OSCILLATORE ARMONICO SUSY

Funzione di partizione e Witten Index

$$\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}) \otimes V_F \qquad\qquad V_F \cong \mathbb{C}^2$$

$$Z(\beta) = \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}}\, e^{-\beta H} = \mathrm{Tr}_{L^2(\mathbb{R})}\, e^{-\beta H_B} \cdot \mathrm{Tr}_{V_F}\, e^{-\beta H_F}$$

$$\mathrm{Tr}(-1)^F = \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}}\, (-1)^F e^{-\beta H} = \mathrm{Tr}_{L^2(\mathbb{R})}\, e^{-\beta H_B} \cdot \mathrm{Tr}_{V_F}\, (-1)^F e^{-\beta H_F}$$

Calcoliamoci i diversi fattori:

$$\mathrm{Tr}_{L^2(\mathbb{R})}\, e^{-\beta H_B} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta|\omega|(n+1/2)} = e^{-\beta|\omega|/2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(e^{-\beta|\omega|}\right)^n =$$

$$= \frac{e^{-\beta|\omega|/2}}{1 - e^{-\beta|\omega|}} = \frac{1}{e^{\beta|\omega|/2} - e^{-\beta|\omega|/2}}$$

$$\mathrm{Tr}_{V_F}\, e^{-\beta H_F} = e^{+\beta\omega/2} + e^{-\beta\omega/2} \qquad\qquad H_F = \frac{\omega}{2}\begin{array}{c} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ H_F|0\rangle \quad H_F\bar\psi|0\rangle \end{array}$$

$$\mathrm{Tr}_{V_F}\, (-1)^F e^{-\beta H_F} = e^{+\beta\omega/2} - e^{-\beta\omega/2}$$

$$\Downarrow$$

$$Z(\beta) = \frac{e^{\beta\omega/2} + e^{-\beta\omega/2}}{e^{\beta|\omega|/2} - e^{-\beta|\omega|/2}} = \coth\left(\frac{\beta|\omega|}{2}\right)$$

DIPENDENTE da β

$$\mathrm{Tr}(-1)^F = \frac{e^{\beta\omega/2} - e^{-\beta\omega/2}}{e^{\beta|\omega|/2} - e^{-\beta|\omega|/2}} = \frac{\omega}{|\omega|} = \pm 1$$

$\omega > 0$ $\omega < 0$

INDIPENDENTE da β (*)

risultato consistente col conto esplicito dello spettro

(*) Il fatto che Witten index è indip. da β ci permette di calcolarlo nel limite $\beta \to 0$ (β è il raggio di $M = S^1$; se mando raggio a zero, il cerchio collassa a un pto, cioè andiamo da $d=1$ a $d=0$; infatti il risultato coincide col conto fatto in $d=0$).

Funzione di partizione col P.I.

$$Z(\beta) = \int \mathcal{D}X\, \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi}\big|_{AP}\, e^{-S[x,\psi,\bar{\psi}]}$$

$h = \omega x^2/2$
$h' = \omega x$
$h'' = \omega$

$$S = \oint_{S^1} dt \left[\frac{1}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \bar{\psi}\frac{d\psi}{dt} + \frac{(h')^2}{2} + h''\bar{\psi}\psi \right]$$

$$= \oint_{S^1} dt \left[\frac{1}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \bar{\psi}\frac{d\psi}{dt} + \frac{\omega^2 x^2}{2} + \omega\bar{\psi}\psi \right]$$

qui non compare x
$\Rightarrow$ x e ψ disaccoppiano

$$S[x,\psi,\bar{\psi}] = S_B[x] + S_F[\psi,\bar{\psi}]$$

$$\Rightarrow \int \mathcal{D}X\, \mathcal{D}\psi\mathcal{D}\bar{\psi}\big|_{AP}\, e^{-S} = \underbrace{\int \mathcal{D}X\, e^{-S_B[x]}}_{B} \underbrace{\int \mathcal{D}\psi\mathcal{D}\bar{\psi}_{AP}\, e^{-S_F[\psi,\bar{\psi}]}}_{F}$$

B:
$$\int \mathcal{D}x\, e^{-\frac{1}{2}\int_0^\beta dt\,(\dot{x}^2 + \omega^2 x^2)} = \int \mathcal{D}X\, e^{-\frac{1}{2}\int_0^\beta d(t|\omega|)\left[\left(\frac{dx}{d(t|\omega|)}\right)^2 |\omega| + |\omega| x^2\right]} =$$

$$= \int \mathcal{D}X\, e^{-\frac{1}{2}\int_0^{\beta|\omega|} d\tau \left[\left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2 + x^2\right]|\omega|} =$$

riscalo la variabile di integrazione

$$= \int \mathcal{D}X'\, e^{-\frac{1}{2}\int_0^{\beta|\omega|} d\tau\,(\dot{x}'^2 + x'^2)} = \frac{1}{2\sinh(\beta|\omega|)}$$

$$F: \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi}\big|_{AP}\, e^{-\int_0^\beta dt\,(\bar{\psi}\dot{\psi} + \omega\bar{\psi}\psi)} =$$

$$= \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi}\big|_{AP}\, e^{-\int_0^\beta dt\, \bar{\psi}\left[\frac{d}{dt} + \omega\right]\psi}$$

espandiamo ψ in una base di autofunz. di $\frac{d}{dt}+\omega$ con condiz. al bordo AP

$$\psi(t) = \frac{1}{\sqrt{\beta}} \sum_k \eta_k\, \underbrace{e^{(2k-1)i\pi t/\beta}}$$

η_k: # Grassmann

antiperiodiche: $e^{(2k-1)i\pi(t+\beta)/\beta} = e^{(2k-1)i\pi t/\beta}\, \underbrace{e^{(2k-1)i\pi}}_{-1}$

autofunz. di $\frac{d}{dt}+\omega$: $\left(\frac{d}{dt}+\omega\right)e^{(2k-1)i\pi t/\beta} = \underbrace{\left(\frac{(2k-1)i\pi}{\beta}+\omega\right)}_{\lambda_k} e^{(2k-1)i\pi t/\beta}$

$k = -\infty, \dots, +\infty$

$$= \int \prod_k d^2\eta_k \prod_k e^{-\bar{\eta}_k \eta_k \lambda_k} =$$

$$= \prod_k \int d^2\eta_k \left(\cancel{1} - \bar{\eta}_k\eta_k\lambda_k\right) = \prod_k \int d^2\eta_k\, \eta_k \bar{\eta}_k\, \lambda_k = \prod_{k=-\infty}^{+\infty} \lambda_k$$

Notiamo che:

$k = 1, 2, \dots \qquad \lambda_k = (2k-1)\frac{i\pi}{\beta} + \omega$

$h = -k+1 = 0, -1, -2, \dots \qquad \lambda_h = (-2k+1)\frac{i\pi}{\beta} + \omega \equiv \lambda_{-k+1}$

$k = 1, 2, \dots$ ho due autovalori λ_k e λ_{-k+1} per ogni k

e $\qquad \lambda_k \cdot \lambda_{-k+1} = \omega^2 + 4\frac{\pi^2}{\beta^2}\left(k - \frac{1}{2}\right)^2$

$$\prod_{k=-\infty}^{+\infty} \lambda_k = \prod_{k=1}^{\infty} \lambda_k \cdot \lambda_{-k+1} = \prod_{k=1}^{\infty}\left(\omega^2 + \frac{4\pi^2}{\beta^2}\left(k-\frac{1}{2}\right)^2\right) =$$

$$= \underbrace{\prod_{k=1}^{\infty} \frac{4\pi^2}{\beta^2}\left(k-\frac{1}{2}\right)^2}_{=2} \quad \underbrace{\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{\omega^2\beta^2/4}{\pi^2\left(k-\frac{1}{2}\right)^2}\right)}_{=\cosh\left(\frac{\omega\beta}{2}\right)}$$

$$\zeta_2(s) = \sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{2\pi}{\beta}\left(k-\frac{1}{2}\right)\right]^{2s}$$

$$\zeta_2'(0) = \sum_{k=1}^{\infty} 2\log\left[\frac{2\pi}{\beta}\left(k-\frac{1}{2}\right)\right] = \log\left\{\prod_{k=1}^{\infty}\left[\frac{2\pi}{\beta}\left(k-\frac{1}{2}\right)\right]^2\right\}$$

$$\Rightarrow \prod_{k=1}^{\infty}\frac{4\pi^2}{\beta^2}\left(k-\frac{1}{2}\right)^2 = e^{\zeta_2'(0)}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(k-\frac{1}{2}\right)^z = \left(2^{-z}-1\right)\zeta(-z) \Rightarrow \zeta_2(s) = \left(\frac{2\pi}{\beta}\right)^{2s}\left(\frac{1}{2^{2s}}-1\right)\zeta(-2s)$$

$$\zeta_2'(s)\Big|_{s=0} = \underbrace{\left(\frac{1}{2^{2s}}-1\right)}_{=0 \text{ in } s=0}\underbrace{\frac{d}{ds}\left(\frac{2\pi}{\beta}\right)^{2s}\zeta(-2s)}\Big|_{s=0} + \underbrace{\zeta(0)}_{=-1/2}\left(-2\log 2\right) = \log 2$$

$$\Rightarrow e^{\zeta_2'(0)} = 2$$

$$\Rightarrow Z(\beta) = \frac{1}{2\sinh(\beta|\omega|)} \cdot 2\cosh(\beta\omega) = \coth(\beta|\omega|)$$

✓

LOCALIZZAZIONE E WITTEN INDEX

per generica teoria susy in $d=1$ con 1 grado di libertà

$$I_W \equiv \mathrm{Tr}(-1)^F = \int \mathcal{D}x\, \mathcal{D}\psi\, \mathcal{D}\bar\psi\big|_p \; e^{-S[x,\psi,\bar\psi]}$$

$$S = \int_0^\beta \left(\frac{\dot x^2}{2} + \frac{1}{2}(h'(x))^2 + \bar\psi\dot\psi + h''(x)\bar\psi\psi \right) dt$$

$\downarrow$

Invariante sotto susy:
$$\begin{cases} \delta x = \epsilon\bar\psi - \bar\epsilon\psi \\ \delta\psi = \epsilon(-\dot x + h') \\ \delta\bar\psi = \bar\epsilon(\dot x + h') \end{cases}$$

(compatibili con condiz. al bordo periodiche)

Vediamo come il P.I. dipende da h. Mandiamo $h \mapsto \lambda h$ $\lambda \in \mathbb{R}^{>0}$

$$\frac{d}{d\lambda} I_W = -\int \mathcal{D}x\mathcal{D}\psi\mathcal{D}\bar\psi\big|_p \left[\int dt \left(\lambda(h')^2 + h''\bar\psi\psi\right)\right] e^{-S[x,\psi,\bar\psi]} \qquad (\star)$$

Anche le variazioni di susy sono riscalate da $\lambda \rightsquigarrow Q_\lambda, \bar Q_\lambda$

$$\int dt\, \left(\lambda(h')^2 + \bar\psi\psi h''\right) = Q_\lambda \cdot \int dt\,(h'\psi) + \int dt\, \underbrace{h'}_{\frac{dh}{dx}} \underbrace{\dot x}_{\frac{dx}{dt}}$$

$$= Q_\lambda \cdot \int dt\,(h'\psi) + \underbrace{\oint_{S^1} dt\, \dot h}_{=0}$$

$\Downarrow$

L'inserzione di $[\,\dots]$ in $(\star)$ è Q-esatta

$$\int \mathcal{D}\phi\; \underbrace{\delta_{\text{sym.}} f}_{Q\text{-esatta se sym = susy}}\; e^{-S} = 0$$

(In $d=0$, dim diversa, che ci rifaremo qui però)

$$\Rightarrow \frac{dI_W}{d\lambda} = 0$$

I_W non dip. da λ $\Rightarrow$ calcoliamolo per $\lambda \to \infty$, dove calcolo del P.I. è più semplice

Per $\lambda \to \infty$, il termine di potenziale in S sopprime l'integrando, tranne per le mappe

$$X : S^1 \longrightarrow X_* \qquad \leftarrow \text{mappa costante}$$

dove X_* sono i pti critici di h, cioè $h'(X_*)=0$.

$\Rightarrow$ Il Witten Index localizza in intorni (nello sp. delle mappe) di mappe cost. $X : S^1 \to X_*$ con $h'(X_*)=0$.

Cioè mappe x t.c. $\dot{x} = 0$, $h'(x)=0$

$$\Downarrow$$

L'integrale sui cammini localizza in regioni dove la variazione dei fermioni si annulla.

(*)

$$\left(\begin{array}{l} \delta\psi = \epsilon(-\dot{x}+h') \\ \delta\bar{\psi} = \bar{\epsilon}(\dot{x}+h') \end{array} \right)$$

Per mappe vicine alle mappe critiche, abbiamo

$$x(t) = X_* + \underbrace{\delta x(t)}_{\text{"piccole"}}$$

$$\left| \begin{array}{l} x = X_* \\ \psi = 0 \\ \bar{\psi} = 0 \end{array} \right. \quad \text{è soluz. di eq. del moto}$$

$$\Downarrow$$

$$S^{(1)} = 0$$

$$(\text{anche } S^{(0)} = 0)$$

Espandiamo l'azione all'ordine quadratico

$$S^{(2)} = \int_0^\beta dt \left[\frac{1}{2}\delta x \left(-\frac{d^2}{dt^2} + (h''(X_*))^2 \right) \delta x + \bar{\psi}\left(\frac{d}{dt} + h''(X_*) \right)\psi \right]$$

$$I_W = \underbrace{\int \mathcal{D}x\,\mathcal{D}\psi\,\mathcal{D}\bar{\psi}\big|_p \; e^{-S^{(2)} + \cancel{O(\delta x^3)}}}_{\text{Witten index di un oscillatore armonico susy con } \omega = h''(x_*)\ !}$$

trascurabili quando $\lambda \to \infty$

$$= \frac{h''(x_*)}{|h''(x_*)|}$$

$\swarrow$ se x_* è l'unico pto critico di h

Sommando tutti i contributi che vengono da eventuali altri pti critici di h, otteniamo

$$I_W = \sum_{\substack{x_* \text{ t.c.} \\ h'(x_*)=0}} \operatorname{sgn}\left(h''(x_*)\right)$$

$\leftarrow$ Stesso risultato ottenuto in $d=0$

(non è sorprendente perchè $x(t)$ si localizza su mappe cost.)

(*) L'integrale sui cammini localizza su config. supersimmetriche che risolvono le eq. del moto classiche.

$\searrow$ $\delta x = 0$, $\delta \psi = 0$, $\delta \bar{\psi} = 0$

$(\ \dot{x} = 0 \quad h'(x) = 0 \quad \psi = 0 \quad \bar{\psi} = 0\ )$.