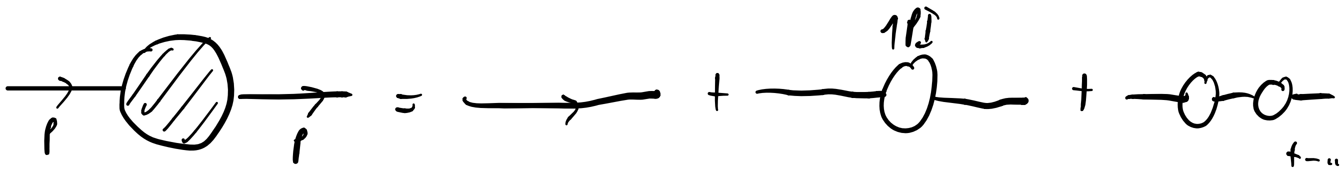
FUNZIONE A 2 PUNTI DELL'ELETTRONE [S.18] [PS.7.1]

Vogliamo calcolare ora

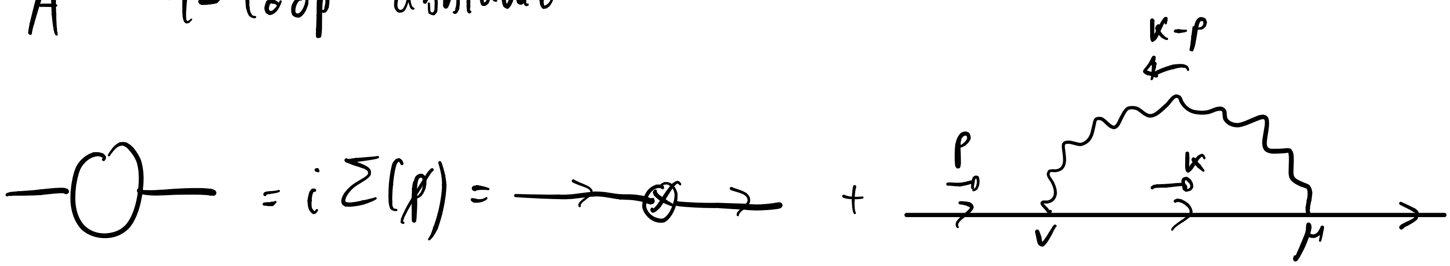
$$\langle \psi(x)\bar{\psi}(y)\rangle = \int \frac{d^4p}{(2\pi)} e^{-ip(x-y)}\, i\, G(\not p) \qquad \text{a 1-loop}$$

$iG(\not p) =$



$$= \frac{i}{\not p - m} + \frac{i}{\not p - m}\, i\Sigma(\not p)\, \frac{i}{\not p - m} + \dots = \frac{i}{\not p - m + \Sigma(\not p)}$$

A 1-loop abbiamo:



$i(\not p\,\delta_2 - (\delta_m + \delta_2)m)$ $\qquad$ $i\Sigma_2(\not p)$

Nella Feynman gauge $(\xi = 1)$

$$i\Sigma_2(\not p) = (-ie)^2 \mu^{4-d} \int \frac{d^dk}{(2\pi)^d} \gamma^\mu\, i\, \frac{\not k + m}{k^2 - m^2 + i\varepsilon} \gamma^\nu \frac{-ig_{\mu\nu}}{(k-p)^2 + i\varepsilon} = \dots =$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{L'algebra spinoriale in } d \text{ dimensioni è:} \\[1em] \gamma^\mu\gamma_\mu = d \qquad\qquad \gamma^\mu\gamma^\nu\gamma_\mu = -(d-2)\gamma^\nu\end{array}}$$

Implementando la parametrizzazione di Feynman, traslando il momento k^μ per ottenere k^2 al propagatore e trascurando poi termini lineari in k al numeratore, otteniamo:

$$\Sigma_2(\not{p}) = -i\, e^2 \mu^{4-d} \int_0^1 dx \left[(d-2)x\not{p} - dm \right] \int \frac{d^dk}{(2\pi)^d} \frac{1}{(k^2 - \Delta + i\varepsilon)^2}$$

$$\Delta = (1-x)(m^2 - x p^2)$$

Facendo la rotazione di Wick e l'integrale abbiamo:

(Wick: $dk^0 \to i\, dk_E^0$, $k^0 \to i k_E^0$, $k^2 \to -k_E^2$)

$$\Sigma_2(\not{p}) = \frac{\alpha}{4\pi} \int_0^1 dx \left[(2-\varepsilon)x\not{p} - (4-\varepsilon)m \right] \left(\frac{2}{\varepsilon} - \gamma + \log 4\pi + \log \frac{\mu^2}{(1-x)(m^2 - p^2 x)} \right)$$

$$= \frac{\alpha}{4\pi} \left[(\not{p} - 4m)\left(\frac{2}{\varepsilon} - \gamma + \log 4\pi \right) - \not{p} + 2m + \int_0^1 dx\, (2x\not{p} - 4m) \log \frac{\mu^2}{(1-x)(m^2 - p^2 x)} \right)$$

Includendo anche i controtermini:

$$\Sigma(\not{p}) = \frac{\alpha}{4\pi}(\not{p} - 4m)\left(\frac{2}{\varepsilon} - \gamma + \log 4\pi + \text{finite} \right) + \overbrace{\not{p}\,\delta_2 - (\delta_m + \delta_2)m}^{\text{controtermini}}$$

$\hookrightarrow$ entra nel propagatore come $iG(\not{p}) = \dfrac{i}{\not{p} - m + \Sigma(\not{p})}$

La massa al polo è DEFINITA come la posizione del polo in p^2 della funzione a 2 punti, ovvero:

$$\boxed{G^{-1}(m_p) \equiv 0} \iff m_p - m + \Sigma(m_p) = 0$$

(ricordiamo che $m \equiv m_R$ è la massa rinormalizzata)

Rinormalizzando nello schema $\overline{MS}$ abbiamo:

$$\boxed{\delta_2^{\overline{MS}} = -\frac{\alpha}{4\pi}\left(\frac{2}{\varepsilon} - \gamma + \log 4\pi\right) \qquad \delta_m^{\overline{MS}} = -\frac{3\alpha}{4\pi}\left(\frac{2}{\varepsilon} - \gamma + \log 4\pi\right)}$$

$$\Rightarrow \Sigma^{\overline{MS}}(\not{p}) = \frac{\alpha}{2\pi}\int_0^1 dx\left[(x\not{p} - 2m)\log\frac{\mu^2}{(1-x)(m^2-p^2x)} - x\not{p} + m\right]$$

$$\Sigma^{\overline{MS}}(m) = -\frac{\alpha}{4\pi}m\left(4 + 3\log\frac{\mu^2}{m}\right)$$

$$\Sigma^{\overline{MS}}(m_p) = \Sigma^{\overline{MS}}(m)\left(1 + \mathcal{O}(e^2)\right) \leftarrow \text{a meno di correzioni 2-loop}$$

$$\Rightarrow \boxed{m^{\overline{MS}} = m_p\left(1 - \frac{\alpha}{4\pi}\left(4 + 3\log\frac{\mu^2}{m_p}\right)\right)}$$

La massa rinormalizzata in uno schema come $\overline{MS}$ ha un renormalization group running in funzione di μ:

$$m^{\overline{MS}} = m(\mu)$$

$$\boxed{\mu \frac{dm(\mu)}{d\mu} = -\frac{3\alpha}{2\pi} m}$$

← Anche le masse hanno un'evoluzione sotto il Gruppo di Rinormalizzazione (RG)

SCHEMA ON-SHELL

Possiamo anche rinormalizzare con uno schema on-shell, imponendo le condizioni:

$$\boxed{\Sigma(m_p) \equiv 0}$$

(ovvero $m \equiv m_p$
massa rinormalizzata = massa al polo)

$$\boxed{\left.\frac{d\Sigma(\not{p})}{d\not{p}}\right|_{\not{p}=m_p} \equiv 0}$$

Ovvero:

$$\Sigma(m_p) = \Sigma_2(m_p) - \delta_m m_p \equiv 0 \Rightarrow \delta_m = \frac{1}{m_p}\Sigma_2(m_p)$$

$$\Sigma'(m_p) = \Sigma_2'(m_p) + \delta_2 \equiv 0 \Rightarrow \delta_2 = -\Sigma_2'(m_p)$$

Si ottiene:

$$\delta_m = \frac{1}{m_p}\Sigma_2(m_p) = -\frac{3\alpha}{4\pi}\left(\frac{2}{\varepsilon} - \gamma + \log 4\pi + \log\frac{\mu^2}{m_p^2} + \frac{4}{3}\right)$$

Nel calcolo di $\Sigma'(p)$ si incontra una divergenza

$$\Sigma = \frac{\alpha}{4\pi}\left[(\not p - 4m)\left(\frac{2}{\varepsilon} - \gamma + \log 4\pi\right) - \not p + 2m + \int_0^1 dx\,(2x\not p - 4m)\log\frac{\mu^2}{(1-x)(m^2 - p^2 x)}\right] + \not p\,\delta_2 + \dots$$

$$\left.\frac{d\Sigma}{d\not p}\right|_{\not p = m} = \gamma^\mu \left.\frac{d\Sigma}{dp^\mu}\right|_{\not p = m_p} = \frac{\alpha}{4\pi}\Bigg[\frac{2}{\varepsilon} - \gamma + \log 4\pi + \delta_2 - 1 + \underbrace{\int_0^1 dx\, 2x\left(\log\frac{\mu^2}{m_p^2} - \log(1-x)^2\right)}_{3 + \log\frac{\mu^2}{m^2}} +$$

$$+ \cancel{m_p}\int_0^1 dx\,(2x - 4)\frac{2\cancel{m_p}x}{\cancel{m_p^2}(1-x)}\Bigg]$$

$$\left[-4\left(\frac{1}{2}(x-1)^2 - \log(x-1)\right)\right]_0^1 \to \text{è divergente!}$$

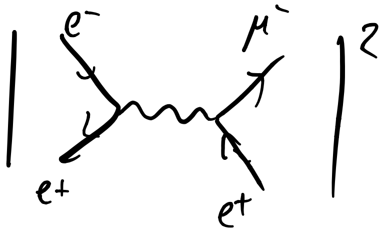
Questa è una DIVERGENZA INFRAROSSA, dovuta alla presenza di una particella a massa nulla: fotone.
Si cancellano quando andiamo a calcolare un'osservabile <u>fisica</u>.

Per semplicità, possiamo temporaneamente regolare questa divergenza dando una massa fittizia e molto piccola al fotone

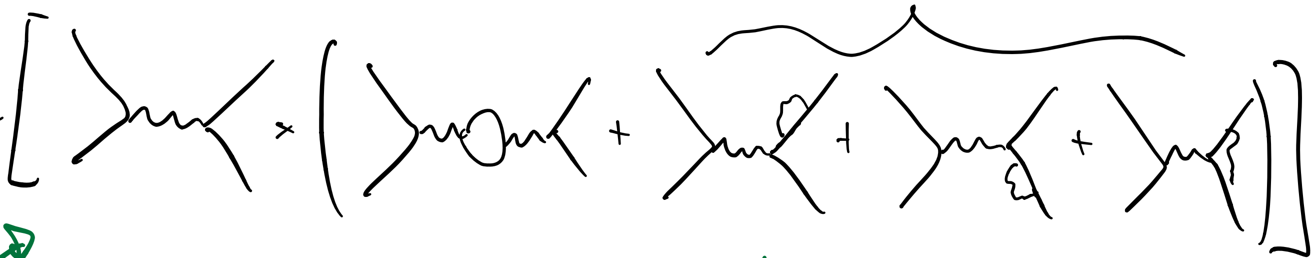
$$\Rightarrow \boxed{\delta_2^{MOM} = -\Sigma_2'(m_p) = -\frac{\alpha}{4\pi}\left(\frac{2}{\varepsilon} - \gamma + \log 4\pi + \log\frac{\mu^2}{m_p^2} + 2 + \log\frac{m_\gamma^2}{m_p^2}\right)}$$

Parentesi su divergenze IR

Calcoliamo $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ includendo correzioni di $O(\alpha)$.

$\sigma(e^+e^- \to \mu^+\mu^-) \propto$  ← livello albero

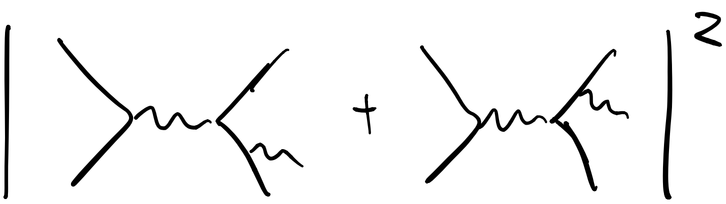
sono divergenti IR

$+ 2\,\mathrm{Re}$ 

interferenza con le correzioni a 1-loop (disegno solo quelle per lo stato finale) "correzioni virtuali"

Fisicamente, però, nel selezionare lo stato finale $\mu^+\mu^-$ devo tenere in considerazione che è impossibile escludere fotoni con energia sufficientemente bassa (radiazione soffice) o collineari a μ^+ o μ^-: non possono essere rilevati quindi neppure esclusi.

Devo quindi anche aggiungere $\sigma(e^+e^- \to \mu^+\mu^-\gamma)$

 ← Questi cancellano le divergenze IR dai diagrammi virtuali.

"correzioni di emissione reale"