Integrali curvilinei e integrali doppi

1 – Integrali curvilinei di prima specie

Prima di iniziare la trattazione di questo argomento diamo la definizione di curva. Per curva nello spazio $\mathbb{R}^3$ intendiamo un sottoinsieme γ di $\mathbb{R}^3$ i cui punti sono definiti da tre funzioni: $x = x(t)$, $y = y(t)$ e $z = z(t)$ con t variabile in un sottoinsieme di $\mathbb{R}$. Quando parliamo di arco di curva intendiamo che t varia in un intervallo $[a,b]$ chiuso e limitato. In genere ci si occupa di archi di curva.
Il sistema di equazioni

$$(1) \qquad \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \qquad \text{con} \qquad t \in [a,b]$$

si chiama ***rappresentazione parametrica di γ***. In generale una curva ha infinite rappresentazioni parametriche. I punti $A \equiv (x(a), y(a), z(a))$ e $B \equiv (x(b), y(b), z(b))$ sono detti ***estremi della curva***.

Una curva γ si dice ***chiusa*** se ogni rappresentazione parametrica è tale che $A \equiv B$.

Una curva γ si dice ***semplice*** se ogni suo punto è estremo di non più di due curve γ_1 e γ_2 contenute in γ.

Se si fa variare il parametro t da a a b, la curva γ viene percorsa in un verso; facendo variare t da b ad a la curva γ viene percorsa in senso opposto. Uno dei due versi si chiama ***positivo***, l'altro ***negativo***. Quando su di una curva γ viene fissato un verso positivo (scelta del tutto arbitraria), la curva si dice ***orientata***. Sono molte le situazioni in cui è importante la scelta del verso di percorrenza della curva.

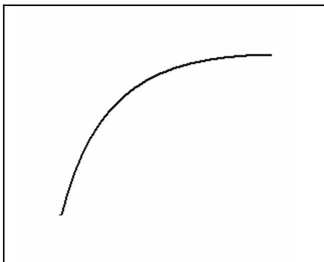

Figura 1 – Arco di curva semplice regolare.

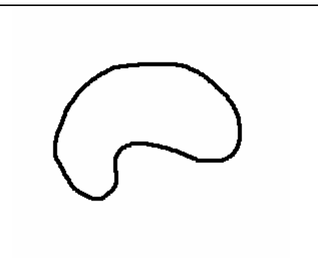

Figura 2 – Curva semplice regolare chisa

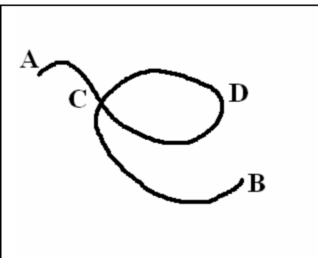

Figura 3 – Curva non semplice

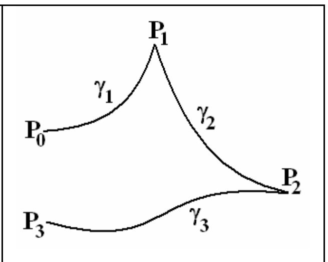

Figura 4 – Curva generalmente regolare

Se le funzioni $x = x(t)$, $y = y(t)$ e $z = z(t)$ sono derivabili in $[a,b]$ e le derivate non sono tutte contemporaneamente nulle, allora la curva di dice ***regolare***. Si ha quindi:

$$x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t) > 0 .$$

In questo caso si diche anche che le (1) costituiscono una rappresentazione regolare della curva regolare γ.
Ricordiamo inoltre che se P_0 è un punto della curva regolare γ, corrispondente al valore t_0, in P_0 esiste la tangente alla curva γ e questa è rappresentata dalle equazioni:

$$\frac{x - x(t_0)}{x'(t_0)} = \frac{y - y(t_0)}{y'(t_0)} = \frac{z - z(t_0)}{z'(t_0)}$$

Si intende che se uno dei denominatori è nullo il rapporto che lo contiene non compare nella catena di uguaglianze[i].

Quando la curva γ è orientata si attribuisce un'orientazione anche alla tangente. Tanto per le idee se la curva è orientata nel verso determinato dai valori crescenti del parametro, sulla tangente alla curva in P_0 si prende come verso positivo quello per il quale i coseni direttori[ii] risultano uguali a:

(2) $$\frac{x'(t_0)}{\sqrt{x'^2(t_0)+y'^2(t_0)+z'^2(t_0)}},\quad \frac{y'(t_0)}{\sqrt{x'^2(t_0)+y'^2(t_0)+z'^2(t_0)}},\quad \frac{z'(t_0)}{\sqrt{x'^2(t_0)+y'^2(t_0)+z'^2(t_0)}}.$$

Supponiamo che l'intervallo $[a,b]$ in cui sono definite le $x=x(t)$, $y=y(t)$ e $z=z(t)$ si possa dividere in un numero finito di intervalli parziali mediante i punti: $a=t_0<t_1<t_2<\ldots<t_{n-1}<t_n=b$, in modo che al variare di t in ognuno di questi intervalli parziali, la curva sia semplice e regolare. Si dice allora che le equazioni rappresentano una curva ***generalmente regolare***.

Sia ora $f(x,y)$ una funzione continua in un insieme $D\subset\mathbb{R}^2$ e sia γ un arco di curva semplice e regolare contenuto in D. Dividiamo γ in N archi disgiunti $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \ldots, \gamma_i, \ldots \gamma_N$ e sia l_i la lunghezza del generico arco γ_i , indichiamo con $\delta = \max\{l_i,\ i = 1,\ldots,N\}$. Si prenda sulla curva γ_i un punto $Q_i(x_i,y_i)$ e si scriva la quantità $\sum_{i=1}^{N} f(x_i,y_i)\cdot l_i$. Sotto le suddette ipotesi esiste il limite $\lim_{\delta\to 0}\sum_{i=1}^{N} f(x_i,y_i)\cdot l_i$ e si scrive

$$\lim_{\delta\to 0}\sum_{i=1}^{N} f(x_i,y_i)\cdot l_i=\int_\gamma f(x,y)\,ds.$$

Chiameremo questo integrale: ***integrale curvilineo della funzione*** $f(x,y)$ ***lungo la curva*** $\boldsymbol{\gamma}$.

Se la curva γ ha una rappresentazione parametrica tipo

(1') $$\begin{cases} x=x(t)\\ y=y(t)\end{cases}\qquad \text{con}\qquad t\in[a,b]$$

allora si può scrivere:

---

[i] Per esempio, se $x'(t_0)=0$ allora l'equazione della tangente è $\dfrac{y-y(t_0)}{y'(t_0)}=\dfrac{z-z(t_0)}{z'(t_0)}$.

[ii] In geometria analitica i coseni direttori di una retta sono i coseni degli angoli convessi che la retta forma con gli assi coordinati. I coseni direttori sono individuati in valore e segno se la retta è orientata. Nello spazio i coseni direttori altro non sono che le componenti del versore associato alla retta. Se una retta r è individuata dal vettore $\vec{v}=(v_x,v_y,v_z)$, i coseni direttori sono:

$$\begin{cases} cos\left(\widehat{rx}\right)=\dfrac{v_x}{\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}}\\ cos\left(\widehat{ry}\right)=\dfrac{v_y}{\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}}\\ cos\left(\widehat{rz}\right)=\dfrac{v_z}{\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}}\end{cases}$$

(3) $$\int_\gamma f(x,y)\,ds = \int_a^b f\big(x(t),y(t)\big)\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\cdot dt\,.$$

Se la curva γ ha una rappresentazione cartesiana del tipo $y = h(x)$, con $x \in [p,q]$ allora si può scrivere:

(4) $$\int_\gamma f(x,y)\,ds = \int_p^q f\big(x,h(x)\big)\sqrt{1+h'^2(x)}\cdot dx\,.$$

Vale la seguente proprietà: se sull'arco di curva regolare γ, di estremi A e B, si fissa un punto P e si indica con γ' l'arco di estremi A e P e con γ'' l'arco di estremi P e B, si ha:

$$\int_\gamma f(x,y)\,ds = \int_{\gamma'} f(x,y)\,ds + \int_{\gamma''} f(x,y)\,ds$$

È facile capire che se $f(x,y) = 1$, l'integrale curvilineo altro non è che la lunghezza della curva e dalla (3) si deduce che

$$ds = \sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,dt$$ [iii].

Se l'integrale curvilineo viene esteso ad una curva γ chiusa, spesso si utilizza il simbolo $\oint_\gamma$.

Prima di fare degli esempi diamo un sistema di coordinate molto utile: il sistema di coordinate polari. Nel piano, un punto $P(x,y)$ può essere individuato anche dalla coppia di numeri (ρ,θ) che sono legati ad x e y dalle relazioni:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\, sen\theta \end{cases}$$

Nella figura è illustrato il legame tra le grandezze. ρ e θ sono chiamate ***coordinate polari nel piano***.

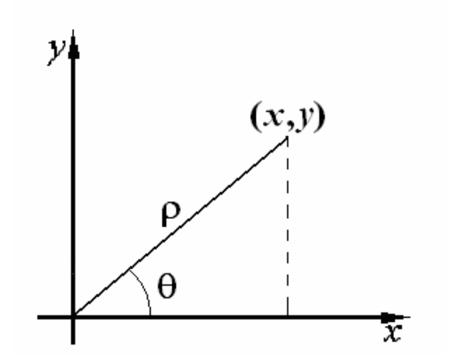

Figura 4 – Coordinate polari e coordinate cartesiane.

le equazioni inverse si ricavano facilmente e si ottiene:

[iii] Da ciò segue, per una curva nello spazio di equazioni parametriche (1), che $\frac{ds}{dt} = \sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}$ e quindi i coseni direttori dell'asse tangente t in un punto generico della curva, possono essere scritti nella forma:

$$\begin{cases} cos\left(\widehat{xt}\right) = \dfrac{x'(t)}{\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}} = \dfrac{dx}{dt}\dfrac{dt}{ds} = \dfrac{dx}{ds} \\ cos\left(\widehat{yt}\right) = \dfrac{y'(t_0)}{\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}} = \dfrac{dy}{dt}\dfrac{dt}{ds} = \dfrac{dy}{ds} \\ cos\left(\widehat{zt}\right) = \dfrac{z'(t_0)}{\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}} = \dfrac{dz}{dt}\dfrac{dt}{ds} = \dfrac{dz}{ds} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ tg\theta = \dfrac{y}{x} \end{cases}$$

Nella seconda equazione si ha anche $x = 0$, $y > 0 \Rightarrow \theta = \dfrac{\pi}{2}$ e $x = 0$, $y < 0 \Rightarrow \theta = \dfrac{3\pi}{2}$.

ESEMPIO 1 – Calcolare l'integrale curvilineo $\displaystyle\int_\gamma \frac{y^2}{x^2+y^2}ds$ dove γ è la circonferenza di centro l'origine e raggio r.
Utilizzando le coordinate polari, le equazioni parametriche della circonferenza sono:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = rsen\theta \end{cases}, \quad 0 \le \theta \le 2\pi;$$

si ha $\begin{cases} x' = -rsen\theta \\ y' = r\cos\theta \end{cases}$ da cui segue, utilizzando la (3):

$$\int_\gamma \frac{y^2}{x^2+y^2}ds = \int_0^{2\pi} \frac{r^2 sen^2\theta}{r^2\cos^2\theta + r^2 sen^2\theta}\sqrt{r^2 sen^2\theta + r^2\cos^2\theta}\,d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{\cancel{r^2}\, sen^2\theta}{\cancel{r^2}} r\,d\theta =$$

$$= r\left[\frac{\theta - sen\theta\cos\theta}{2}\right]_0^{2\pi} = \pi r$$

◊

ESEMPIO 2 –Calcolare l'integrale curvilineo $\displaystyle\int_\gamma xyds$ dove γ è l'arco, contenuto nel primo quadrante, dell'ellisse avente centro nell'origine e semiassi a e b.
Le equazioni parametriche di γ sono: $x = a\cos\theta$, $y = bsen\theta$ con $0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}$. Si ha:

$$\int_\gamma xyds = \int_0^{\frac{\pi}{2}} ab\cos\theta sen\theta\sqrt{a^2 sen^2\theta + b^2\cos^2\theta}\,d\theta = ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta sen\theta\sqrt{a^2 - \left(a^2 - b^2\right)\cos^2\theta}\,d\theta$$

Quest'ultimo integrale si calcola ponendo $u = \cos^2\theta$ da cui segue che $du = -2\cos\theta sen\theta d\theta$ e, per $\theta = 0$, $u = 1$ e per $\theta = \dfrac{\pi}{2}$, $u = 0$. Si ha quindi:

$$ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta sen\theta\sqrt{a^2 - \left(a^2 - b^2\right)\cos^2\theta}\,d\theta = -\frac{ab}{2}\int_1^0 \sqrt{a^2 - \left(a^2 - b^2\right)u}\,du =$$

$$= \frac{ab}{2}\frac{1}{a^2 - b^2}\int_1^0 -\left(a^2 - b^2\right)\left[a^2 - \left(a^2 - b^2\right)u\right]^{1/2} du =$$

$$= \frac{ab}{2}\frac{1}{a^2 - b^2}\left[\frac{2}{3}\left(a^2 - \left(a^2 - b^2\right)\right)^{3/2}\right]_1^0 = \frac{ab\left(a^2 + ab + b^2\right)}{3\left(a + b\right)}$$

◊

ESEMPIO 3 – Calcolare l'integrale curvilineo $\int_\gamma \sqrt{1+x^2+3y}\,ds$ dove γ è l'arco di parabola $y = x^2$, per $0 \le x \le 3$.
In questo caso, essendo γ data in coordinate cartesiane, possiamo utilizzare la (3). Essendo quindi $y' = 2x$, si ha:

$$\int_\gamma \sqrt{1+x^2+3y}\,ds = \int_0^3 \sqrt{1+x^2+3x^2}\sqrt{1+4x^2}\,dx = \int_0^3 \left(1+4x^2\right)dx = 39\,.$$

◊

È naturale l'estensione ad integrali curvilinei su curve nello spazio. Sia $f(x,y,z)$ una funzione continua in un sottoinsieme $D \subset \mathbb{R}^3$ e sia γ un arco di curva semplice e regolare contenuto in *D*, di equazioni (1). Allora

$$\int_\gamma f(x,y,z)\,ds = \int_a^b f\left(x(t),y(t),z(t)\right)\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}\cdot dt\,.$$

ESEMPIO 4 – Calcolare l'integrale curvilineo $\int_\gamma z^2 ds$ dove γ è l'arco di curva di equazioni parametriche $x = cos\,t$, $x = sen\,t$, $z = e^t$ con $0 \le t \le 2\pi$.

Si ha:

$$\int_\gamma f(x,y,z)\,ds = \int_0^{2\pi} e^{2t}\sqrt{sen^2 t + cos^2 t + e^{2t}}\,dt = \int_0^{2\pi} e^{2t}\sqrt{1+e^{2t}}\,dt = \frac{1}{3}\left[\left(1+e^{2t}\right)^{3/2}\right]_0^{2\pi} =$$

$$= \frac{1}{3}\left[\left(1+e^{4\pi}\right)^{3/2} - 2\sqrt{2}\right]$$

◊

Gli integrali curvilinei di cui si è appena parlato a volte vengono chiamati anche di prima specie, per distinguerli da quelli detti di seconda specie di cui tratteremo nel prossimo paragrafo.

Una conseguenza importante è che l'integrale curvilineo di prima specie non dipende dal verso di percorrenza della curva.

2 – Integrali curvilinei di differenziali di coordinate (o di seconda specie)

Sia γ una curva regolare inclusa in un dominio *D* di $\mathbb{R}^2$ di equazioni parametriche (1') sulla quale si sia fissato un verso positivo. Sia *f*(*x*,*y*) una funzione definita e continua in $D \subset \mathbb{R}^2$ e siano $A = \left(x(a), y(a)\right)$ e $B = \left(x(b), y(b)\right)$ gli estremi della curva γ. Si considerino inoltre su γ i punti $P_0 \equiv A, P_1, P_2, ..., P_i, ..., P_{n-1}, P_n \equiv B$. Si indichino con (x_i, y_i) le coordinate di P_i e sia $Q_i = (\xi_i, \eta_i)$ un punto qualunque dell'arco $\overset{\frown}{P_{i-1}P_i}$; infine si indichi con λ la massima lunghezza delle corde $P_0P_1, P_1P_2, ..., P_{n-1}P_n$. Analogamente a quanto fatto in altre situazioni è possibile scrivere le somme:

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)(x_i - x_{i-1}) \qquad \text{e} \qquad \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)(y_i - y_{i-1}).$$

Si dimostra che nelle condizioni date sopra esistono i limiti:

(5) $$\lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)(x_i - x_{i-1})$$

(6) $$\lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)(y_i - y_{i-1})$$

Il limite (5) si chiama ***integrale curvilineo di*** $f(x,y)\,dx$ ***esteso alla curva regolare orientata*** γ e si indica con

$$\int_\gamma f(x,y)\,dx.$$

Il limite (6) si chiama ***integrale curvilineo di*** $f(x,y)\,dy$ ***esteso alla curva regolare orientata*** γ e si indica con

$$\int_\gamma f(x,y)\,dy.$$

Se le (1') forniscono le equazioni parametriche della curva regolare γ, risulta:

$$\int_\gamma f(x,y)\,dx = \int_a^b f[x(t),y(t)]\,x'(t)\,dt$$

se il verso positivo fissato su γ coincide con il verso dei valori crescenti del parametro, mentre risulta:

$$\int_\gamma f(x,y)\,dx = \int_b^a f[x(t),y(t)]\,x'(t)\,dt$$

se il verso positivo fissato su γ è l'opposto del verso dei valori crescenti del parametro.
In modo del tutto analogo si ha

$$\int_\gamma f(x,y)\,dy = \int_a^b f[x(t),y(t)]\,y'(t)\,dt$$

oppure

$$\int_\gamma f(x,y)\,dy = \int_b^a f[x(t),y(t)]\,y'(t)\,dt$$

a seconda del verso positivo fissato su γ e del verso crescente dei valori del parametro.

PROPRIETÀ DEGLI INTEGRALI CURVILINEI DI DIFFERENZIALI DI COORDINATE

I) Se γ è una curva regolare orientata e $-\gamma$ la curva orientata in senso opposto, allora:

$$\int_{-\gamma} f(x,y)\,dx = -\int_\gamma f(x,y)\,dx \qquad \text{e} \qquad \int_{-\gamma} f(x,y)\,dy = -\int_\gamma f(x,y)\,dy.$$

II) Se γ è un segmento orientato avente direzione dell'asse y, si ha:

$$\int_\gamma f(x,y)\,dx = 0$$

analogamente, se γ è un segmento orientato avente direzione dell'asse x, si ha:

$$\int_{\gamma} f(x,y)\,dy = 0 .$$

III) Se $cos(\widehat{xt})$ e $cos(\widehat{yt})$ sono i coseni direttori dell'asse tangente positivo t alla curva γ, allora

$$\int_{\gamma} f(x,y)\,dx = \int_{\bar{\gamma}} f(x,y)\,cos(\widehat{xt})\,ds$$

$$\int_{\gamma} f(x,y)\,dy = \int_{\bar{\gamma}} f(x,y)\,cos(\widehat{yt})\,ds$$

con $\bar{\gamma}$ indichiamo la curva γ non orientata.

IV) Se la curva orientata γ è la somma di due archi γ_1 e γ_2, si ha:

$$\int_{\gamma} f(x,y)\,dx = \int_{\gamma_1} f(x,y)\,dx + \int_{\gamma_2} f(x,y)\,dx$$

$$\int_{\gamma} f(x,y)\,dy = \int_{\gamma_1} f(x,y)\,dy + \int_{\gamma_2} f(x,y)\,dy$$

V) Se $M(x,y)$ e $N(x,y)$ sono due funzioni continue nel dominio D contenente la curva orientata γ, allora:

$$\int_{\gamma} \left[M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy\right] = \int_{\gamma} M(x,y)\,dx + \int_{\gamma} N(x,y)\,dy \ .$$

ESEMPIO 5 – Calcolare $\int_{\gamma} x^2 y dy$ dove γ è l'arco di ellisse di equazione $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ situato nel primo quadrante e percorso in senso antiorario.
Le equazioni parametriche dell'ellisse[iv] data sono: $x = 3cos\,t$ e $y = 2sent$ con $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$ e il senso crescente del parametro t è concorde con il verso positivo indicato. Si ha pertanto:

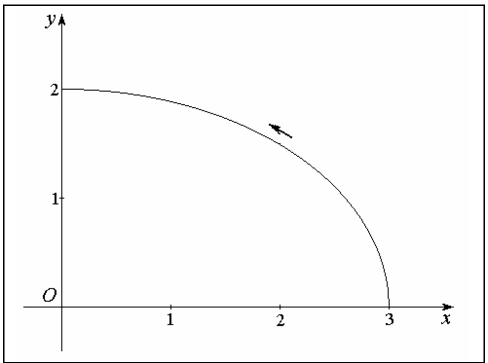

Figura 5 – Curva γ relativa all'esempio 5.

$$\int_{\gamma} x^2 y dy = \int_0^{\pi/2} 9cos^2 t \cdot 2sent \cdot 2cos\,t dt = 36\int_0^{\pi/2} cos^3 t \ sent \ dt = -36\left[\frac{1}{4}cos^4 t\right]_0^{\pi/2} = 9 ;$$

◊

ESEMPIO 6 – Calcolare $\int_{\gamma} \left(y^2 dx + x^2 dy\right)$ dove γ è la curva chiusa, percorsa in senso antiorario, costituita dal segmento OA dell'asse x, $A(1,0)$, dall'arco $\widehat{AB}$ della circonferenza di equazione $x^2+y^2=1$, $B\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ e dal segmento BO (vedi figura 6).

[iv] Più in generale le equazioni parametriche di un'ellisse di equazione $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ sono date da

$$x = a\,cos\,t , \qquad y = bsent \qquad \text{con} \qquad 0 \le t \le 2\pi$$

Poiché la curva γ è costituita da tre tratti si ha:

$$\int_{\gamma}\left(y^2dx+x^2dy\right)=\int_{OA}\left(y^2dx+x^2dy\right)+\int_{\overset{\frown}{AB}}\left(y^2dx+x^2dy\right)+$$
$$+\int_{BO}\left(y^2dx+x^2dy\right)$$

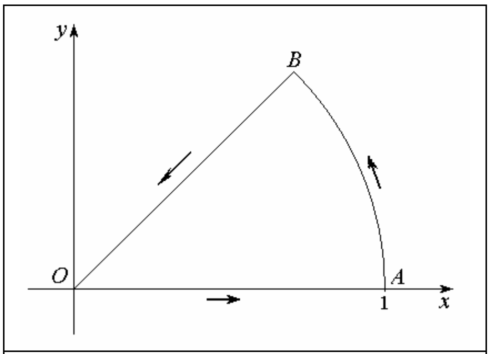

Figura 6 – Curva γ relativa all'esempio 6

Il segmento OA dell'asse x ha equazione $y = 0$, quindi $\int_{OA}\left(y^2dx+x^2dy\right)=0$

Lungo l'arco di circonferenza $\overset{\frown}{AB}$, scrivendola in coordinate polari: $x=cos\,t$ e $y=sen\,t$ con $0\le t\le\frac{\pi}{4}$, si ha:

$$\int_{\overset{\frown}{AB}}\left(y^2dx+x^2dy\right)=\int_0^{\pi/4}\left(-sen^3t+cos^3t\right)dt=-\int_0^{\pi/4}\left(1-cos^2t\right)sen\,t\,dt+\int_0^{\pi/4}\left(1-sen^2t\right)cos\,t\,dt=$$
$$=\left[cos\,t-\frac{1}{3}cos^3t+sen\,t-\frac{1}{3}sen^3t\right]_0^{\pi/4}=\frac{5\sqrt{2}-4}{6}$$

Lungo il segmento BO, essendo $y = x$, si ha:

$$\int_{BO}\left(y^2dx+x^2dy\right)=\int_{\sqrt{2}/2}^{0}\left(x^2dx+x^2dx\right)=2\int_{\sqrt{2}/2}^{0}x^2dx=2\left[\frac{1}{3}x^3\right]_{\sqrt{2}/2}^{0}=-\frac{\sqrt{2}}{6}.$$

Riassumendo:

$$\int_{\gamma}\left(y^2dx+x^2dy\right)=\int_{OA}\left(y^2dx+x^2dy\right)+\int_{\overset{\frown}{AB}}\left(y^2dx+x^2dy\right)+\int_{BO}\left(y^2dx+x^2dy\right)=\frac{5\sqrt{2}-4}{6}-\frac{\sqrt{2}}{6}=\frac{2\left(\sqrt{2}-1\right)}{3}.$$

◊

ESEMPIO 7 – Calcolare $\int_{\gamma}\left(ydx+xydy+xyzdz\right)$ dove g è l'arco di curva definito dalle equazioni parametriche: $x=t$, $y=t^2$, $z=t^3$ con $0\le t\le 1$, orientata nel senso delle t crescenti.

Siamo in presenza di un integrale curvilineo nello spazio, non ci sono particolari difficoltà nell'introduzione della terza coordinata, per cui si ha:

$$\int_{\gamma}\left(ydx+xydy+xyzdz\right)=\int_0^1\left[t^2dt+t\cdot t^2d\left(t^2\right)+t\cdot t^2\cdot t^3d\left(t^3\right)\right]=\int_0^1\left[t^2+2t^4+3t^8\right]dt=$$
$$=\left[\frac{1}{3}t^3+\frac{2}{5}t^5+3\frac{1}{9}t^9\right]_0^1=\frac{16}{15}$$

◊

3 – Integrali contenenti un parametro

Sia $f(x,y)$ una funzione continua in un rettangolo

$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \le x \le b, c \le y \le d \right\}.$$

Assegnato un valore y, la $f(x,y)$ diventa una funzione della sola variabile x. Esiste quindi

$$\int_a^b f(x,y)\,dx$$

Questo integrale ha un valore determinato per ogni y dell'intervallo $[c,d]$; esso definisce quindi una funzione $F(y)$ definita in $[c,d]$ e scriveremo:

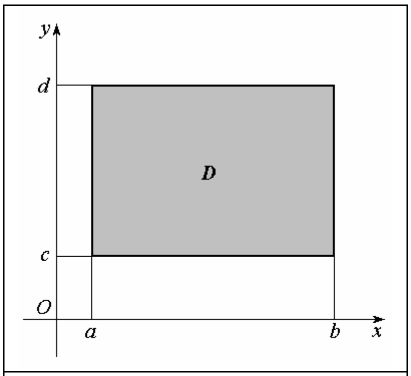

Figura 7 – Dominio rettangolare.

(7) $$F(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx$$

Questo integrale prende il nome di ***integrale definito dipendente dal parametro y.*** Si calcola considerando la y costante.

ESEMPIO 8 – Ad esempio, si ha:

$$F(y) = \int_1^2 \left(xy^2 + x^3 - y \right) dx = \left[\frac{1}{2}x^2y^2 + \frac{1}{4}x^4 - xy \right]_1^2 = \frac{3}{2}y^2 - y + \frac{15}{4}$$

◊

Per la funzione $F(y)$ definita dalla (7) si hanno i seguenti teoremi:

1) Se $f(x,y)$ è continua nel rettangolo I, anche $F(y)$ è continua nell'intervallo $[c,d]$.

2) Se $f(x,y)$ è una funzione continua insieme alla sua derivata parziale prima rispetto a y nel rettangolo I, allora $F(y)$ è derivabile in ogni punto di $[c,d]$ e risulta

$$F'(y) = \frac{d}{dy}\int_a^b f(x,y)\,dx = \int_a^b f_y'(x,y)\,dx,$$

cioè, la derivata dell'integrale rispetto al parametro y si ottiene calcolando l'integrale della derivata rispetto a y della funzione integranda.

ESEMPIO 9 – Calcolare la derivata dell'integrale:

$$F(y) = \int_1^2 \left(xy^2 + x^3 - y \right) dx$$

visto nell'esempio 8.
In base al teorema si ha:

$$F'(y) = \frac{d}{dy}\int_1^2 \left(xy^2 + x^3 - y \right) dx = \int_1^2 \frac{\partial}{\partial y}\left(xy^2 + x^3 - y \right) dx = \int_1^2 (2xy - 1)\,dx = \left[x^2y - x \right]_1^2 = 3y - 1$$

Utilizzando il risultato dell'esempio 8, cioè che $F(y)=\frac{3}{2}y^2-y+\frac{15}{4}$, derivando rispetto a *y*, si ottiene: $F'(y)=3y-1$.

◊

ESEMPIO 10 – Calcolare la derivata dell'integrale:

$$F(y)=\int_0^1 ln(x+y)\,dx \qquad 2\le y\le 3.$$

Si ha:

$$F'(y)=\int_0^1 \frac{\partial}{\partial y} ln(x+y)\,dx=\int_0^1 \frac{1}{x+y}\,dx=\left[ln(x+y)\right]_0^1=ln(1+y)-ln\,y=ln\frac{1+y}{y}.$$

Allo stesso risultato si perviene prima integrando e poi derivando.

◊

La regola di derivazione data sopra può essere generalizzata come segue:
Siano $\alpha(y)$ e $\beta(y)$ due funzioni continue della variabile *y* nell'intervallo [*c*,*d*] e supponiamo che risulti, per ogni *y* di [*c*,*d*]:

$$a\le\alpha(y)\le\beta(y)\le b.$$

Esiste allora per ogni *y* di [*c*,*d*], l'integrale:

$$\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)\,dx$$

ed è una funzione *F*(*y*) della sola variabile *y* definita da

$$F(y)=\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)\,dx$$

Sussiste il seguente teorema:

TEOREMA – Se *f*(*x*,*y*) una funzione continua insieme alla sua derivata parziale prima rispetto a *y* nel rettangolo *I* e se le funzioni $\alpha(y)$ e $\beta(y)$ sono derivabili nell'intervallo [*c*,*d*], allora *F*(*y*) è derivabile e si ha:

$$F'(y)=\frac{d}{dy}\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)\,dx=\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f_y'(x,y)\,dx+f\left[\beta(y),y\right]\beta'(y)-f\left[\alpha(y),y\right]\alpha'(y). \tag{8}$$

ESEMPIO 11 – Calcolare la derivata della funzione:

$$F(y) = \int_{seny}^{tgy} \left(x^2 + y\right) dx .$$

Si ha:

$$F'(y) = \frac{d}{dy} \int_{seny}^{tgy} \left(x^2 + y\right) dx = \int_{seny}^{tgy} \frac{\partial}{\partial y}\left(x^2 + y\right) dx + \left(tg^2 y + y\right) \frac{1}{cos^2\, y} - \left(sen^2 y + y\right) cos\, y =$$

$$= \int_{seny}^{tgy} dx + \left(tg^2 y + y\right) \frac{1}{cos^2\, y} - \left(sen^2 y + y\right) cos\, y = tgy - seny + \frac{tg^2 y + y}{cos^2\, y} - \left(sen^2 y + y\right) cos\, y$$

Se prima integriamo e poi deriviamo si ha:

$$F(y) = \int_{seny}^{tgy} \left(x^2 + y\right) dx = \left[\frac{1}{3} x^3 + xy\right]_{seny}^{tgy} = \frac{1}{3} tg^3 y + ytgy - \frac{1}{3} sen^3 y - yseny$$

e derivando

$$F'(y) = tg^2 y \frac{1}{cos^2\, y} + tgy + \frac{y}{cos^2\, y} - sen^2 y\, cos\, y - seny - y\, cos\, y = tgy - seny + \frac{tg^2 y + y}{cos^2\, y} +$$

$$-\left(sen^2 y - y\right) cos\, y$$

◊

ESEMPIO 12 – Calcolare la derivata di:

$$F(y) = \int_0^y ln\left(1 + x^2 + y^2\right) dx$$

in $y = 1$.

Si ha:

$$F'(y) = 2y \left[\frac{1}{\sqrt{1+y^2}} arctg \frac{x}{\sqrt{1+y^2}}\right]_0^y + ln\left(1 + 2y^2\right) = \frac{2y}{\sqrt{1+y^2}} arctg \frac{y}{\sqrt{1+y^2}} + ln\left(1 + 2y^2\right)$$

E quindi $F'(1) = \sqrt{2} arctg \frac{\sqrt{2}}{2} + ln(3)$.

◊

ESEMPIO 13 – Calcolare le derivate parziali prime della funzione:

$$F(x, y) = \int_y^x e^{-(x-t)^2} dt .$$

In questo caso la funzione F dipende da due parametri (x,y). Le considerazioni fatte sopra valgono ancora.

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\int_y^x \frac{\partial}{\partial x}e^{-(x-t)^2}dt+e^{-(x-x)^2}\cdot 1=\int_y^x -2(x-t)e^{-(x-t)^2}dt+1=\left[-e^{-(x-t)^2}\right]_y^x+1=e^{-(x-y)^2}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=\int_y^x \frac{\partial}{\partial y}e^{-(x-t)^2}dt-e^{-(x-y)^2}\cdot 1=\int_y^x 0dt-e^{-(x-y)^2}=-e^{-(x-y)^2}$$

◊

ESEMPIO 14 – Dimostrare che la funzione: $F(x)=\int_0^{2\pi} e^{xseny}dy$ ha un minimo relativo nel punto x=0.

Bisogna dimostrare che per $x = 0$ la funzione $F(x)$ ha derivata prima nulla e derivata seconda positiva. Si ha:

$$F'(x)=\int_0^{2\pi}\frac{\partial}{\partial x}e^{xseny}dy=\int_0^{2\pi} senye^{xseny}dy$$

$$F''(x)=\int_0^{2\pi}\frac{\partial}{\partial x}\left(senye^{xseny}\right)dy=\int_0^{2\pi} sen^2 ye^{xseny}dy$$

Inoltre:

$$F'(0)=\int_0^{2\pi} senye^{0\cdot seny}dy=\int_0^{2\pi} senydy=\left[-cos\, y\right]_0^{2\pi}=0$$

e

$$F''(0)=\int_0^{2\pi} sen^2 ye^{0\cdot seny}dy=\int_0^{2\pi} sen^2 ydy=\left[\frac{y-seny\cos y}{2}\right]_0^{2\pi}=\pi>0$$

◊

4 – Integrali doppi

È intuitiva l'estensione del concetto di integrale per le funzioni in due variabili considerate in un rettangolo:

$$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : a\le x\le b; c\le y\le d\right\}.$$

Consideriamo una funzione $f(x,y)$ continua nel dominio D; come abbiamo visto nel paragrafo precedente, se consideriamo y come un parametro, possiamo definire la funzione $F(y)=\int_a^b f(x,y)dx$. Se a sua volta la funzione $F(y)$ è integrabile nell'intervallo [c,d], allora definiamo l'***integrale doppio sul dominio*** *D* nel modo seguente:

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\int_c^d dy\int_a^b f(x,y)dx=\int_a^b dx\int_c^d f(x,y)dy.$$

In questo caso l'ordine con cui viene svolta l'integrazione non è importante.

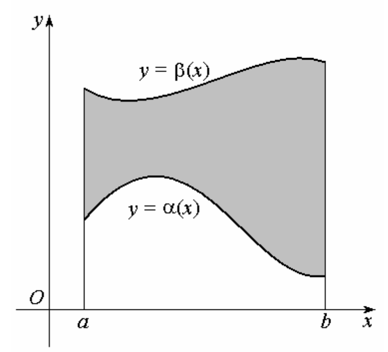

Figura 8 – Dominio normale rispetto all'asse x

Sia ora $D\subset\mathbb{R}^2$ un dominio normale rispetto all'asse x, cioè:

$$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : a\le x\le b; \alpha(x)\le y\le\beta(x)\right\};$$

e sia funzione $f(x,y)$ continua nel dominio D, sempre in relazione a quanto detto nel paragrafo precedente, possiamo definire l'integrale doppio sul dominio D come:

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_a^b dx \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\,dy .$$

In modo analogo, se $D \subset \mathbb{R}^2$ è un dominio normale rispetto all'asse y (vedi figura 3) , cioè:

$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \le y \le b; \alpha(y) \le x \le \beta(y) \right\};$$

e $f(x,y)$ una funzione continua in D, si ha:

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_a^b dy \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)\,dx .$$

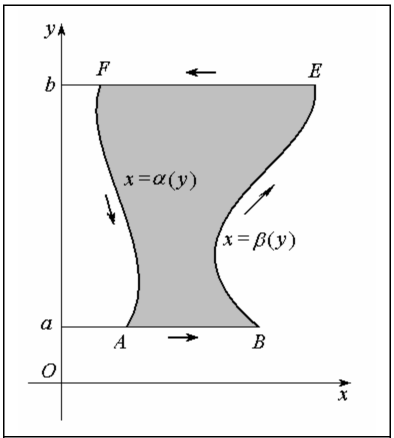

Figura 9 – Dominio normale rispetto all'asse y

Più in generale: sia $D \subset \mathbb{R}^2$ un insieme limitato, chiuso, non vuoto e misurabile[v] e $f(x,y)$ una funzione continua in D. Consideriamo ora una decomposizione dell'insieme D in n porzioni chiuse, limitate e misurabili: $D_1, D_2, \ldots, D_i, \ldots D_n$, non aventi a due a due punti interni comuni. In ciascuno di questi scegliamo un punto arbitrario $P(\xi_i, \eta_i)$ $(i = 1,2,\ldots, n)$ e consideriamo la somma:

(9) $$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\, misD_i .$$

È evidente che assegnato un numero positivo δ, minore del diametro[vi] di D, l'insieme D può essere decomposto in infiniti modi, tra loro diversi, in insieme parziali chiusi e misurabili, non aventi punti in comune che ammettono δ come massimo diametro. La somma (9) è pertanto una funzione di δ, si ha quindi la seguente definizione:

DEFINIZIONE – Se esiste finito il limite

$$\lim_{\delta \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\, misD_i$$

la funzione $f(x,y)$ si dice ***integrabile secondo Riemann***, nell'insieme D, e il valore di questo limite si chiama integrale doppio della funzione $f(x,y)$ esteso all'insieme D e si indica:

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy .$$

PROPRIETA' DEGLI INTEGRALI DOPPI.

I) Se k è un numero qualsiasi e D un insieme limitato chiuso e misurabile, risulta:

$$\iint_D k\,dxdy = k \cdot misD$$

da cui segue che l'area di D si ottiene da:

[v] Il concetto di misurabilità per un insieme è abbastanza complesso ed esistono diverse teorie della misura. Per i nostri scopi è sufficiente un concetto elementare di misura di un insieme che deriva dalla teoria di Peano e Jordan. Un insieme è misurabile se è possibile determinarne l'area; la geometria elementare ci permette di determinare le aree di alcune figure piane (tutte quelle decomponibili in un numero finito di triangoli) e con l'uso degli integrali definiti abbiamo calcolato l'area di trapezoidi e di figure più complesse. Indicheremo con $misD$ la misura dell'area dell'insieme D.
[vi] Il diametro di un insieme D è la massima distanza tra due punti di D.

$$\iint_D dxdy = area\ D$$

II) Se k e h sono due costanti e $f(x,y)$ e $g(x,y)$ due funzioni integrabili nell'insieme D, allora:

$$\iint_D \left[kf(x,y)+hg(x,y)\right]dxdy = k\iint_D f(x,y)\,dxdy + h\iint_D g(x,y)\,dxdy.$$

III) Se $f(x,y)$ è integrabile nell'insieme limitato chiuso e misurabile D, anche $|f(x,y)|$ è integrabile in D, e si ha:

$$\left|\iint_D f(x,y)\,dxdy\right| \le \iint_D |f(x,y)|\,dxdy.$$

IV) Se $f(x,y)$ è integrabile nell'insieme limitato chiuso e misurabile D che è unione degli insiemi D_1 e D_2 anch'essi limitati chiusi e misurabili, privi di punti interni comuni, si ha:

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_{D_1} f(x,y)\,dxdy + \iint_{D_2} f(x,y)\,dxdy$$

V) Teorema della media – Se $f(x,y)$ è integrabile nell'insieme limitato chiuso e misurabile D, risulta:

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \lambda \cdot misD$$

Dove λ è un opportuno numero compreso tra l'estremo inferiore e superiore della $f(x,y)$ in D.

Se $f(x,y)$ è una funzione continua e non negativa in un insieme D limitato chiuso e misurabile, l'integrale doppio, geometricamente, è il volume del cilindroide compreso tra la funzione $f(x,y)$ e il dominio D del piano xy. Si ha anche che, se $f(x,y)$ e $g(x,y)$ sono due funzioni integrabili sull'insieme D limitato chiuso e misurabile e se $f(x,y) < g(x,y)$ in D, allora l'integrale doppio

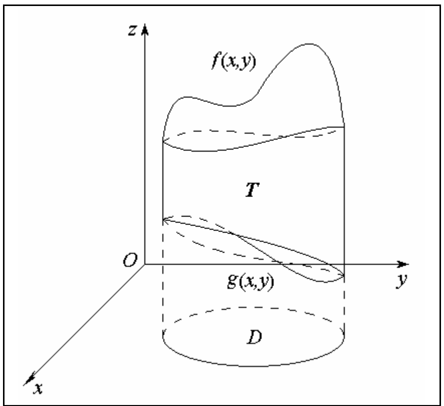

Figura 10 – Significato geometrico dell'integrale doppio.

$$\iint_D \left[f(x,y)-g(x,y)\right]dxdy$$

è il volume dell'insieme

$$T = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : (x,y)\in D\ e\ g(x,y)\le z\le f(x,y)\right\}.$$

ESEMPIO 15 – Calcolare $\iint_D (x+2y)\,dxdy$ dove D è il triangolo di vertici $O(0,0)$, $A(1,0)$, $B(0,1)$.

Il dominio è normale sia rispetto all'asse x, sia rispetto all'asse y, e possiamo scriverlo, considerandolo normale rispetto a x:

$D = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\le x\le 1\ e\ 0\le y\le 1-x\right\}$

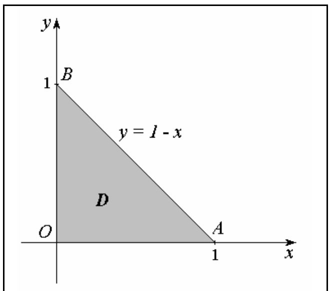

Figura 11 – Dominio relativo all'esempio 15.

$$\iint_D (x+2y)\,dxdy = \int_0^1 dx\int_0^{1-x}(x+2y)\,dy = \int_0^1 dx\left[xy+y^2\right]_0^{1-x} =$$

$$=\int_0^1\left[x(1-x)+(1-x)^2\right]dx=\int_0^1\left[\cancel{x}-\cancel{x^2}+1-2\cancel{x}+\cancel{x^2}\right]dx=\int_0^1[1-x]dx=\left[x-\frac{1}{2}x^2\right]_0^1=\frac{1}{2}.$$

◊

ESEMPIO 16 – Calcolare $\iint_D \frac{y}{1+xy}dxdy$ dove D è il quadrato di vertici $O(0,0)$, $A(1,0)$, $B(1,1)$, $C(0,1)$.
Il dominio è normale sia rispetto all'asse x, sia rispetto all'asse y; si ha:

$$\iint_D \frac{y}{1+xy}dxdy=\int_0^1 dy\int_0^1\frac{y}{1+xy}dx=\int_0^1 dy\left[ln(1+xy)\right]_0^1=\int_0^1 ln(1+y)\,dy=$$
$$=\left[(1+y)ln(1+y)-y\right]_0^1=2\,ln2-1$$

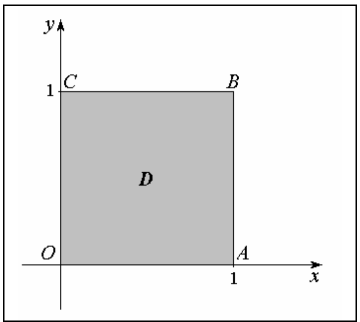

Figura 12 – Dominio relativo all'esempio 16.

◊

ESEMPIO 17 – Calcolare $\iint_D xydxdy$ dove D è la parte di piano racchiusa tra le parabole di equazione $y^2=4x$ e $x^2=4y$.

Il dominio è normale sia rispetto all'asse x, sia rispetto all'asse y; le due parabole si intersecano nei punti $x = 0$ e $x = 4$; il dominio D è quindi definito dalle limitazioni:

$$0\le x\le 4,\quad \frac{x^2}{4}\le y\le 2\sqrt{x}$$

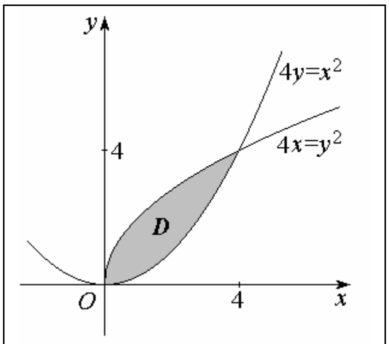

Figura 13 – Dominio relativo all'esempio 17.

Si ha quindi:

$$\iint_D xydxdy=\int_0^4 dx\int_{x^2/4}^{2\sqrt{x}}xydy=\int_0^4 dx\left[\frac{1}{2}xy^2\right]_{x^2/4}^{2\sqrt{x}}=\int_0^4\left[2x^2-\frac{1}{32}x^5\right]dx=\left[\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{192}x^6\right]_0^4=\frac{64}{3}$$

◊

ESEMPIO 18 – Calcolare $\iint_D \sqrt{1-y^2}dxdy$ dove D è il cerchio di centro (1,0) e raggio 1.
Consideriamo il dominio è normale rispetto all'asse y. L'equazione della circonferenza è $(x-1)^2+y^2=1$ e quindi $x=1-\sqrt{1-y^2}$ e $x=1+\sqrt{1-y^2}$. Il dominio D è quindi definito dalle limitazioni:

$$-1\le y\le 1,\quad 1-\sqrt{1-y^2}\le x\le 1+\sqrt{1-y^2}$$

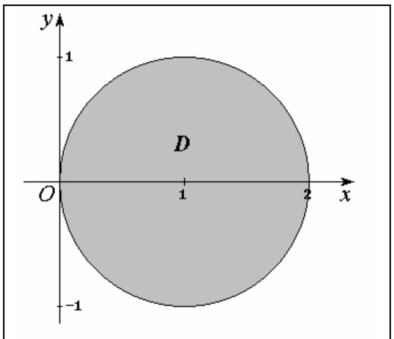

Figura 14 – Dominio relativo all'esempio 18.

Si ha quindi:

$$\iint_D \sqrt{1-y^2}\,dxdy = \int_{-1}^{1}\sqrt{1-y^2}\,dy \int_{1-\sqrt{1-y^2}}^{1+\sqrt{1-y^2}} dx = \int_{-1}^{1}\sqrt{1-y^2}\,dy\,[x]_{1-\sqrt{1-y^2}}^{1+\sqrt{1-y^2}} = \int_{-1}^{1}\sqrt{1-y^2}\,dy\,[x]_{1-\sqrt{1-y^2}}^{1+\sqrt{1-y^2}} =$$

$$= \int_{-1}^{1}\sqrt{1-y^2}\left[\left(1+\sqrt{1-y^2}\right)-\left(1-\sqrt{1-y^2}\right)\right]dy = 2\int_{-1}^{1}\left(1-y^2\right)dy = 2\left[y-\frac{1}{3}y^3\right]_{-1}^{1} = \frac{8}{3}$$

◊

CAMBIAMENTO DI VARIABILE

Il problema del cambiamento di variabili nel caso degli integrali doppi è ben più complesso del caso delle funzioni a una variabile. Consideriamo quindi una funzione $f(x,y)$ definita in un insieme D limitato chiuso e misurabile e supponiamo che le variabili x e y dipendano dalla coppia di variabili u, v, cioè

$$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases}$$

variabili in un dominio T, anch'esso limitato chiuso e misurabile. E siano $x(u,v)$ e $y(u,v)$ funzioni continue con le derivate parziali prime in T.
Si definisce determinante jacobiano delle trasformazioni la funzione

$$J(u,v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}$$

e lo si supponga sempre diverso da zero in T.
Si ha allora:

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_T f\left[x(u,v),y(u,v)\right]\left|J(u,v)\right|dudv .$$

ESEMPIO 19 – Calcolare $\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$ dove D è la semicorona circolare di ordinate non negative di centro nell'origine e raggi 2 e 3.
Effettuiamo una trasformazione in coordinate polari:
$x = \rho\cos\theta$ e $y = \rho sen\theta$. Il determinante jacobiano è quindi:
$J(\rho,\theta) = \begin{vmatrix} cos\,\theta & -\rho sen\theta \\ sen\theta & \rho\,cos\,\theta \end{vmatrix} = \rho\left(cos^2\theta + sen^2\theta\right) = \rho$. Il dominio D viene trasformato nel dominio T delimitato da: $2 \le \rho \le 3$ e $0 \le \theta \le \pi$. Si ha quindi:

$$\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy = \iint_T \rho^2 d\rho d\theta$$

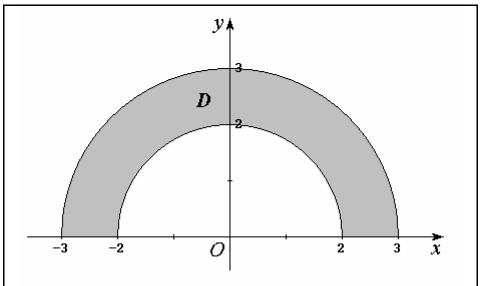

Figura 15 – Dominio relativo all'esempio 19.

da cui segue:

$$\int_2^3 \rho^2 d\rho \int_0^\pi d\theta = \left[\frac{1}{3}\rho^3\right]_2^3 [\theta]_0^\pi = \frac{1}{3}(27-8)\pi = \frac{19}{3}\pi .$$

Si osservi come in questo caso le due variabili siano separabili e quindi gli integrali sono indipendenti, ciò significa che possono essere calcolati indipendentemente l'uno dall'altro.

◊

ESEMPIO 20 – Calcolare $\iint_D (x^2 + y^2)\,dxdy$ dove D è la regione piana data in figura, ovvero la regione limita dall'asse x, dalla circonferenza di centro l'origine e raggio 1 e dalla circonferenza di centro (1,0) e raggio 1.

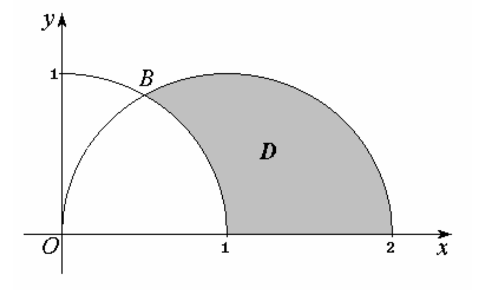

Figura 16 – Dominio relativo all'esempio 20.

Effettuiamo una trasformazione in coordinate polari. La circonferenza di centro (1,0) e raggio 1 ha equazione polare $\rho = 2\cos\theta$, quella di centro l'origine e raggio 1 ha equazione polare $\rho = 1$; inoltre il punto B ha coordinate polari $\left(1, \frac{\pi}{3}\right)$, si ricavano risolvendo il sistema $\begin{cases} \rho = 2\cos\theta \\ \rho = 1 \end{cases}$.

Ricordando che $J(\rho, \theta) = \rho$ si ha:

$$\iint_D (x^2 + y^2)\,dxdy = \int_0^{\pi/3} d\theta \int_1^{2\cos\theta} \rho^3 d\rho = \int_0^{\pi/3} d\theta \left[\frac{1}{4}\rho^4\right]_1^{2\cos\theta} = 4\int_0^{\pi/3} \cos^4\theta d\theta - \frac{1}{4}\int_0^{\pi/3} d\theta$$

Ricordando che $\int \cos^4\theta d\theta = \frac{1}{4}\cos^3\theta \,\mathrm{sen}\theta + \frac{3}{8}\mathrm{sen}\theta\cos\theta + \frac{3}{8}\theta$ si ha:

$$\iint_D (x^2 + y^2)\,dxdy = 4\left[\frac{1}{4}\cos^3\theta\,\mathrm{sen}\theta + \frac{3}{8}\mathrm{sen}\theta\cos\theta + \frac{3}{8}\theta\right]_0^{\pi/3} - \frac{1}{4}[\theta]_0^{\pi/3} = \frac{7\sqrt{3}}{16} + \frac{5\pi}{12}.$$

◊

Come nel caso degli integrali in una sola variabile, è possibile calcolare anche integrali doppi impropri, sia per funzioni che non sono continue in tutti i punti del dominio D (è sufficiente che l'insieme in cui la funzione non è continua abbia misura nulla, per esempio un insieme costituito da un numero finito di punti, ma non ci occuperemo di queste situazioni), sia nel caso in cui il dominio non sia limitato. Di questo secondo caso daremo un esempio importante.

ESEMPIO 21 – Calcolare $\iint_D e^{-(x^2+y^2)}dxdy$ dove D è tutto il piano xy.

Calcoliamo prima $\iint_C e^{-(x^2+y^2)}dxdy$ dove C è il cerchio di centro l'origine e raggio r.

In coordinate polari si ha:

$$\iint_C e^{-(x^2+y^2)}dxdy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^r e^{-\rho^2}\rho d\rho = [\theta]_0^{2\pi}\left[-\frac{1}{2}e^{-\rho^2}\right]_0^r = \pi\left(1 - e^{-r^2}\right).$$

È intuitivo che $\iint_D e^{-(x^2+y^2)}dxdy = \lim_{r\to+\infty}\iint_C e^{-(x^2+y^2)}dxdy$, quindi

$$\iint_D e^{-(x^2+y^2)}dxdy = \lim_{r\to+\infty}\pi\left(1 - e^{-r^2}\right) = \pi.$$

OSSERVAZIONE – Il risultato ottenuto nell'esempio precedente consente di calcolare il valore dell'integrale di Gauss:

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx\,.$$

Indichiamo con Q_l il quadrato del piano xy che ha come estremi opposti i punti $(-l, -l)$ e (l,l), tenendo conto del risultato dell'esempio precedente, possiamo anche scrivere:

$$\iint_D e^{-\left(x^2+y^2\right)}dxdy = \lim_{l\to+\infty}\iint_{Q_l} e^{-\left(x^2+y^2\right)}dxdy$$

Quindi

$$\iint_{Q_l} e^{-\left(x^2+y^2\right)}dxdy = \int_{-l}^{l}dx\int_{-l}^{l}e^{-\left(x^2+y^2\right)}dy = \int_{-l}^{l}e^{-x^2}dx\int_{-l}^{l}e^{-y^2}dy = \left(\int_{-l}^{l}e^{-x^2}dx\right)^2,$$

ma per definizione:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}dx = \lim_{l\to+\infty}\int_{-l}^{l}e^{-x^2}dx = \lim_{l\to+\infty}\sqrt{\iint_{Q_l}e^{-\left(x^2+y^2\right)}dxdy} = \sqrt{\lim_{l\to+\infty}\iint_{Q_l}e^{-\left(x^2+y^2\right)}dxdy} = \sqrt{\iint_D e^{-\left(x^2+y^2\right)}dxdy} = \sqrt{\pi}\,.$$

Essendo poi $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}dx = 2\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx$ si ha:

$$\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,.$$

5 – Formule di Green nel piano e teorema della divergenza

Un insieme $D \subset \mathbb{R}^2$ si chiama ***dominio regolare rispetto all'asse x*** quando:

1) è decomponibile in un numero finito di domini normali D_i rispetto all'asse x, a due a due senza punti in comune, cioè: $D = \bigcup_{i=1}^{n} D_i$ e $D_i \cap D_j = \varnothing$ se $i \neq j$;
2) la frontiera di ciascun dominio D_i (che indicheremo con ∂D_i) è una curva generalmente regolare;
3) l'intersezione delle frontiere di due qualsiasi fra i domini D_i, se non è vuota, è costituita al più da un numero finito di curve generalmente regolari o da un numero finito di punti isolati.

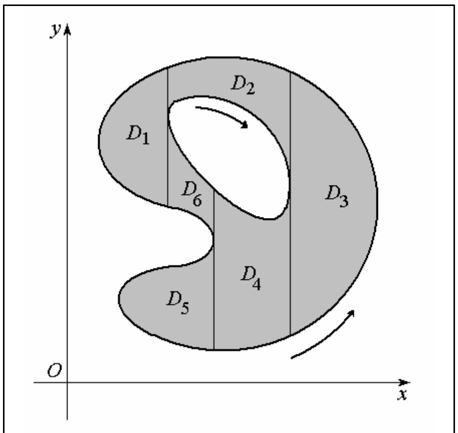

Figura 17 – Dominio regolare rispetto all'asse x.

Nella figura 17 è dato un esempio di dominio regolare rispetto all'asse x.

Scambiando la x con la y si può introdurre il concetto di ***dominio regolare rispetto all'asse y***.
Un dominio D si dirà ***regolare*** se è regolare sia rispetto all'asse x sia rispetto all'asse y.

La frontiera di un dominio regolare (rispetto all'asse x o rispetto all'asse y) è sempre costituita da un numero finito di curve generalmente regolari.

Ogni curva di ∂D può essere percorsa in due versi, quello positivo è quello secondo il quale deve muoversi un osservatore per avere sempre alla sua sinistra l'interno del dominio D (nella figura 1 il verso positivo della frontiera è indicato dalle frecce.

TEOREMA – Se D è un dominio regolare rispetto all'asse y e $f(x,y)$ una funzione continua in D assieme alla sua derivata parziale rispetto a x, frontiera inclusa, sussiste la seguente formula di Green:

(10) $$\iint_D \frac{\partial f}{\partial x} dxdy = \int_{+\partial D} f(x,y)\,dy\,.$$

Analogamente, se D è un dominio regolare rispetto all'asse x e $g(x,y)$ una funzione continua in D assieme alla sua derivata parziale rispetto a y, frontiera inclusa, vale la formula:

(11) $$\iint_D \frac{\partial g}{\partial y} dxdy = -\int_{+\partial D} g(x,y)\,dx\,.$$

DIMOSTRAZIONE – Consideriamo per prima cosa il dominio D normale rispetto all'asse y e supponiamo che abbia una frontiera costituita da curve generalmente regolari:

$$D: \quad a \le y \le b, \qquad \alpha(y) \le x \le \beta(y)$$

con $\alpha(y) < \beta(y)$ internamente ad $[a\ ,\ b,]$. Si ha:

$$\iint_D \frac{\partial f}{\partial x} dxdy = \int_a^b dy \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} \frac{\partial f}{\partial x} dx = \int_a^b \left[f(x,y) \right]_{\alpha(y)}^{\beta(y)} dy =$$

$$= \int_a^b \left[f(\beta(y),y) - f(\alpha(y),y) \right] dy =$$

$$= \int_a^b f(\beta(y),y)\,dy - \int_a^b f(\alpha(y),y)\,dy$$

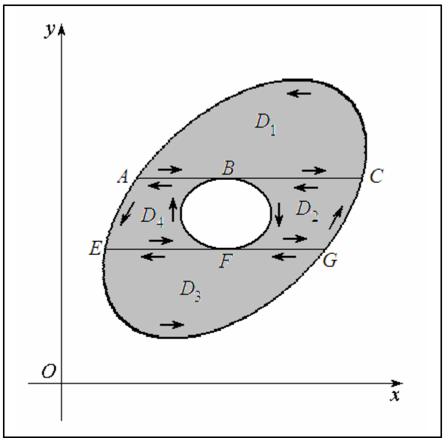

Figura 18 – Figura relativa alla dimostrazione delle formule di Green.

La frontiera di D, percorsa in senso positivo a partire dal punto A (vedi figura 18) si compone delle curve:

- σ_1: il segmento AB di equazione $y = a$ con x che varia tra $\alpha(a)$ e $\beta(a)$, in cui si ha $\int_{\sigma_1} f(x,y)dy = 0$ perchè su σ_1 $dy = 0$;
- σ_2: il tratto di curva di equazione $x = \beta(y)$ con y che varia tra a e b, in cui si ha $\int_{\sigma_2} f(x,y)dy = \int_a^b f(\beta(y),y)dy$;
- σ_3: il segmento EF di equazione $y = b$ con x che varia tra $\beta(b)$ e $\alpha(b)$, in cui si ha $\int_{\sigma_3} f(x,y)dy = 0$ perchè su σ_3 $dy = 0$;
- σ_4: il tratto di curva di equazione $x = \alpha(y)$ con y che varia tra b e a, in cui si ha

$$\int_{\sigma_4} f(x,y)dy = \int_b^a f(\alpha(y),y)dy \,.$$

Pertanto

$$\int_{+\partial D} f(x,y)\,dy = \int_{\sigma_1} f(x,y)\,dy + \int_{\sigma_2} f(x,y)\,dy + \int_{\sigma_3} f(x,y)\,dy + \int_{\sigma_4} f(x,y)\,dy =$$

$$= \int_a^b f(\beta(y),y)\,dy + \int_b^a f(\alpha(y),y)\,dy = \int_a^b f(\beta(y),y)\,dy - \int_a^b f(\alpha(y),y)\,dy$$

Ciò dimostra la (10) nel caso in cui il dominio D è normale rispetto all'asse y.
Resta da dimostrare che la (10) continua a valere per un qualunque dominio D regolare rispetto all'asse y. Per fare ciò, basta osservare che un dominio regolare rispetto all'asse y può essere decomposto in domini D_i normali rispetto all'asse y, e che ci sono tratti delle frontiere dei vari D_i che vendono percorsi una volta in un senso, un'altra volta in senso opposto. Per rendersi conto di ciò consideriamo il dominio D della figura 18, infatti, applicando le formule di Green ai domini normali D_1, D_2, D_3, D_4, si ha:

$$\iint_{D_1} \frac{\partial f}{\partial x} dxdy = \int_{+\partial D_1} f(x,y)\,dy = \int_{AB} f(x,y)\,dy + \int_{BC} f(x,y)\,dy + \int_{\overset{\frown}{CD}} f(x,y)\,dy \,;$$

$$\iint_{D_2} \frac{\partial f}{\partial x} dxdy = \int_{+\partial D_2} f(x,y)\,dy = \int_{\overset{\frown}{BF}} f(x,y)\,dy + \int_{FG} f(x,y)\,dy + \int_{\overset{\frown}{GC}} f(x,y)\,dy + \int_{CB} f(x,y)\,dy \,;$$

$$\iint_{D_3} \frac{\partial f}{\partial x} dxdy = \int_{+\partial D_3} f(x,y)\,dy = \int_{GF} f(x,y)\,dy + \int_{FE} f(x,y)\,dy + \int_{\overset{\frown}{EG}} f(x,y)\,dy \,;$$

$$\iint_{D_4} \frac{\partial f}{\partial x} dxdy = \int_{+\partial D_4} f(x,y)\,dy = \int_{BA} f(x,y)\,dy + \int_{\overset{\frown}{AE}} f(x,y)\,dy + \int_{EF} f(x,y)\,dy + \int_{\overset{\frown}{FB}} f(x,y)\,dy \,.$$

Sommando membro a membro e ricordando che $\int_{+\gamma} f(x,y)\,dy = -\int_{-\gamma} f(x,y)\,dy$ si ha:

$$\iint_D \frac{\partial f}{\partial x} dxdy = \iint_{D_1} \frac{\partial f}{\partial x} dxdy + \iint_{D_2} \frac{\partial f}{\partial x} dxdy + \iint_{D_3} \frac{\partial f}{\partial x} dxdy + \iint_{D_4} \frac{\partial f}{\partial x} dxdy =$$

$$= \cancel{\int_{AB} f(x,y)\,dy} + \cancel{\int_{BC} f(x,y)\,dy} + \int_{\overset{\frown}{CD}} f(x,y)\,dy + \int_{\overset{\frown}{BF}} f(x,y)\,dy + \cancel{\int_{FG} f(x,y)\,dy} +$$

$$+ \int_{\overset{\frown}{GC}} f(x,y)\,dy + \cancel{\int_{CB} f(x,y)\,dy} + \cancel{\int_{GF} f(x,y)\,dy} + \cancel{\int_{FE} f(x,y)\,dy} + \int_{\overset{\frown}{EG}} f(x,y)\,dy +$$

$$+ \cancel{\int_{BA} f(x,y)\,dy} + \int_{\overset{\frown}{AE}} f(x,y)\,dy + \cancel{\int_{EF} f(x,y)\,dy} + \int_{\overset{\frown}{FB}} f(x,y)\,dy$$

$$= \int_{\overset{\frown}{CD}} f(x,y)\,dy + \int_{\overset{\frown}{BF}} f(x,y)\,dy + \int_{\overset{\frown}{GC}} f(x,y)\,dy + \int_{\overset{\frown}{EG}} f(x,y)\,dy + \int_{\overset{\frown}{AE}} f(x,y)\,dy + \int_{\overset{\frown}{FB}} f(x,y)\,dy =$$

$$= \int_{+\partial D} f(x,y)\,dy$$

In ogni punto non angoloso di ∂D si consideri la tangente t orientata secondo il verso positivo e la normale n orientata verso l'interno di D. Si ha, ovviamente $\widehat{tn} = 90°$. Dalla geometria elementare, sugli angoli, si ha:

$$\widehat{xt} = \widehat{yn} \quad \text{e} \quad \widehat{yt} = \widehat{xn} - 180°;$$

e quindi:

$$\cos\widehat{xt} = \cos\widehat{yn} \quad \text{e} \quad \cos\widehat{yt} = \cos\left(\widehat{xn} - 180°\right) = -\cos\widehat{xn}.$$

Dalla definizione dei coseni direttori di un asse orientato segue:

$$\cos\widehat{xn} = -\cos\widehat{yt} = -\frac{dy}{ds}$$

$$\cos\widehat{yn} = \cos\widehat{xt} = \frac{dx}{ds}$$

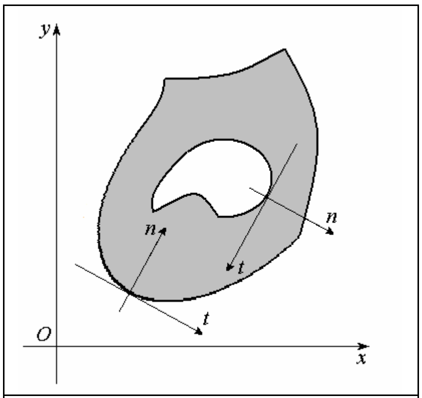

Figura 19 – Asse tangente ed asse normale alla frontiera di un dominio D.

La (10) e la (11) possono quindi essere scritte nella forma:

(12)
$$\iint_D \frac{\partial f}{\partial x}\,dxdy = -\int_{\partial D} f(x,y)\cos\widehat{xn}\,ds.$$

(13)
$$\iint_D \frac{\partial g}{\partial y}\,dxdy = -\int_{\partial D} g(x,y)\cos\widehat{yn}\,ds.$$

NOTA: in questo caso la frontiera di D non è orientata.

ALCUNE CONSEGUENZE DELLE FORMULE DI GREEN NEL PIANO

TEOREMA DELLA DIVERGENZA

Se il dominio D è regolare e se valgono simultaneamente la (10) e la (11) [o la (12) e la (13)], allora sommando membro a membro si ottiene:

(14)
$$\iint_D \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y}\right)dxdy = \int_{+\partial D} \left[f(x,y)\,dy - g(x,y)\,dx\right]$$

oppure

(15)
$$\iint_D \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y}\right)dxdy = -\int_{\partial D} \left[f(x,y)\cos\widehat{xn} + g(x,y)\cos\widehat{yn}\right]ds.$$

Se $\vec{u}$ è un vettore, applicato al punto $P(x,y)$, di componenti $f(x,y)$ e $g(x,y)$, la funzione $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y}$ si chiama ***divergenza del vettore*** $\vec{u}$, e si indica con $div\vec{u}$. Ricordando la definizione dell'operatore nabla, si ha anche $div\vec{u} = \vec{\nabla}\cdot\vec{u} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y}$ (dove il punto sta per il prodotto scalare).

Se indichiamo con $\vec{n}$ il versore normale, in P, alla frontiera di D, orientato verso l'interno di D, si ha: $\vec{n} = \left(\cos\widehat{xn}, \cos\widehat{yn}\right)$. Ne consegue che il prodotto scalare tra $\vec{u}$ e $\vec{n}$ è dato da:

$$\vec{u}\cdot\vec{n} = f(x,y)\cos\widehat{xn} + g(x,y)\cos\widehat{yn}.$$

L'espressione (15) diventa:

(16)
$$\iint_D div\vec{u}\,dxdy = -\int_{\partial D} \vec{u}\cdot\vec{n}\,ds.$$

La relazione (16) esprime il teorema della DIVERGENZA nel piano.

Il secondo membro della (16) si chiama ***flusso del vettore*** $\vec{u}$ ***uscente da*** ∂D.

INTEGRAZIONE PER PARTI

Si può scrivere una sorta di espressione per l'integrazione per parti per gli integrali doppi. Infatti dalla relazione

$$\iint_D \frac{\partial(uv)}{\partial x}dxdy = \iint_D \left(u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial x}\right)dxdy = \int_{+\partial D} u(x,y)v(x,y)\,dy$$

segue:

$$\iint_D u\frac{\partial v}{\partial x}dxdy = \int_{+\partial D} u(x,y)v(x,y)\,dy - \iint_D v\frac{\partial u}{\partial x}dxdy\ .$$

Analogamente da

$$\iint_D \frac{\partial(uv)}{\partial y}dxdy = \iint_D \left(u\frac{\partial v}{\partial y}+v\frac{\partial u}{\partial y}\right)dxdy = -\int_{+\partial D} u(x,y)v(x,y)\,dx$$

segue:

$$\iint_D u\frac{\partial v}{\partial y}dxdy = -\int_{+\partial D} u(x,y)v(x,y)\,dx - \iint_D v\frac{\partial u}{\partial y}dxdy\ .$$

FORMULA DI RIDUZIONE PER GLI INTEGRALI DOPPI

Se $f(x,y)$ è una funzione continua in D regolare rispetto all'asse y e se si conosce una primitiva $F(x,y)$ rispetto a x, cioè se $\frac{\partial F}{\partial x} = f(x,y)$ in tutto D, allora:

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_D \frac{\partial F}{\partial x}dxdy$$

e quindi

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_{+\partial D} F(x,y)\,dy\ .$$

Analogamente se D è regolare rispetto all'asse x e della $f(x,y)$ si conosce una primitiva $G(x,y)$ rispetto a y, cioè se $\frac{\partial G}{\partial y} = f(x,y)$ in tutto D, allora:

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = -\int_{+\partial D} G(x,y)\,dx\ .$$

CALCOLO DELLE AREE

Dalla (10) e dalla (11) si ha:

$$area\ D = \iint_D dxdy = \int_{+\partial D} xdy \qquad \text{e} \qquad area\ D = \iint_D dxdy = -\int_{+\partial D} ydx$$

da cui segue, sommando membro a membro:

(17) $$area\ D = \frac{1}{2}\int_{+\partial D} (xdy - ydx).$$

ESEMPIO 21 – Calcolare $\iint_D (x+2y)\,dxdy$ dove D è il dominio limitato dall'asse delle x e dall'arco di cicloide di equazioni parametriche $\begin{cases} x = t - sent \\ y = 1 - cos\,t \end{cases}$ con $0 \le t \le 2\pi$.

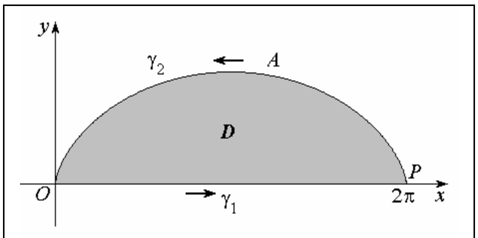

Figura 20 – Relativa all'esempio 21.

Dalla (11) segue:

$$\iint_D (x+2y)\,dxdy = -\int_{+\partial D} (xy+y^2)\,dx = -\int_{\gamma_1} (xy+y^2)\,dx - \int_{\gamma_2} (xy+y^2)\,dx$$

dove γ_1 è il segmento orientato *OP* e γ_2 l'arco di cicloide percorso nel senso *PAO*. Tenendo conto che su γ_1 è $y = 0$, si ha:

$$\iint_D (x+2y)\,dxdy = -\int_{\gamma_2} (xy+y^2)\,dx =$$

$$= -\int_{2\pi}^{0} \left[(t-sent)(1-cos\,t)+(1-cos\,t)^2\right](1-cos\,t)\,dt = 5\pi+3\pi^2$$

◊

ESEMPIO 22 – Calcolare l'area dell'ellisse di semiassi *a* e *b*.
Le equazioni parametriche dell'ellisse sono: $x = a\,cos\,t$ e $y = bsent$ con $0 \le t \le 2\pi$. Dalla (17) si ha:

$$area\ D = \frac{1}{2}\int_{+\partial D} (xdy - ydx) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (a\,cos\,t\cdot b\,cos\,t + bsent\cdot asent)\,dt = \frac{1}{2}ab\int_0^{2\pi} dt = ab\pi$$

◊

ESEMPIO 23 – Calcolare $\iint_D \frac{1}{x+1}\,dxdy$ dove D è la regione finita di piano compresa tra le parabole di equazione $y = x^2$ e $x = y^2$.

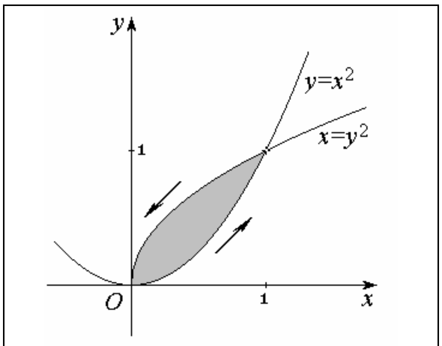

Figura 21 – Relativa all'esempio 23.

Si osserva che $\frac{1}{x+1} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{1+x}\right)$, per cui:

$$\iint_D \frac{1}{x+1}\,dxdy = \iint_D \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{1+x}\right)dxdy =$$

$$= -\int_{+\partial D} \frac{y}{1+x}\,dx = -\int_{\gamma_1} \frac{y}{1+x}\,dx - \int_{\gamma_2} \frac{y}{1+x}\,dx$$

dove γ_1 è la parabola $y = x^2$ percorsa nel senso delle *x* crescenti e γ_2 è la parabola $x = y^2$, ovvero la curva di equazione $y = \sqrt{x}$, percorsa nel senso delle *x* decrescenti. Si ha quindi:

$$\int_{\gamma_1} \frac{y}{1+x}\,dx = \int_0^1 \frac{x^2}{1+x}\,dx = \int_0^1 \left(x-1+\frac{1}{1+x}\right)dx = \left[\frac{1}{2}x^2 - x + ln(1+x)\right]_0^1 = -\frac{1}{2}+ln\,2$$

$$\int_{\gamma_2} \frac{y}{1+x}\,dx = \int_1^0 \frac{\sqrt{x}}{1+x}\,dx = -2\int_0^1 \frac{t^2}{1+t^2}\,dt = -2\int_0^1 \left(1-\frac{1}{1+t^2}\right)dt = -2\left[t-arctgt\right]_0^1 = -2+\frac{\pi}{2}$$

nel secondo integrale si è effettuata la sostituzione: $t = \sqrt{x}$. Si ha quindi:

$$\iint_D \frac{1}{x+1}\,dxdy = -\left(-\frac{1}{2}+ln\,2\right) - \left(-2+\frac{\pi}{2}\right) = \frac{5-\pi}{2} - ln\,2\,.$$

◊