In particolare, $\nabla f(0,0) = (0,4)$ e $\nabla f(0,3) = (3,4)$.

∎

1.4 Integrali curvilinei

È noto che l'integrale definito di una funzione continua di una sola variabile $f(t)$ esteso ad un intervallo $[a,b]$ si può pensare come il limite di espressioni

$$\sum_{i=1}^{n} f(t_i)(t_i - t_{i-1})$$

quando n tende a infinito (ovvero, quando l'ampiezza dei sottointervalli $[t_{i-1}, t_i]$ tende a zero). Quando la funzione f è positiva, il valore dell'integrale dà una misura dell'area delimitata dal grafico di f su $[a,b]$ e dall'asse delle t. Ma se $f(t)$ rappresenta la concentrazione o densità puntuale di una grandezza fisica distribuita su $[a,b]$ (massa, quantità di calore, carica elettrica ecc...), allora l'integrale dà una misura della quantità totale della grandezza fisica complessivamente distribuita su $[a,b]$.

Dal punto di vista delle applicazioni, ha interesse considerare situazioni più generali; per esempio, possiamo immaginare una distribuzione di cariche elettriche su un filo disposto in un piano. Il filo può essere matematicamente descritto da una curva. La carica posseduta da un punto sul filo dipende dalle coordinate del punto stesso ed è quindi una funzione di due variabili.

Il problema di calcolare la quantità totale di una grandezza fisica distribuita su una curva γ di $\mathbf{R}^2$ la cui densità puntuale, descritta da una funzione $z = f(x,y)$ è nota, può essere risolto introducendo un opportuno concetto di integrale: esso prende il nome di integrale curvilineo della funzione f esteso alla curva γ.

Di fatto, l'integrale di una funzione di due variabili $y = f(x,y)$ esteso ad una curva piana $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t)) : [a,b] \to \mathbf{R}^n$ si calcola riconducendolo ad un unico integrale semplice. L'idea di integrare su $[a,b]$ la funzione composta $y = f(\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ può sembrare naturale, ma è errata: in questo modo infatti non si tiene conto di come la forma della curva influenza la concentrazione dei valori di f sulla curva stessa. La seguente definizione si riconosce essere più rispondente alle varie applicazioni.

Definizione 1 *L'*integrale curvilineo *di una funzione $y = f(x,y)$ esteso ad una curva regolare $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t)) : [a,b] \to \mathbf{R}^n$ si definisce come*

$$\int_\gamma f = \int_a^b f(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \sqrt{(\gamma_1'(t))^2 + (\gamma_2'(t))^2}\, dt \ . \tag{1.4}$$

Osserviamo che si può parlare dell'integrale di una funzione f esteso ad una curva γ solo a condizione che l'integrale a secondo membro esista: ciò accade sicuramente, per esempio, se la funzione composta $t \mapsto f(\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ è continua.

Il fattore $\sqrt{(\gamma_1'(t))^2 + (\gamma_2'(t))^2}$ che compare in (1.4) non è altro che la norma del vettore tangente in ogni punto alla curva data. È importante notare la somiglianza formale tra la (1.4) e la formula di sostituzione per gli integrali semplici e multipli.

Esempio

15. Vogliamo calcolare l'integrale della funzione $f(x,y) = x + \sqrt{y}$ sull'arco di parabola $x = t, y = t^2$ per $t \in [0,1]$. Si ha:

$$\int_\gamma f = \int_0^1 2t\sqrt{1+4t^2}\, dt = \frac{1}{6}(5^{\frac{3}{2}} - 1) \ .$$

∎

Il caso più semplice si ha quando la funzione integranda è costante $f(x,y) \equiv 1$. In tal caso (1.4) si riduce a

$$\int_a^b \sqrt{(\gamma_1'(t))^2 + (\gamma_2'(t))^2}\, dt$$

e fornisce la misura della lunghezza della curva γ.

Nel caso di funzioni $f(x_1, \ldots, x_n) : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ l'integrale curvilineo si definisce in modo del tutto analogo: data la curva $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \ldots, \gamma_n(t)) : [a,b] \to \mathbf{R}^n$ la (1.4) viene semplicemente sostituita dalla

$$\begin{aligned} \int_\gamma f &= \int_a^b f(\gamma_1(t), \ldots, \gamma_n(t))\sqrt{(\gamma_1'(t))^2 + \ldots + (\gamma_n'(t))^2}\, dt = \\ &= \int_a^b f(\gamma(t))||\gamma'(t)||\, dt \ . \end{aligned}$$

Esempio

16. Consideriamo la funzione $f(x,y,z) = xy + e^z$ e l'arco di elica

$$\gamma : \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = t \end{cases} , \qquad t \in [0, \pi] \ .$$

Si ha:

$$\int_\gamma f = \int_0^\pi (\cos t \sin t + e^t)\sqrt{2}\, dt = \sqrt{2}(e^\pi - 1) \ .$$

17. Vogliamo calcolare la lunghezza di un arco di curva, dato dalle equazioni

$$\begin{cases} x = t \\ y = t^2 \\ z = \frac{2t^3}{3} \end{cases} , \quad t \in [0,1] \ .$$

Posto $f \equiv 1$, si ha l'integrale

$$\int_a^b \sqrt{1+4t^2+4t^4}\, dt = 5/2 \ .$$

∎

A proposito degli integrali curvilinei, vi è un'osservazione di carattere teorico, ma importante anche ai fini pratici, che occorre fare. Abbiamo visto che per calcolare questi integrali è conveniente che la curva sia data in forma parametrica. Ma una stessa curva ammette infinite parametrizzazioni. Si dimostra, estendendo il ragionamento già utilizzato nel caso della lunghezza, che il valore dell'integrale non dipende dalla parametrizzazione, purché quest'ultima soddisfi a certe condizioni di regolarità molto naturali.

Nel calcolo degli integrali curvilinei, la condizione di regolarità della curva γ può essere indebolita. Infatti, per la proprietà di additività degli integrali rispetto al donimio di integrazione, data una suddivisione finita dell'intervallo

$$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = b$$

possiamo sempre scrivere

$$\int_\gamma f = \sum_{i=1}^{k} \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(\gamma(t)) ||\gamma'(t)||\, dt \ .$$

Per mezzo di questa formula possiamo estendere la Definizione 1 al caso in cui la condizione di regolarità è violata solo in un numero finito di punti (si parla in tal caso di curve *regolari a tratti*).

Esempio

18. È richiesto di calcolare l'integrale curvilineo della funzione $f(x,y) = x$ lungo la curva γ costituita dai lati di un quadrato i cui vertici sono situati nei punti $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$, $(1,1)$. Poiché l'integrale curvilineo non dipende dalla parametrizzazione, siamo liberi di scegliere quella che si sembra più conveniente. Tuttavia, è chiaro che la curva non potrà essere rappresentata globalmente in maniera regolare a causa della presenza degli angoli. Decidiamo allora di parametrizzare i singoli lati separatamente, definendo ad esempio:

$$\gamma_1(t) : \begin{cases} x = t \\ y = 0 \end{cases} \qquad \gamma_2(t) : \begin{cases} x = 1 \\ y = t \end{cases}$$

$$\gamma_3(t) : \begin{cases} x = 1-t \\ y = 1 \end{cases} \qquad \gamma_2(t) : \begin{cases} x = 0 \\ y = 1-t \end{cases}$$

sempre con $t \in [0,1]$. Si ha:

$$\begin{aligned}\int_\gamma f &= \int_{\gamma_1} f + \int_{\gamma_2} f + \int_{\gamma_3} f + \int_{\gamma_4} f = \\ &= \int_0^1 t\,dt + \int_0^1 1\,dt + \int_0^1 (1-t)\,dt + 0 = 2\ .\end{aligned}$$

∎

1.5 Campi vettoriali

Fino a questo momento ci siamo occupati di funzioni di più variabili, a valori reali. Più in generale, in molte applicazioni, è necessario considerare funzioni di una o più variabili, a valori vettoriali. Esempi tipici sono le curve (funzioni da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}^n$) e i *campi vettoriali*, vale a dire funzioni per cui il numero di variabili dipendenti è uguale a quello delle variabili indipendenti.

Esempi

19. Una massa che si trova in un punto fissato dello spazio tridimensionale (diciamo l'origine) crea un campo di forze nella regione circostante (campo gravitazionale centrale). La forza che agisce nel punto $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ è rappresentata, a meno di una costante di proporzionalità, dal vettore

$$-\frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\ .$$

20. Immaginiamo nello spazio tridimensionale un filo percorso da una corrente di intensità costante. Nella regione circostante, si crea un campo di forze, chiamato campo magnetico. Facendo coincidere il filo con l'asse x_3 (e facendo in modo che la corrente percorra il filo nella direzione positiva dell'asse) la forza che agisce nel punto $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ è rappresentata, anche stavolta a meno di una costante di proporzionalità, dal vettore

$$\frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix}\ .$$

∎

Una funzione vettoriale di una o più variabili (diciamo da $\mathbf{R}^n$ a $\mathbf{R}^m$) si può pensare come l'assegnazione collettiva di m funzioni reali:

$$F(x_1, \ldots, x_n) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, \ldots, x_n) \\ \cdots \\ f_m(x_1, \ldots, x_n) \end{pmatrix}\ .$$