# Applicazione dell'equazione per la conservazione della vorticità alla scala sinottica: Onde di Rossby in evoluzione

Si consideri il moto tipico del flusso occidentale alla scala sinottica delle medie latitudini il quale è caratterizzato dalle onde di Rossby.

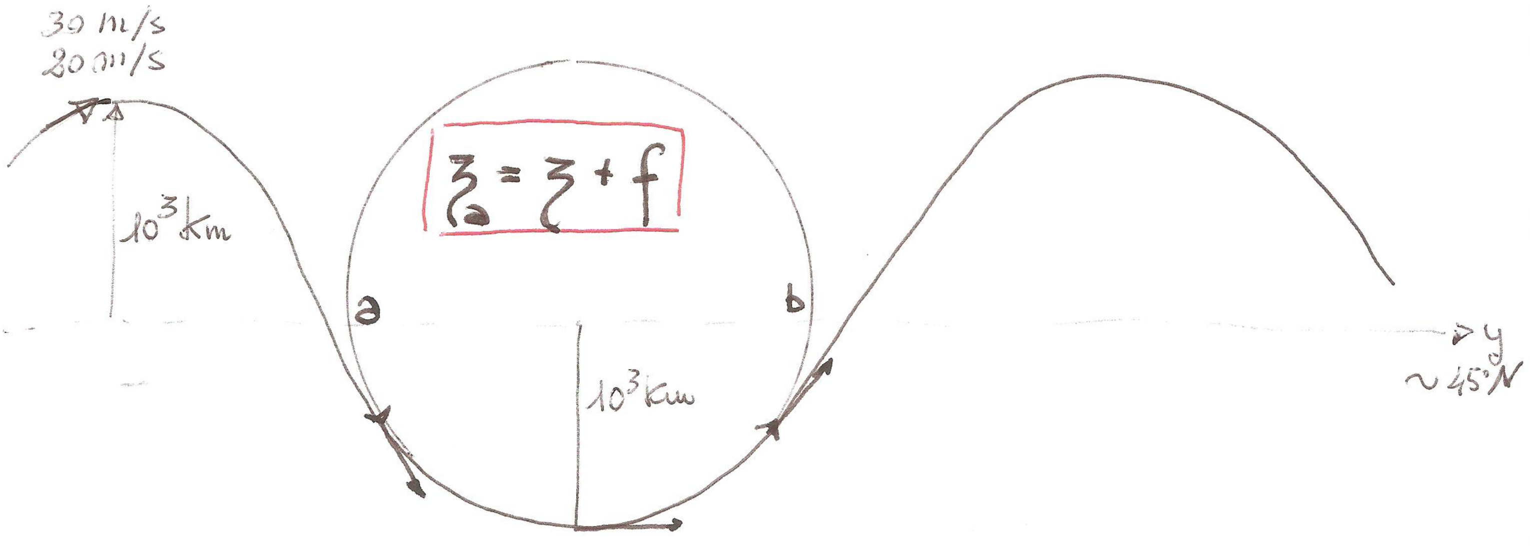
Visto che le velocità ed i campi termici e di pressione sono giacenti su un piano che è pressoché ortogonale alla verticale l'equazione per la conservazione della vorticità viene studiata nella sua unica componente non nulla cioè quella verticale la quale, per consuetudine si indica con la lettera dell'alfabeto greco $\boxed{\zeta = \omega_z}$

Inoltre si suppone quanto segue:

a) il fluido è in equilibrio idrostatico;

b) il moto è a divergenza nulla.

Verificando gli ordini di grandezza dei contributi alla vorticità assoluta per questo sistema si ipotizza quanto si evince dalla fenomenologia che viene illustrata qui sotto.




Velocità del vento $\sim 20\,ms^{-1} - 30\,ms^{-1}$ se siamo a 500 hPa

Raggi di curvatura di circa $10^3$ km e medie latitudini

Si tenga presente che la componente verticale della vorticità assoluta è stata scritta utilizzando la definizione del parametro di Coriolis, infatti

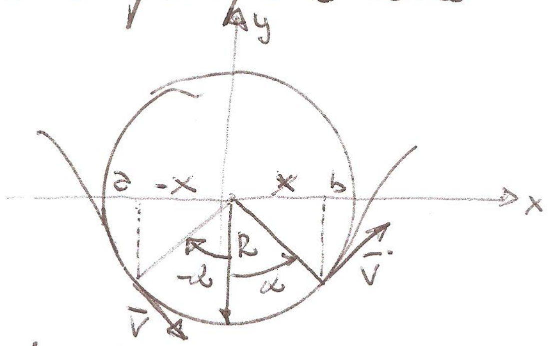
$$2\bar{\Omega} = \bar{i}\,(0) + \bar{j}\,(\underbrace{2\Omega\cos\varphi}_{f^*}) + \bar{k}\,(\underbrace{2\Omega\sin\varphi}_{f})$$

Quindi lo studio della variazione della componente verticale della vorticità assoluta riguarda la derivata

$$\boxed{\frac{d}{dt}(\zeta+f) = \frac{d\zeta}{dt} + \frac{df}{dt}}$$

che vanno valutati per comprendere se uno è preponderante in quanto a modulo.

Ricordando $\boxed{\zeta := \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}}$ si può valutare l'ordine di grandezza della vorticità relativa nel tratto compreso tra a e b della traiettoria utilizzando la proiezione della velocità nel sistema di riferimento qui di seguito riportato in cui




$$\boxed{\begin{array}{ll} x = R\sin\alpha & u = V\cos\alpha \\ y = -R\cos\alpha & v = V\sin\alpha \end{array}}$$

(Proposto come esercizio il calcolo di $\zeta$)

Oppure osservando che, se la traiettoria considerata può considerarsi come parte di una traiettoria circolare di raggio $R \simeq 10^3$ km e velocità uniforme lungo la circonferenza, la vorticità si può calcolare come rapporto tra circuitazione lungo la circonferenza e area del cerchio

$$\boxed{\zeta = \frac{2\pi R V}{\pi R^2} = 2\frac{V}{R}}$$ da cui $$\zeta \simeq 2\cdot\frac{25\,ms^{-1}}{10^6\,m} = 5\cdot 10^{-5}\,s^{-1}$$

avendo assunto per il modulo V un valore medio tra $20\,ms^{-1}$ e $30\,ms^{-1}$ e raggio $R \simeq 10^3$ km.

Si noti che $\xi$ non varia lungo la traiettoria seguita dal volume d'aria portato:

$$\boxed{\frac{d\xi}{dt} = \frac{d}{dt}\left(2\frac{v}{R}\right) = 0}$$

quindi l'unico contributo alla variazione della vorticità viene dal fatto che, spostandosi lungo la direzione $y$ il volume d'aria assume valori di $f$ che cambiano, in funzione della latitudine.

Quindi
$$\boxed{\frac{d\xi_a}{dt} = \frac{d\xi}{dt} + \frac{df}{dt} = \frac{df}{dt}}$$

L'equazione per la conservazione della vorticità diventa

$$\boxed{\frac{df}{dt} = -\xi_a(\bar\nabla\cdot\bar v) + \underbrace{(\bar\omega\cdot\bar\nabla)\bar v\Big|_z}_{\text{solo componente } z} - R\,\bar\nabla T \times \frac{\bar\nabla P}{P}}$$

Dalla ipotesi b) si ha $(\bar\nabla\cdot\bar v)=0 \Rightarrow \xi_a(\bar\nabla\cdot\bar v)=0$ quindi non si hanno contributi conseguenti a convergenze o divergenze del moto.

Per quanto riguarda i termini di tilting e stretching, la componente lungo $z$ risulta essere

$$(\bar\omega\cdot\bar\nabla)\bar v\Big|_z = \omega_x\frac{\partial w}{\partial x} + \omega_y\frac{\partial w}{\partial y} + \underset{\substack{\parallel\\ \xi}}{\omega_z}\frac{\partial w}{\partial z}$$

ma essendo $\omega_x = \omega_y = 0$ i primi due sono nulli così pure il terzo in quanto la condizione di idrostaticità implica $w = 0$.

L'ordine di grandezza del termine dipendente dal parametro di Coriolis è stimato osservando che

$$\boxed{\frac{df}{dt}} = \frac{df}{dy}\cdot\frac{dy}{dt} = \boxed{\beta\cdot v} \quad \text{essendo} \quad \boxed{\beta := \frac{df}{dy} \text{ e } v := \frac{dy}{dt}}$$

Considerando per $\beta$ il valore tipico alla latitudine di $45°$ e per $v \lesssim V = 25\, m s^{-1}$ si ha

$$\boxed{\frac{df}{dt}} = \beta\cdot v \lesssim 10^{-11}\cdot m^{-1}s^{-1}\cdot 2.5\cdot 10\, m s^{-1} = \boxed{2.5\cdot 10^{-10}\, s^{-2}}$$

Ne consegue che l'unico addendo non nullo dell'equazione di vorticità, al secondo membro, deve avere lo stesso ordine di grandezza; verifichiamolo sostituendo a ciascun elemento che lo compone valori tipici della scala sinottica

$\bar\nabla T \simeq 10\,°C$ in $10^3\,km$ come limite superiore
$\bar\nabla p \simeq 50\, hPa$ in $10^3\,km$ come valore tipico a $500\, hPa$
$R \simeq 288\, J kg^{-1} K^{-1}$

Quindi $\boxed{\left| -R\,\bar\nabla T \times \frac{\bar\nabla p}{p} \right|} \simeq 288\, J kg^{-1} K^{-1}\, \frac{10}{10^6}\, km^{-1}\, \frac{50\, hPa}{10^6\, m}\, \frac{\sin(\alpha)}{500\, hPa}$

$\simeq \boxed{2.8\cdot 10^{-10} |\sin\alpha|\, s^{-2}}$

dove $\alpha$ è l'angolo formato dai gradienti $\bar\nabla T$ e $\bar\nabla p$

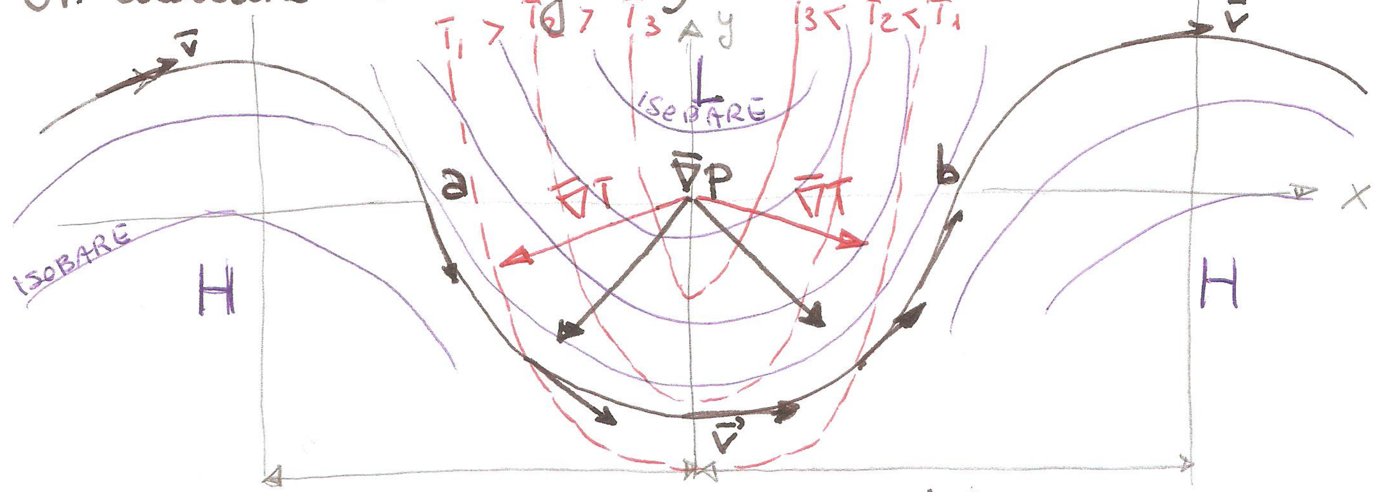
Quindi gli ordini di grandezza sono confrontabili se il $\sin\alpha$ si mantiene significativamente diverso da zero.

Questo implica che un moto ondulatorio alla scala sinottica e alle medie latitudini come quello osservato e definito onde di Rossby ha motivo di esistere solo se l'atmosfera è baroclina.

Entriamo nei dettagli del bilancio indicato dall'equazione

$$\beta v = \frac{df}{dt} = -R\,\bar{\nabla} T \times \frac{\bar{\nabla} p}{p}$$

In ciascuno delle regioni rilevanti dell'onda




$$\frac{df}{dt} < 0 \qquad\qquad \frac{df}{dt} > 0$$

$$\beta > 0 \quad v \leq 0 \qquad\qquad \beta > 0 \quad v \geq 0$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$-R\bar{\nabla} T \times \frac{\bar{\nabla} p}{p} < 0 \qquad\qquad -R\bar{\nabla} T \times \frac{\bar{\nabla} p}{p} > 0$$

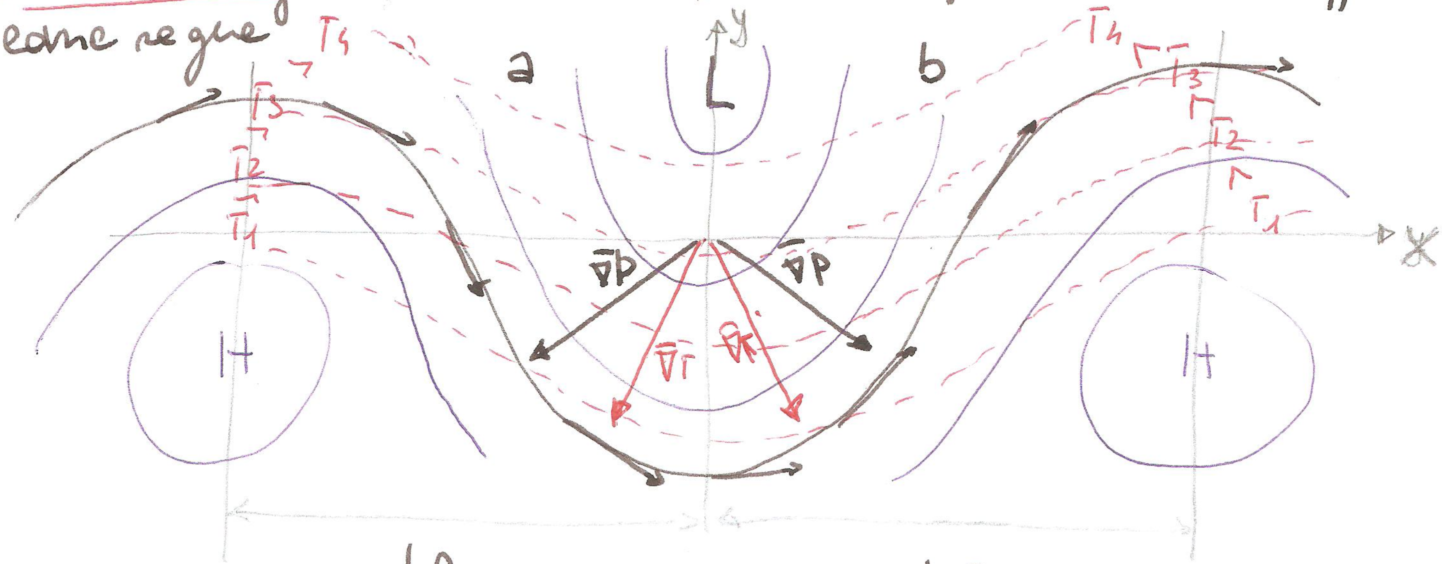
Ricordare che $R > 0$ e che $\bar{\nabla} p$ è dato dalla traiettoria, la quale a scala sinottica è determinato dal bilancio geostrofico, o quasi geostrofico, per cui $\bar{V} \perp \bar{\nabla} P$.

I gradienti termici nelle regioni a e b debbono soddisfare la condizione sul segno di $\frac{df}{dt}$ pertanto sono orientati come in figura. Si evince la struttura del campo termico cioè delle isoterme rispetto le isobare.

Ne consegue che nella regione a) si ha avvezione di aria calda verso aree in cui è presente aria più fredda, mentre nella regione b) si ha avvezione di aria fredda in aree in cui è presente aria più calda.

Conseguentemente le isoterme riducono la loro curvatura e la struttura tende a portarsi in uno stato barotropico.
Nella tendenza alla barotropia il contributo baroclino si riduce di modulo portando anche $\frac{df}{dt} \to 0$ e il flusso tende ad essere zonale privo di ondulazioni

Nell'ipotesi in cui le isoterme abbiano una curvatura minore rispetto alle isobare, la situazione è schematizzata come segue




$$\frac{df}{dt} < 0 \qquad\qquad \frac{df}{dt} > 0$$

$$\beta > 0 \quad v \leq 0 \qquad\qquad \beta > 0 \quad v \geq 0$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$-R\vec{\nabla}T \times \frac{\vec{\nabla}p}{p} > 0 \qquad\qquad -R\vec{\nabla}T \times \frac{\vec{\nabla}p}{p} < 0$$

Questa situazione richiede necessariamente $\boxed{\frac{d\xi}{dt} > 0}$ nella zona a) e simmetricamente $\boxed{\frac{d\xi}{dt} < 0}$ nella zona b)

Nella regione a) si ha avvezione di aria fredda verso le regioni più calde, mentre nella regione b) si ha avvezione di aria calda verso le regioni più fredde. In questo caso, contrariamente al precedente, le isoterme aumentano la curvatura per giungere ad essere parallele alle isobare, quindi avvicinandosi alla situazione barotropica