$$\mathrm{Tr}_{V_F}\, A = \int d^2\eta\; e^{-\bar\eta\eta} \langle -\bar\eta | A | \eta\rangle$$

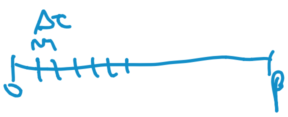
$$\mathrm{Tr}_{V_F} (-1)^F A = \int d^2\eta\; e^{-\bar\eta\eta} \langle \bar\eta | A | \eta\rangle$$

Ora possiamo definire l' HEAT KERNEL per fermioni:

$$\langle \bar x' | e^{-\beta H} | x\rangle$$

Nota: in H ordiniamo le ψ e le $\bar\psi$ t.c. tutte le ψ stiano a destra delle $\bar\psi$.

$$\langle \bar x' | e^{-\beta H} | x\rangle = \langle \bar x' | e^{-\Delta\tau H} \underset{\mathbb{1}_{V_F}}{\wedge} e^{-\Delta\tau H} \underset{\mathbb{1}_{V_F}}{\wedge} \cdots e^{-\Delta\tau H} | x\rangle =$$



$$= \int \prod_{h=1}^{N-1} d^2\eta_h\, e^{-\bar\eta_h \eta_h} \langle \bar x' | e^{-\Delta\tau H} | \eta_{N-1}\rangle \cdots \langle \eta_1 | e^{-\Delta\tau H} | x\rangle$$

$$\langle \bar\eta_{k+1} | e^{-\Delta\tau H} | \eta_k\rangle$$

abbiamo che

$$\langle \bar\eta_{k+1} | e^{-\Delta\tau H(\bar\psi,\psi)} | \eta_k\rangle = e^{-\Delta\tau H(\bar\eta_{k+1},\eta_k)} \langle \bar\eta_{k+1} | \eta_k\rangle =$$

$$= e^{-\Delta\tau H(\bar\eta_{k+1},\eta_k)}\, e^{\bar\eta_{k+1}\eta_k}$$

$\Downarrow$

$$\langle \bar x' | e^{-\beta H} | x\rangle = \lim_{N\to\infty} \int \left(\prod_{h=1}^{N-1} d^2\eta_h\, e^{-\bar\eta_h \eta_h} \right) e^{\sum_{k=1}^{N} \left(\bar\eta_k \eta_{k-1} - \Delta\tau H(\bar\eta_k, \eta_{k-1}) \right)}$$

$\eta_0 \equiv x$

$\bar\eta_N \equiv \bar x'$

$$= \lim_{N\to\infty} \int \left(\prod_{h=1}^{N-1} d^2\eta_h \right) e^{-\underbrace{\sum_{k=1}^{N} \left[\left(\underbrace{\bar\eta_k \frac{(\eta_k - \eta_{k-1})}{\Delta\tau}}_{p\dot q} \right) + H(\bar\eta_k, \eta_{k-1}) \right] \Delta\tau}_{S\ \text{Euclidea}}} \cdot e^{\bar\eta_N \eta_N}$$

$\Downarrow$

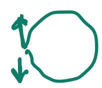
$$\langle \bar{x}' | e^{-\beta H} | x \rangle = \int\limits_{\substack{\psi \text{ t.c.} \\ \psi(0) = x \\ \psi(\beta) = x'}} \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \; e^{-S[\psi, \bar{\psi}]} \; e^{\bar{\psi}(\beta)\psi(\beta)}$$

FUNZ. DI PARTIZ. & WITTEN INDEX per teorie fermioniche.

$$\underline{\underline{Z(\beta)}} = \mathrm{Tr}\left(e^{-\beta H}\right) = \int \underbrace{\langle -\bar{x} | e^{-\beta H} | x \rangle}_{\text{P.I.}} e^{-\bar{x} x} \, d^2 x$$

$$= \int d^2 x \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \; e^{-S[\psi,\bar{\psi}]} \; \cancel{e^{\bar{\psi}(\beta)\psi(\beta)}} \; \cancel{e^{-\bar{x} x}}$$

$$\left.\begin{array}{l} \psi(0) = x \\ \psi(\beta) = -x \end{array}\right\} \text{condiz. al bordo ANTI PERIODICHE}$$



$$= \int\limits_{\text{A.P. bc}} \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \; e^{-S[\psi,\bar{\psi}]}$$

$$\underline{\underline{\mathrm{Tr}\left[(-1)^F e^{-\beta H}\right]}} = \int \underline{\langle \bar{x} | e^{-\beta H} | x \rangle} \, e^{-\bar{x} x} \, d^2 x$$

$$= \int d^2 x \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \; e^{-S[\psi,\bar{\psi}]} \; \cancel{e^{\bar{\psi}(\beta)\psi(\beta)}} \; \cancel{e^{-\bar{x} x}}$$

$$\left.\begin{array}{l} \psi(0) = x \\ \psi(\beta) = +x \end{array}\right\} \text{condiz. al bordo PERIODICHE}$$

$$= \int\limits_{\text{P. bc}} \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \; e^{-S[\psi,\bar{\psi}]}$$

P.I. in teorie SUPERSIMMETRICHE

Consideriamo una QM susy che vive su un cerchio $(M = S^1)$ di raggio β. Allora

$$Z(\beta) = \mathrm{Tr}\left(e^{-\beta H}\right) = \int \mathcal{D}X\,\mathcal{D}\psi\,\mathcal{D}\bar{\psi}\Big|_{AP} e^{-S(X,\psi,\bar{\psi})}$$

$AP \leftarrow \psi(0) = -\psi(\beta)$

$$\text{"}\mathrm{Tr}(-1)^F\text{"} = \mathrm{Tr}\left((-1)^F e^{-\beta H}\right) = \int \mathcal{D}X\,\mathcal{D}\psi\,\mathcal{D}\bar{\psi}\Big|_{P} e^{-S(X,\psi,\bar{\psi})}$$

$P \leftarrow \psi(0) = \psi(\beta)$

dove S è l'azione Euclidea

$$S[X,\psi,\bar{\psi}] = \oint_{S^1} dt\left[\frac{1}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \bar{\psi}\frac{d\psi}{dt} + \frac{1}{2}(h')^2 + h''\bar{\psi}\psi\right]$$

e le trasf. di susy sono

$$\delta X = \epsilon\bar{\psi} - \bar{\epsilon}\psi$$
$$\delta\psi = \epsilon(-\dot{x} + h')$$
$$\delta\bar{\psi} = \bar{\epsilon}(\dot{x} + h')$$

Quando ci siamo calcolati il Witten Index, abbiamo visto che esso è INDIPENDENTE da β [$\mathrm{Tr}(-1)^F e^{-\beta H}$

$\uparrow$ a questa traccia contribuiscono solo gli stati a energia zero]

$\Downarrow$

IL P.I. è indipendente dal RAGGIO di S^1 (cioè β)

$\rightsquigarrow$ cambiare β è equivalente a un'inserzione di H nel P.I.

$$\delta\ \mathrm{Tr}\left((-1)^F e^{-(\beta+\delta\beta)H}\right) = \mathrm{Tr}\left((-1)^F e^{-\beta H}\delta\beta H\right) =$$

$$= -\delta\beta \int \mathcal{D}x\mathcal{D}\psi\mathcal{D}\bar\psi\big|_P\ e^{-S(x,\psi,\bar\psi)} H(x,\psi,\bar\psi)$$

$$H = \frac{1}{2}\left(Q\bar{Q} + \bar{Q}Q\right) = \left\{Q, \frac{1}{2}\bar{Q}\right\} = \delta_{susy}\frac{1}{2}\bar{Q}$$

Ora, quando le condiz. al bordo per ψ sono PERIODICHE, Q è una SIMMETRIA del P.I.

$$\underline{\delta x = \epsilon\bar\psi - \bar\epsilon\psi}$$
$$\delta\psi = \epsilon(-\dot{x} + h')$$
$$\delta\bar\psi = \bar\epsilon(\dot{x} + h')$$

x è periodica $\Rightarrow$ affinché abbiamo senso le trasf. di susy, anche $\bar\psi$ e ψ devono essere <u>periodiche</u>

Le condiz. al bordo sono periodiche per ψ nel calcolo del Witten index (NON della funz. di partizione)

e quindi $\quad \delta(\text{Witten Index}) \propto \langle H \rangle \propto \langle \delta_{susy}\bar{Q} \rangle = 0$

per def. di β $\qquad \int_P \mathcal{D}\ldots H e^{-S} \qquad$ simm. dell'azione e della misura del P.I.!

$$\langle \delta_{sym} f \rangle = \int \mathcal{D}\phi\, \delta_{sym} f(\phi)\, e^{-S[\phi]} = \int \mathcal{D}\phi\, \delta_{sym} \underset{\displaystyle fe^{-S}}{\overset{\equiv}{G}} =$$

sym. della misura e dell'azione ($\delta_{sym} S = 0$)

$$= \int \mathcal{D}\phi\left(G(\phi') - G(\phi)\right) = \int \overset{\mathcal{D}\phi'}{\overset{\equiv}{\mathcal{D}\phi}}\, G(\phi') - \int \mathcal{D}\phi\, G(\phi) = 0$$

GROUND STATES

$$\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}) \otimes V_F$$
$$\ni \; f_1(x)|0\rangle + f_2(x)\bar\Psi|0\rangle$$

Prendiamo come base di V_F $\{|0\rangle, \bar\Psi|0\rangle\}$; allora

$$Q = \bar\Psi(ip + h'(x)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{d}{dx} + h' & 0 \end{pmatrix}$$

$$\bar Q = \Psi(-ip + h'(x)) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{d}{dx} + h' \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (\star)$$

Cerchiamo i GROUND STATI, cioè gli stati $\Psi = f_1(x)|0\rangle + f_2(x)\bar\Psi|0\rangle$ annichiliti dagli op. Q e $\bar Q$

$\langle\Psi|H|\Psi\rangle = \|Q|\Psi\rangle\|^2 + \|\bar Q|\Psi\rangle\|^2$

$\downarrow$ cioè, applicando $(\star)$

$$Q|\Psi\rangle = 0: \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{d}{dx}+h' & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = 0 \rightarrow \begin{cases} f_1' + h' f_1 = 0 \Rightarrow f_1(x) = c_1 e^{-h(x)} \\ -f_2' + h' f_2 = 0 \Rightarrow f_2(x) = c_2 e^{h(x)} \end{cases}$$

$$\bar Q|\Psi\rangle = 0: \begin{pmatrix} 0 & -\frac{d}{dx}+h' \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = 0 \rightarrow$$

Siccome vogliamo funzioni f_1 e f_2 che siano in $L^2(\mathbb{R})$, dobbiamo porre c_1 o $c_2 = 0$ a seconda del comportamento di $h(x)$ a $|x| \to \infty$:

1) $$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = \mp\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = \pm\infty \end{array}\right\} \Rightarrow h \text{ diverge a } +\infty \text{ o a } -\infty$$

$\Rightarrow$ NON ci sono GROUND STATES

(In particolare $\mathrm{Tr}(-1)^F = 0$)

2) $\lim_{x\to\pm\infty} h(x) = +\infty \Rightarrow c_2 = 0$ ed Esiste UN SOLO GROUND STATE:

$$\Psi(x) = e^{-h(x)} |0\rangle \quad \in \mathcal{H}^B$$

(In particolare $\mathrm{Tr}(-1)^F = +1$)

3) $\lim_{x\to\pm\infty} h(x) = -\infty \Rightarrow c_1 = 0$ ed Esiste UN SOLO GROUND STATE :

$$\Psi(x) = e^{h(x)} \bar{\psi} |0\rangle \quad \in \mathcal{H}^F$$

(In particolare $\mathrm{Tr}(-1)^F = -1$)

In teorie susy in $d=1$, con un campo bosonico (x) e uno fermionico $\mathbb{C}$ (ψ), esiste al massimo uno stato a energia nulla ($\dim \mathcal{H}_{(0)} \leq 1$), e il Witten Index può assumere i soli valori $-1, 0, 1$.

ESEMPIO: OSCILLATORE ARMONICO

$V(x) = \frac{1}{2}\omega^2 x^2$ è realizzato nella teoria supersimmetrica da $\boxed{h(x) = \frac{\omega}{2} x^2}$ $\left(\Rightarrow \frac{1}{2}(h')^2 = \frac{1}{2}(\omega x)\right)$

Seguendo quanto appena detto, c'è un GROUND STATE

quando $\omega > 0$ $\quad \Psi_+ = e^{-\omega x^2/2} |0\rangle$ (B)

" $\omega < 0$ $\quad \Psi_- = e^{\omega x^2/2}\, \bar\psi |0\rangle$ (F)

(Da eq. diff. del 1° ordine $Q|\psi\rangle = 0$ (invece che eq. diff. 2° ord. $H|\psi\rangle = 0$))

Spettro. $\quad H = H_B + H_F \qquad |E\rangle = |E^B\rangle \otimes |E^F\rangle$

$E = E^B + E^F$

•) $H_B = \frac{p^2}{2} + \frac{\omega^2 x^2}{2}$ (Ham. dell'o.a.), con spettro

$$E_n^B = |\omega|(n + 1/2) \qquad n \geq 0 \qquad (\text{molteplicità } 1)$$

•) $H_F = \frac{\omega}{2}[\bar\psi, \psi]$ ed è rappresentato dalla matrice

$$H_F = \frac{\omega}{2}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$$

$\qquad\qquad H_F|0\rangle \qquad H_F\bar\psi|0\rangle$

due autovalori, uno POSITIVO e l'altro NEGATIVO $= -\frac{|\omega|}{2}$ "fermionic zero point energy"

$$|E\rangle = |n\rangle_B \otimes (\overset{i=1}{|0\rangle}, \overset{i=2}{\bar\psi|0\rangle})$$

$$E = |\omega|\left(n + \frac{1}{2}\right) \pm \frac{|\omega|}{2} = 0, |\omega|, 2|\omega|, \dots$$

$\omega > 0$) Ground state: $|0\rangle_B \otimes |0\rangle$ (Bosonico: $\mathrm{Tr}(-1)^F = +1$)

B $(|n\rangle_B \otimes |0\rangle)$: $0, |\omega|, 2|\omega|, \dots$

F $(|n\rangle_B \otimes \bar\psi|0\rangle)$: $|\omega|, 2|\omega|, 3|\omega|, \dots$

$\omega<0$) Ground state : $|0\rangle_B \otimes \overline{\Psi}|0\rangle$ (Fermionico : $\mathrm{Tr}(-1)^F = -1$)

$$B \quad (|n\rangle_B \otimes |0\rangle) \; : \quad |\omega| \;,\; 2|\omega| \;,\; 3|\omega| \;, \dots$$

$$F \quad (|n\rangle_B \otimes \overline{\Psi}|0\rangle) \; : \quad 0 \;,\; |\omega| \;,\; 2|\omega| \;,\; 3|\omega| \;, \dots$$

$\Rightarrow$ 1) Stati a $E>0$ vengono in coppie $B \leftrightarrow F$

2) Per MQ a 1 grado di lib. c'è al max un solo ground state.