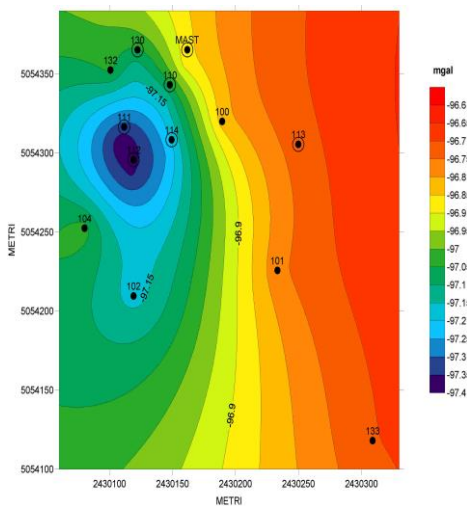




Corso di Topografia e Cartografia

Dispensa di Compensazione delle osservazioni

Disuguaglianza di Tchebycheff

- Si consideri la varianza della variabile statistica:

$$v_i = x_i - m$$

$$\sigma^2 = v_1^2 h_1 + v_2^2 h_2 + \dots + v_n^2 h_n$$

- Riordiniamo gli scarti in modo che in valore assoluto:

$$v_1 < v_2 < v_3 < \dots < v_n$$

- Considerando i v_i superiori ad un certo v_m si ha che:

$$\sigma^2 \geq v_m^2 (h_m + h_{m+1} + \dots + h_n)$$

$$h_m + h_{m+1} + \dots + h_n = h^*$$

rappresenta la frequenza con cui si presentano scarti superiori a v_m . Indicando con $\underline{h}^*$ la frequenza con cui si presentano scarti inferiori a v_m , si ha:

$$\sigma^2 \geq v_m^2 (1 - \underline{h}^*)$$

e quindi:

disuguaglianza di Tchebycheff

$$\underline{h}^* \geq 1 - \frac{\sigma^2}{v_m^2}$$

- La varianza è dunque una misura della concentrazione dei risultati delle misurazioni
- Se $v_m = 2\sigma$ $\underline{h}^* = 0,75$
- Se $v_m = 3\sigma$ $\underline{h}^* = 0,89$.

Distribuzioni marginali

- Si consideri una variabile statistica a più dimensioni, come ad es. la variabile statistica “coordinate di un caposaldo”, determinata N volte in base alle varie corrispondenti misurazioni.
- Una variabile statistica bidimensionale sarà descritta da una coppia di valori x, y.

	x1	x2	x3		xr	
y1	H11	H21	H31		Hr1	
y2	H12	H22	H32		Hr2	
y3	H13	H23	H33		Hr3	
ys						

$$n_1 = \sum_{k=1}^r H_{k1}$$

$$n_2 = \sum_{k=1}^r H_{k2}$$

$$m_1 = \sum_{j=1}^s H_{1j}$$

$$m_2 = \sum_{j=1}^s H_{2j}$$

$$N = \sum_{k=1}^r m_k = \sum_{K=1}^r \sum_{j=1}^s H_{kj}$$

$$N = \sum_{j=1}^s n_j = \sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^r H_{kj}$$

- Ciascuna delle due variabili può essere considerata separatamente:
x1 x2 x3

Con la distribuzione “marginale” di frequenze:

m1, m2, m3 ...

e, analogamente:

y1 y2 y3
n1, n2, n3 ...

- Si ha:

$$\sum_{i=1}^r m_i = N = \sum_{k=1}^s n_k$$

- N è il numero totale delle misure effettuate.
- Le frequenze della variabile bidimensionale x, y sono:

$$h_{ik} = \frac{H_{ik}}{N}$$

	x1	x2	x3		xr	
y1	h11	h21	h31		hr1	
y2	h12	h22	h32		hr2	
y3						
ys						

■ Frequenze delle distribuzioni marginali

$$\mu_i = \frac{m_i}{N} \quad \nu_j = \frac{n_j}{N}$$

■ Per la variabile aleatoria (o statistica) bidimensionale vengono definiti i seguenti parametri:

$$m_x = \sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^s x_i h_{ik} = \sum_{i=1}^r x_i \sum_{k=1}^s h_{ik} = \sum_i x_i \sum_k \frac{H_{ik}}{N} = \sum_i x_i \frac{m_i}{N} = \sum_i x_i \mu_i$$

MEDIA della x sulla distribuzione marginale m

$$m_y = \sum_{k=1}^s \sum_{i=1}^r y_k h_{ik} = \sum_{k=1}^s y_k \sum_{i=1}^r h_{ik} = \sum_k y_k \sum_i \frac{H_{ik}}{N} = \sum_k y_k \frac{n_k}{N} = \sum_k y_k \nu_k$$

MEDIA della y sulla distribuzione marginale n

Parametri **VARIANZA**

$$\sigma_x^2 = \sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^s (x_i - m_x)^2 h_{ik}$$

VARIANZA della x sulla distribuzione marginale m

$$\sigma_y^2 = \sum_{k=1}^s \sum_{i=1}^r (y_k - m_y)^2 h_{ik}$$

VARIANZA della y sulla distribuzione marginale n

$$\sigma_{xy} = \sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^s (x_i - m_x)(y_k - m_y) h_{ik}$$

COVARIANZA

Passaggio al caso continuo

- In maniera analoga al caso monodimensionale si definisce la densità di probabilità nel caso bidimensionale:

$$P_{ik} = f_{ik}(a_{i+1}-a_i)(b_{k+1}-b_k)$$

Passando al caso continuo:

$$\begin{aligned}\mu_i &\rightarrow f(x)dx \\ \nu_k &\rightarrow f(y)dy \\ P_{ik} &\rightarrow f(x,y)dxdy\end{aligned}$$

- Considerando il campo di esistenza delle x, y da $-\infty$ a $+\infty$

$$\begin{aligned}m_{1x} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x,y) dxdy & m_{1y} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} y f(x,y) dxdy \\ m_{2x} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x,y) dxdy & m_{2y} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 f(x,y) dxdy\end{aligned} \quad \text{MEDIE}$$

$$\begin{aligned}\sigma_x^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} (x-m_{1x})^2 f(x,y) dxdy \\ \sigma_y^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} (y-m_{1y})^2 f(x,y) dxdy\end{aligned} \quad \text{VARIANZE}$$

$$\sigma_{xy} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (y-m_y)(x-m_x) f(x,y) dxdy \quad \text{COVARIANZA}$$

può essere vista anche come media della v.s. bidimensionale $(y-m_y)(x-m_x)$, prodotto degli scarti

$$\rho = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} \quad \text{COEFFICIENTE DI CORRELAZIONE LINEARE}$$

■ Le frequenze h_{ik} sono *frequenze CONDIZIONATE*
(frequenze con le quali si presentano le misure x_i assieme alle misure y_k)

• Le sole frequenze x_i , indipendenti dalle y_k , si ottengono sommando tutte le frequenze della colonna i -esima:

$$\sum_{k=1}^s h_{ik} = \sum_{k=1}^s \frac{H_{ik}}{N} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^s H_{ik} = \frac{1}{N} m_i = \mu_i$$

e analogamente:

$$\sum_{i=1}^r h_{ik} = \frac{1}{N} n_k = \nu_k$$

Variabili indipendenti

■ Se le due variabili $x_1, x_2, \dots, x_r, y_1, y_2, \dots, y_s$ sono INDIPENDENTI, allora la frequenza del contemporaneo verificarsi di misure nelle caselle x_i, y_k è il prodotto delle frequenze del singolo verificarsi x_i e y_k :

$$h_{ik} = \mu_i \nu_k$$

Caso continuo

■ Nel caso continuo, per le densità di probabilità marginali $f_1(x), f_2(y)$ è:

$$dP_{xy} = dP_x dP_y$$

cioè $f(x, y) dx dy = f_1(x) dx f_2(y) dy$
e quindi $f(x, y) = f_1(x) f_2(y)$

Se le x, y sono indipendenti la *COVARIANZA* è nulla

$$\sigma_{xy} = 0$$

- In generale avremo a che fare con variabili aleatorie dipendenti fra loro, ovvero CORRELATE e quindi con covarianza non nulla.
- Questo accadrà sempre per le coordinate dei vertici di una rete topografica, mentre supporremo che le osservazioni effettuate siano indipendenti fra loro (incorrelate).

Funzioni di variabili statistiche

- Le coordinate di un caposaldo sono funzioni di angoli, distanze, dislivelli.
- Sia $F(x)$ una funzione deterministica della variabile statistica x , con densità di probabilità g (F).
- Sia $f(x)$ la densità di probabilità della x .
- La varianza è uguale al valore quadratico medio meno il quadrato della media:

$$\sigma^2 = m_2 - m_1^2$$

- Sia s variabile statistica bidimensionale funzione di due variabili x, y :

$$s = x + y \quad m_1 s = m_1 x + m_1 y$$

Additività della media

- Varianza di s :

$$\sigma_s^2 = m_{2s} - m_{1s}^2$$

- Se le variabili x, y sono indipendenti:

$$\sigma_s^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2$$

- In generale se:

$$s = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + \dots$$



$$\sigma_s^2 = a_1^2 \sigma_{x1}^2 + a_2^2 \sigma_{x2}^2 + a_3^2 \sigma_{x3}^2 + \dots$$

Legge di propagazione della varianza per v.s. indipendenti

Legge di propagazione della varianza

- Se x, y sono non indipendenti ($\sigma_{xy} \neq 0$)

sia

$$s = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_r x_r$$



$$\sigma_s^2 = \sum_{i=1}^r a_i^2 \sigma_{xi}^2 + 2 \sum_{i,j=1}^r a_i a_j \sigma_{xixj}$$

Formulazione generale della Legge di propagazione della varianza.

Si abbia

$$\begin{aligned}u &= a_1x + b_1y \\ v &= a_2x + b_2y\end{aligned}$$

con x, y indipendenti

si ha:

$$\sigma_{u,v} = a_1a_2\sigma_x^2 + b_1b_2\sigma_y^2 \quad \text{covarianza}$$

In forma matriciale:

$$\begin{vmatrix} \sigma_u^2 & \sigma_{uv} \\ \sigma_{uv} & \sigma_v^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \sigma_x^2 & 0 \\ 0 & \sigma_y^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \quad \text{Matrice di varianza-covarianza}$$

■ Generalizzando:

$$u = a_{11}x_1 + a_{12}x_2$$

$$v = a_{21}x_1 + a_{22}x_2$$

$$U = A X$$

Matrice di varianza-covarianza delle u, v

$$\Sigma_{uv} = A \Sigma_{xy} A^T \quad A^T \text{ trasposta di } A$$

Questa relazione è valida anche se $\sigma_{xy} \neq 0$, ovvero per variabili x, y non indipendenti.

Problema inverso

■ Il sistema:

$$a_1x + b_1y = L_1$$

$$a_2x + b_2y = L_2$$

$$AX = L$$

è risolto:

$$X = A^{-1}L$$

matrice di varianza-covarianza della x, y

$$\Sigma_{xy} = A^{-1} \Sigma_{uv} (A^{-1})^T$$

con:

$$\Sigma_{uv} = \begin{vmatrix} \sigma_u^2 & \sigma_{uv} \\ \sigma_{uv} & \sigma_v^2 \end{vmatrix}$$

Stima del valore vero di una grandezza x

- Siano $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ i risultati di n misurazioni di una grandezza x , eseguite in ambiente costante con il medesimo strumento ed operatore.
- Tali risultati variano tra loro in maniera aleatoria.
- Qual è la stima più attendibile del valore (vero) della grandezza x , determinabile in base alle misure $x_1, x_2, \dots, x_n$?
- Sia $\underline{x}$ tale stima più attendibile. Chiamiamo errori o scarti le differenze:
 $v_1 = x_1 - \underline{x}, v_2 = x_2 - \underline{x}, v_3 = x_3 - \underline{x} \dots$

- **Postulato di Legendre o dei Minimi Quadrati:**

$\underline{x}$ deve essere tale che

$$\Sigma v_i^2 = \min$$

- Postulato di Gauss o della media:
 $\underline{x}$ è la media aritmetica delle $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Postulato della Massima Verisimiglianza:

Si basa sul postulato che le misure uscite dal processo di misurazione sono, in quanto uscite ovvero realizzate, anche le più probabili.

Ciascuna delle misure $x_1, x_2, \dots, x_n$, rappresenta la variabile statistica x e ne è una misura; quindi la n -pla

$$x_1, x_2, \dots, x_n,$$

può essere vista come la realizzazione, ovvero la misura, di una v.s. n -dimensionale $x_1, x_2, \dots, x_n$.

- Le $x_1, x_2, \dots, x_n$, hanno ciascuna la stessa distribuzione di probabilità della x e quindi la stessa densità di probabilità $P(x)$, con le stesse medie e varianze.

Se le misure sono indipendenti fra loro allora anche le v.s. componenti $x_1, x_2, \dots, x_n$ sono indipendenti; allora la densità di probabilità della variabile n-dimensionale è il prodotto di quelle delle sue componenti:

$$P(x_1, x_2, \dots, x_n) = P(x_1) P(x_2) P(x_3) \dots P(x_n)$$

La $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ è detta **VERISIMIGLIANZA**.

Il prodotto $P(x_1) P(x_2) P(x_3) \dots P(x_n)$, nel quale entrano le misure effettivamente uscite, è, per postulato, il massimo valore della probabilità o verisimiglianza P .

Compensazione di reti lineari e non lineari

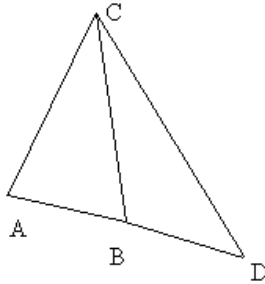
Il caso dell'intersezione in avanti

Il caso della rete di livellazione

Intersezione in avanti

- C vertice incognito

A, B, D hanno coordinate note



$$\sqrt{(XC - XA)^2 + (YC - YA)^2} = \overline{AC}$$

$$\sqrt{(XC - XB)^2 + (YC - YB)^2} = \overline{BC}$$

$$\sqrt{(XC - XD)^2 + (YC - YD)^2} = \overline{DC}$$

- Le equazioni vanno linearizzate, inoltre in base alle prime due equazioni si può ottenere una soluzione XC, YC in base alla prima e alla terza una seconda soluzione ed infine in base alla seconda ed alla terza, una terza soluzione.
- Queste soluzioni sarebbero uguali fra loro solo in caso di misure AC, BC, DC idealmente esatte (prive di errori sistematici ed accidentali).
- Il problema è quello di determinare la soluzione più attendibile.
- Il problema viene risolto introducendo degli scarti incogniti v_1, v_2, v_3 da aggiungere al termine noto di ciascuna equazione.
- Essi sono gli errori delle misure, incogniti ed accidentali

$$\sqrt{(XC - XA)^2 + (YC - YA)^2} = \overline{AC} + v_1$$

$$\sqrt{(XC - XB)^2 + (YC - YB)^2} = \overline{BC} + v_2$$

$$\sqrt{(XC - XD)^2 + (YC - YD)^2} = \overline{DC} + v_3$$

cui si aggiunge la condizione:

$$v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = \min$$

- Le equazioni vengono prima *linearizzate* sostituendo a quelle originali, uno *sviluppo polinomiale di Taylor* arrestato ai termini lineari ed iterando il calcolo

$$f(XC, YC) = \sqrt{(XC - XA)^2 + (YC - YA)^2}$$

- $XC0, YC0$ siano dei valori approssimati di C, ottenuti ad es. dalla soluzione di una delle intersezioni semplici.

$$f(XC, YC) = f(XC0, YC0) + \left(\frac{\partial f}{\partial XC} \right)_{XC0, YC0} (XC - XC0) + \left(\frac{\partial f}{\partial YC} \right)_{XC0, YC0} (YC - YC0)$$

$f(XC0, YC0)$ è la distanza AC calcolata tra A ed il punto prossimo $(XC0, YC0) \rightarrow AC0$

Ponendo:

$$\begin{aligned} x &= XC - XC0 & a_1 &= \left(\frac{\partial f}{\partial XC} \right)_{XC0, YC0} \\ y &= YC - YC0 & b_1 &= \left(\frac{\partial f}{\partial YC} \right)_{XC0, YC0} \end{aligned}$$

- Considerando anche le altre 2 equazioni si arriva al *sistema lineare*:

Negli errori v si possono includere anche i resti dei polinomi di Taylor.

$$\begin{aligned} a_1 x + b_1 y &= \overline{AC} - \overline{AC0} + v_1 \\ a_2 x + b_2 y &= \overline{BC} - \overline{BC0} + v_2 \\ a_3 x + b_3 y &= \overline{DC} - \overline{DC0} + v_3 \end{aligned}$$

- Con notazione matriciale, il sistema diventa:

$$AX = L + v \quad A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} AC - AC0 \\ BC - BC0 \\ DC - DC0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{bmatrix}, \quad v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

$$v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 \rightarrow v^T v = \min$$

- La soluzione è data da:

$$X = N^{-1} A^T L$$

$$N = A^T A$$

Introducendo i **pesi**:

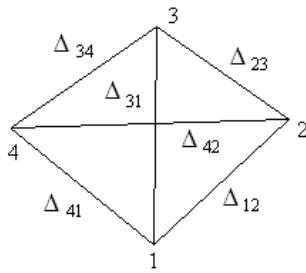
$$P_i = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_i^2}$$

$$X = N^{-1} A^T P L$$

$$N = A^T P A$$

$$v^T P v = \min$$

Rete di livellazione



$$Q_1 - Q_2 = \Delta_{12}$$

$$Q_2 - Q_3 = \Delta_{23}$$

$$Q_3 - Q_4 = \Delta_{34}$$

$$Q_4 - Q_1 = \Delta_{41}$$

$$Q_4 - Q_2 = \Delta_{42}$$

$$Q_3 - Q_1 = \Delta_{31}$$

Matrice dei coefficienti:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- I termini della prima colonna risultano però combinazione lineare delle altre colonne la matrice A risulta quindi singolare

$$\begin{aligned} -Q_2 &= \Delta_{12} - \overline{Q_1} \\ Q_2 - Q_3 &= \Delta_{23} \\ Q_3 - Q_4 &= \Delta_{34} \\ Q_4 &= \Delta_{41} + \overline{Q_1} \\ Q_4 - Q_2 &= \Delta_{42} \\ Q_3 &= \Delta_{31} + \overline{Q_1} \end{aligned}$$

- Le soluzioni risulterebbero indeterminate → si vincola la rete attribuendo una quota prefissata ad uno dei vertici

$$AQ = \Delta + v$$

$$v^T P v = \min$$

In questo caso non occorre iterare il calcolo poiché le equazioni sono lineari.

Si usa tuttavia anche per il controllo di errori grossolani introdurre quote approssimate:

$$\overline{\overline{Q_2}}, \overline{\overline{Q_3}}, \overline{\overline{Q_4}}$$

e scrivere le equazioni nelle incognite:

$$\begin{aligned} q_2 &= Q_2 - \overline{\overline{Q_2}} \\ q_3 &= Q_3 - \overline{\overline{Q_3}} \\ q_4 &= Q_4 - \overline{\overline{Q_4}} \end{aligned}$$

Le equazioni diventano:

$$\begin{aligned} q_2 &= \Delta_{12} - \overline{Q_1} + \overline{\overline{Q_2}} \\ q_2 - q_3 &= \Delta_{23} - \overline{Q_2} + \overline{\overline{Q_3}} \\ q_3 - q_4 &= \Delta_{34} - \overline{Q_3} + \overline{\overline{Q_4}} \\ q_4 &= \Delta_{41} + \overline{Q_1} - \overline{\overline{Q_4}} \\ q_4 - q_2 &= \Delta_{42} - \overline{Q_4} + \overline{\overline{Q_2}} \\ q_3 &= \Delta_{31} + \overline{Q_1} - \overline{\overline{Q_3}} \end{aligned}$$

- La matrice A non cambia mentre cambia il vettore dei termini noti

$$Aq = \Delta + v$$

$$v^T P v = \min$$

il calcolo viene *iterato* come nel caso dell'intersezione in avanti.