SISTEMI DINAMICI

- LEZIONE DEL 20 MAGGIO 2020
- PRIMA PARTE

Sistemi dinamici non-lineari

→ linearizzazione

→ stabilità

Insiemi limite $\dot{x} = f(x) \quad x \in \mathbb{R}^n$

$\Gamma_x = \{ \varphi_t(x) : t \in \mathbb{R} \}$ orbite

$(\Gamma_x^+ , \Gamma_x^- , \text{ se } t > 0 , t < 0)$

Vogliamo caratterizzare le orbite attraverso il loro andamento asintotico per $t \to +\infty$

Un punto limite y è definito da

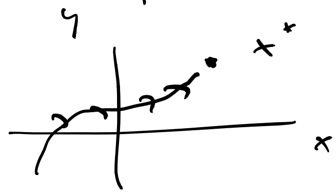
$\varphi_t(x) \longrightarrow y$ se $\exists$ sequenza

$t_1 < \dots < t_n$ tale che $t_n \to \infty$

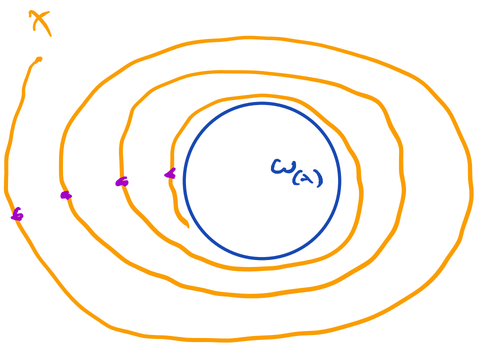
Def L'insieme di tutti i punti limite di Γ_x^+ è detto l'insieme omega limite $\omega(x)$ (o anche $\omega(\Gamma_x^+)$)

Similmente l'insieme $\alpha(x)$ è l'insieme di tutti i punti limite di Γ_x^-.

Esempio: un punto di eq. asintoticamente stabile



Un altro esempio sono i cicli limite



Def Un ciclo limite è un'orbita periodica γ, che è l'insieme ω-limite (o α-limite) di un punto $x \notin \gamma$.

In particolare è chiuso e invariante

$\varphi_T(\gamma) = \gamma$

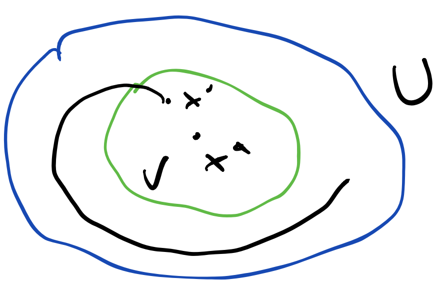
L'insieme ω-limite è un insieme invariante

Dim Se $y \in \omega(x)$, allora $\exists\, t_n$ tale che $\varphi_{t_n}(x) \longrightarrow y$. Per continuità, fissato $s \in \mathbb{R}$, $\varphi_{s+t_n}(x) \longrightarrow \varphi_s(\varphi_{t_n}(x)) \to \varphi_s(y)$

quindi $\varphi_s(y) \in \omega(x)$.

In modo simile, parliamo di attrazione come di un insieme invariante verso il quale si muovono tutte le traiettorie

Per prima cosa: diremo che un insieme invariante Λ è stabile, per ogni intorno U di Λ, possiamo trovare un $V \subset U$ tale che tutte le traiettorie che partono da V restano in U per $t \geq 0$.



Similmente: possiamo definire Λ asintoticamente stabile.

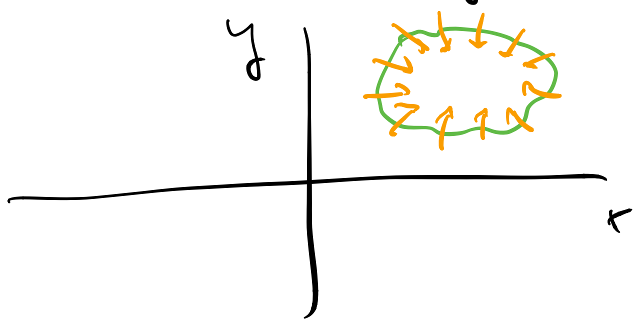
(stabile + la distanza tra $\varphi_T(x)$ e Λ tende a zero per $T \to +\infty$)

Definizione Un insieme N, viene detto regione di intrappolamento (trapping region) se è compatto e $\varphi_T(N) \subset \mathrm{int}(N)$ per $T > 0$

($\mathrm{int}(N)$ denota l'interno di N)

$\to$ ogni traiettoria che inizia nella trapping region, si sposta al suo interno e vi rimane

Costruzione: basta cercare una regione compatta tale che il campo vettoriale punti verso il suo interno ad ogni punto del bordo



Definizione Un insieme Λ si dice attrattivo se c'è una regione di intrappolamento compatta $N \supset \Lambda$ tale che $\Lambda = \bigcap_{\tau > 0} \varphi_\tau(N)$

[insieme attrattivo = insieme invariante più grande all'interno di una regione di intrappolamento)

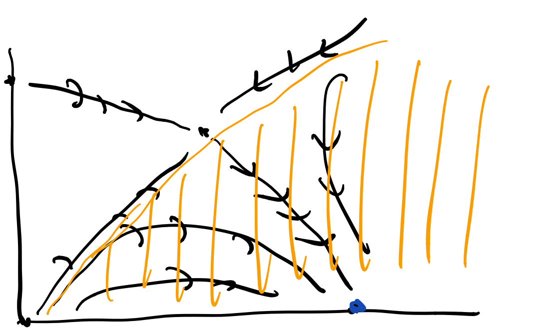
$\{\varphi_\tau(N) : \tau \geq 0\}$ → chiusi

→ l'intersezione chiusa e $\neq \emptyset$

Insieme attrattivo è asintoticamente stabile

<u>Def</u> Bacino di attrazione : $W^s(\Lambda)$

Tale che $\forall$ punto x, il flusso $\varphi_t(x)$ ha limite per $t \to \infty$ un punto di Λ.



esempio precedente

bacino di attrazione

Def Un insieme si dice <u>attrattore</u> se è un insieme attrattivo ed $\exists$ un punto x tale che $\Lambda = \omega(x)$.

Secondo questa def, un attrattore è una componente fondamentale di un insieme attrattivo $\rightsquigarrow$ "componente irriducibile"

$\rightarrow$ punti, orbite semplici

$\exists$ casi più complicati, "attrattori strani"

SISTEMI DINAMICI

- LEZIONE DEL 20 MAGGIO 2020
- SECONDA PARTE

<u>Sistemi gradiente</u>

Prendiamo $V: U \to \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^n$ e

$$\nabla V(x) = \left(\frac{\partial V}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial V}{\partial x_n} \right)$$

Un sistema dinamico si dice di tipo gradiente se

$$\dot{x} = -\nabla V$$

In particolare

$$dV_{(x)}(y) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} y_i = \nabla V \cdot y$$

Andiamo a vedere la derivata

$\frac{d}{dt} V$ lungo il flusso

$$\frac{d}{dt} V(\varphi^t(x)) = \frac{d}{dt} V(x(t))$$

$$= dV_{(\varphi^t(x))} \underbrace{\frac{d}{dt}\varphi^t(x)}_{-\nabla V} = -|\nabla V|^2$$

$\Sigma\ \dot{x} = -\nabla V$

$$\left[\frac{d}{dt} V(x_1(t), \dots, x_n(t)) = \frac{\partial V}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + \dots + \frac{\partial V}{\partial x_n}\frac{dx_n}{dt} \right.$$

$$\left. = \frac{\partial V}{\partial x_1}\left(-\frac{\partial V}{\partial x_1}\right) + \dots = -|\nabla V|^2 \right]$$

Abbiamo dimostrato

Teo $\dot{V} \leq 0$ lungo il flusso, e

$\dot{V}(x^*) = 0 \iff x^*$ è un punto

di equilibrio

Ne segue $V(x)$ $\left(V(x) - V(x^*) \right)$ è una funzione di Liapunov, e quindi un minimo isolato x^* è un punto di equilibrio asintoticamente stabile

<u>Osservazione</u>: siccome V decresce strettamente un sistema gradiente non ammette soluzioni periodiche

Consideriamo le superfici di livello

$$N_c = \{ x : V(x) < c \}$$

Un punto $x \in N_c$ si dice regolare se $\nabla V_{(x)} \neq 0$

$\rightarrow$ superfici di livello sono grafico di una funzione

Consideriamo un punto regolare x. Sia ξ un vettore tangente a N_c in x

Allora possiamo trovare una curva $\gamma(t)$ in N_c, tale che $\gamma'(0) = \xi$

Siccome V è costante in N_c ($V(x) = c$)

$$dV_{(x)}(\xi) = \frac{d}{d\tau}\Big|_{\tau=0} V \circ \gamma(\tau) = 0$$

Lo spazio tangente è il kernel del differenziale

$$T_x N_c = \{ \xi \in \mathbb{R}^n \mid dV_{(x)} \xi = 0 \}$$

$$= \{ \xi \in \mathbb{R}^n \mid \nabla V \cdot \xi = 0 \}$$

quindi il gradiente ∇V è ortogonale alle superfici di livello

Per def le orbite del sistema dinamico sono tangenti a $-\nabla V$ ($\dot{x} = -\nabla V$)

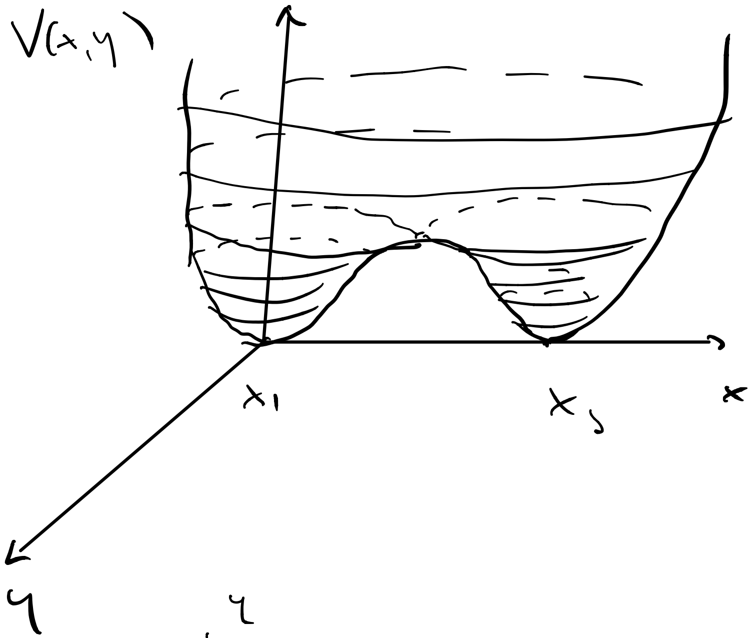
$\longrightarrow$ attraversano in modo ortogonale le superfici di livello. (per punti regolari)

<u>Esempio</u> $V : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad V(x,y) = x^2(x-1)^2 + y^2$

$$\dot{X} = -\nabla V \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = -2x(x-1)(2x-1) \\ \dot{y} = -2y \end{cases}$$

$X_1 = (0,0) \qquad X_2 = (\frac{1}{2}, 0) \qquad X_3 = (1,0)$

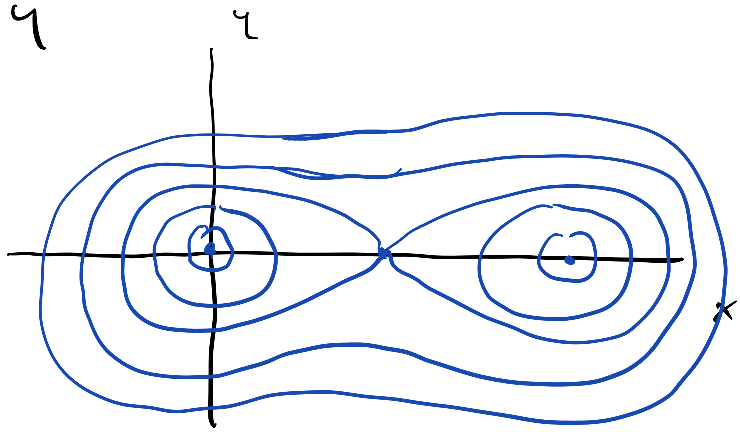
$$Df = \begin{pmatrix} -2\,(6x^2 - 6x + 1) & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

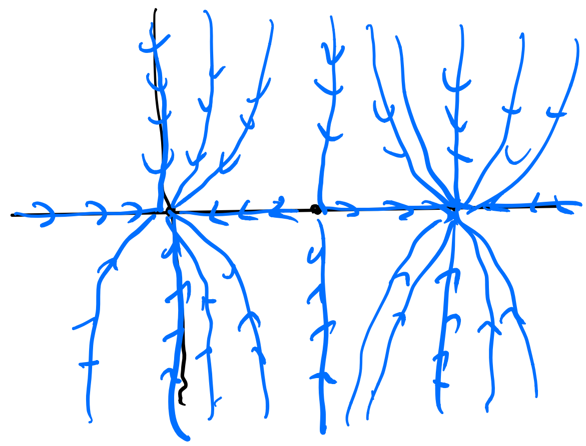


$$Df|_{x_1} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{pozzo}$$

$$Df|_{x_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{sella}$$

$$Df|_{x_3} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{pozzo}$$





<u>Proposizione</u> Sia z un punto α-limite o ω-limite di una traiettoria di un flusso gradiente, allora z è un punto di equilibrio.

<u>Dim</u> Supponiamo z sia ω-limite. Allora (come nella dim Teo LaSalle) V è costante lungo la soluzione per z.
Siccome $V(x(t))$ decresce,

$$V(x(t)) \xrightarrow[t\to\infty]{} \inf_{t\geq 0} V(x(t)) = \alpha$$

Se $y \in \omega(x)$, allora $\exists$ sequenza $t_n \to \infty$ tale che $x(t_n) \to y$. Siccome V è continua $\lim_{t_n\to\infty} V(x(t_n)) = V(y) = \alpha$

Questo è vero $\forall y \in \omega(x)$.

Quindi $\forall y \in \omega(x)$, $V(y) = \alpha$.

Siccome $\omega(x)$ è invariante lungo il flusso, $\forall y \in \omega(x)$, $V(y(t)) = V(y) = \alpha$

$\Rightarrow$ V è costante lungo la soluzione

Deve essere $\dot{V}(y) = 0$ $\forall y \in \omega(x)$

$\Rightarrow$ è un punto di equilibrio ∎

<u>Proposizione</u> Un sistema gradiente linearizzato ad un punto di equilibrio ha solo autovalori reali

<u>Dim</u> segue dal fatto che $\frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j}$ è simmetrica