bar\eta| \qquad \int d^2\eta\,\eta\bar\eta = 1$$

Dim:

$$\mathbb{1}_{V_f}|0\rangle = \int d^2\eta\, e^{-\bar\eta\eta}|\eta\rangle\langle\bar\eta|0\rangle = \underbrace{\int d^2\eta\,(\cancel{1}\overbrace{-\bar\eta\eta}^{+\eta\bar\eta})}_{=1}(1+\cancel{\hat{\bar\psi}\eta})|0\rangle\overbrace{\langle\bar\eta|0\rangle}^{=1} = |0\rangle$$

$$\mathbb{1}_{V_f}\hat{\bar\psi}|0\rangle = \int d^2\eta\,(1-\cancel{\bar\eta}\eta)(\cancel{1}+\hat{\bar\psi}\eta)|0\rangle\underbrace{\langle\bar\eta|\hat{\bar\psi}|0\rangle}_{\langle 0|(\cancel{1}+\bar\eta\psi)\bar\psi|0\rangle = \bar\eta} = \hat{\bar\psi}|0\rangle$$

//

Ora,

$$\mathrm{Tr}_{V_f}(A) = \int d^2\eta\, e^{-\bar\eta\eta}\langle -\bar\eta|A|\eta\rangle$$

Dim.

$$\int d^2\eta\, e^{-\bar\eta\eta}\langle -\bar\eta|A|\eta\rangle = \int d^2\eta\,(1-\bar\eta\eta)\langle 0|(1-\bar\eta\hat\psi)A(1+\hat{\bar\psi}\eta)|0\rangle =$$

$$= \int d^2\eta\,(1-\bar\eta\eta)\Big[\langle 0|A|0\rangle - \cancel{\bar\eta\langle 0|\hat\psi A|0\rangle} - \cancel{\langle 0|A\hat{\bar\psi}|0\rangle\eta}$$
$$-\bar\eta\eta\langle 0|\hat\psi A\hat{\bar\psi}|0\rangle\Big] =$$

$$= \langle 0|A|0\rangle + (\langle 0|\hat{\psi})A(\hat{\bar{\psi}}|0\rangle) = \mathrm{Tr}_{V_f} A \quad //$$

Check:

$$\mathrm{Tr}\,\mathbb{1}_{V_f} = \int d^2\eta\, e^{-\bar\eta\eta}\langle -\bar\eta|\eta\rangle = \int d^2\eta\, e^{-\bar\eta\eta}\cdot e^{-\bar\eta\eta} =$$

$$= \int d^2\eta\,(1-\bar\eta\eta)(1-\bar\eta\eta) = \int d^2\eta\,(\cancel{1}-2\bar\eta\eta) = 2$$

$$\mathrm{Tr}_{V_f}(-1)^F = \int d^2\eta\, e^{-\bar\eta\eta}\langle -\bar\eta|(-1)^F|\eta\rangle = \int d^2\eta\, e^{-\bar\eta\eta}\langle \bar\eta|\eta\rangle =$$

$$= \int d^2\eta\, e^{-\bar\eta\eta}e^{\bar\eta\eta} = \int d^2\eta\, 1 = 0$$

Più in generale si può dimostrare che

$$\mathrm{Tr}_{V_F}(-1)^F A = \int d^2\eta\, e^{-\bar\eta\eta}\langle\bar\eta|A|\eta\rangle$$

Ora possiamo definire l' HEAT KERNEL per fermioni:

$$\langle \bar{x}'|e^{-\beta H}|x\rangle$$