WITTEN INDEX & LOCALIZZAZIONE

$$I_W = \underbrace{\int \mathcal{D}x\,\mathcal{D}\psi\,\mathcal{D}\bar\psi\big|_p \; e^{-S^{(2)}}}_{\text{Witten index di un oscillatore armonico susy con } \omega = h''(x_*)\ !} \; + \; \cancel{O(\delta x^3)}$$

trascurabili quando $\lambda \to \infty$

| vedi sotto

$$= \frac{h''(x_*)}{|h''(x_*)|}$$

se x_* è l'unico pto critico di h

Sommando tutti i contributi che vengono da eventuali altri pti critici di h, otteniamo

$$I_W = \sum_{\substack{x_* \text{ t.c.} \\ h'(x_*)=0}} \operatorname{sgn}(h''(x_*))$$

Stesso risultato ottenuto in $d=0$

(non è sorprendente perchè $x(t)$ si riduce a mappe cost.)

(*) L'integrale sui cammini localizza su config. supersimmetriche che risolvono le eq. del moto classiche.

$\rightarrow \delta x = 0$, $\delta\psi = 0$, $\delta\bar\psi = 0$

($\dot x = 0$ $\quad h'(x) = 0$ $\quad \psi = 0$ $\quad \bar\psi = 0$).

In particolare x sono mappe costanti che azzerano l'energia ($E_{cin} = 0$ $\quad V = \frac{(h')^2}{2} = 0$)

Witten index oscillatore armonico

$$I_W = \int \underbrace{\mathcal{D}x}_{\mathcal{D}\delta x}\, \mathcal{D}\psi\, \mathcal{D}\bar{\psi}\big|_p \; e^{-S^{(2)}} \qquad \omega = h''(x_*)$$

$$S^{(2)} = \int_0^\beta \Big[\frac{1}{2}\, \underset{\text{periodico}}{\delta x} \Big(-\frac{d^2}{dt^2} + \omega^2 \Big) \delta x + \bar{\psi} \Big(\frac{d}{dt} + \omega \Big) \underset{\text{PERIODICO}}{\psi} \Big] dt$$

Espandiamo δx e ψ in autofunz. PERIODICHE degli operatori rispettivam. $\left(-\frac{d^2}{dt^2} + \omega^2 \right)$ e $\left(\frac{d}{dt} + \omega \right)$

$$\delta x(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta x_n\, e^{2\pi i t/\beta} \qquad \psi(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \eta_n\, e^{2\pi i t/\beta} \qquad \bar{\psi}(t) = \psi(t)^*$$

$\delta x_n \in \mathbb{C}$ ma t.c.
$\delta x_n = \delta x^*_{-n}$ (δx è reale)

$$\underbrace{\prod_{n\in\mathbb{Z}^-} \quad \prod_{n\in\mathbb{Z}^+}}_{\text{complex conj}} \quad \prod_{n=0}$$

$$I_W = \frac{\det\left(\frac{d}{dt} + \omega \right)}{\sqrt{\det\left(-\frac{d^2}{dt^2} + \omega^2 \right)}} = \frac{\prod_{n\in\mathbb{Z}} \left(\frac{2\pi i n}{\beta} + \omega \right)}{\sqrt{\prod_{n\in\mathbb{Z}} \left[\left(\frac{2\pi n}{\beta} \right)^2 + \omega^2 \right]}} =$$

$$\underbrace{n\in\mathbb{Z}^-, \; n\in\mathbb{Z}^+}_{=}, \; n=0$$

$$= \frac{\omega \prod_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{2\pi n}{\beta} \right)^2 + \omega^2 \right]}{\sqrt{\omega^2 \underbrace{\left[\prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2\pi n}{\beta} \right)^2 + \omega^2 \right]^2}_{>0}}} = \frac{\omega}{|\omega|} = \operatorname{sgn} h''(x_*)$$

$$\Rightarrow \quad I_W = \sum_{\substack{x_* \text{ t.c.} \\ h'(x_*)=0}} \operatorname{sgn}\left(h''(x_*) \right)$$

MULTI - VARIABLE CASE

Teoria può avere   coord. sul manifold N

n campi bosonici $\quad X^I$

$2n$ campi fermionici $\quad \psi^I, \bar{\psi}^I \qquad I = 1, \dots, n$

h della teoria susy sarà funz. di tutte le x^I

$$h = h(x^1, \dots, x^n)$$

Hamiltoniana:

$$H = \frac{1}{2} \sum_I \left[p_I^2 + \frac{1}{2} (\partial_I h)^2 \right] = \frac{1}{2} \sum_{I,J} \underline{\partial_I \partial_J h} \, [\bar{\psi}^I, \psi^J]$$

le x^I e ψ^I sono accoppiati

Supercariche:

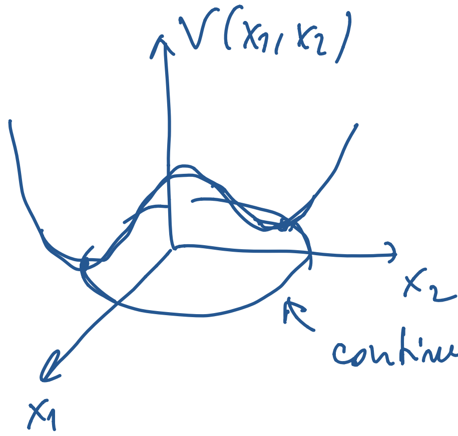
$$Q = \sum_I \bar{\psi}^I (i p_I + \partial_I h)$$

$$\bar{Q} = \sum_I \psi^I (-i p_I + \partial_I h)$$

Tipicamente è difficile calcolare i GROUND STATES.
D'altra parte se $\quad h = \sum_I h^I(x^I)$

$$\Rightarrow \quad |\text{ground state}\rangle = |g.s.\rangle_1 \otimes |g.s.\rangle_2 \otimes \dots \otimes |g.s.\rangle_n$$

Localizzazione: cercare i pti critici di h. Non è detto che siano isolati; può esserci un continuo di pti critici; es. $\quad V = \frac{1}{2}(\vec{x}^2 - \lambda^2)^2 \quad (n=2)$



Quando ho un continuo di pti critici x_*, la somma nel Witten Index $\sum_{x_*}$ diventa un integrale $\int dx_*$

↓

In ogni caso questo è già un gran miglioramento rispetto al P.I. di partenza (cioè la localizzazione muta integrali nei cammini in integrali semplici).

Osservazione:

Se lo spazio N (target space) è una varietà diff. Riemanniana, allora i ground states SUSY sono in 1-to-1 con le forme armoniche su N

[forme armoniche sono 1-to-1 con le classi di coomologia dell'op d; una forma ω armonica ($\Delta\omega=0$) è in particolare CHIUSA ed è unica nella propria classe di coomologia]

$\Rightarrow$ Witten index è uguale a un indice geometrico di N

$\mathrm{Tr}\,(-1)^F = \chi(N)$ Euler characteristic di N.

Analisi perturbativa a livello operatoriale.

Witten index è invariante sotto deformazioni continue della teoria: è conveniente calcolarlo nel limite

$$h \mapsto \lambda h \qquad \lambda \gg 1$$

L'Hamiltoniana diventa

$$H = \frac{p^2}{2} + \frac{\lambda^2}{2}(h')^2 + \frac{\lambda}{2} h'' [\bar{\psi}, \psi]$$

Mandando $\lambda \to \infty$, il potenziale diventa grande e il pto di minima energia (zero) diventa molto netto: il potenziale attorno ad esso è ripidissimo

Espandiamo h attorno a un pto critico x_i

$$h(x) = h(x_i) + \frac{1}{2} h''(x_i)(x - x_i)^2 + \frac{1}{6} h'''(x_i)(x - x_i)^3 + \dots$$

Assumiamo $h''(x_i) \neq 0$ e riscaliamo $x - x_i = \frac{1}{\lambda^{1/2}}(\tilde{x} - \tilde{x}_i)$

$$h(x) = h(x_i) + \frac{1}{2\lambda} h''(x_i)(\tilde{x} - \tilde{x}_i)^2 + \frac{1}{6\lambda^{3/2}} h'''(x_i)(\tilde{x} - \tilde{x}_i)^3 + O(1/\lambda^2) \qquad (\star)$$

$\Rightarrow$ H viene espansa in potenze di $1/\lambda^{1/2}$:

$$H = \lambda\left(\frac{\tilde{p}^2}{2} + \frac{1}{2}(h''(x_i))^2(\tilde{x} - \tilde{x}_i)^2 + \frac{1}{2} h''(x_i)[\bar{\psi}, \psi]\right)$$

$$\tilde{p} = -\frac{d}{d\tilde{x}} \qquad + \underbrace{O(\lambda^{1/2}) + \dots + O(1/\lambda^{1/2})}_{\text{perturbazioni nel lim. } \lambda \gg 1} + \dots$$

$$\Rightarrow \quad H = \underset{\substack{\text{susy} \\ \downarrow \\ \omega = h''(x_i)}}{H_{o.a.}} + \text{perturbazione}$$

$\Rightarrow$ In teoria delle perturbazioni il ground state

$$\Psi_i = \begin{cases} e^{-\frac{\lambda}{2} h''(x_i)(x-x_i)^2} |0\rangle + \dots & \text{if } h''(x_i) > 0 \\ e^{-\frac{\lambda}{2} |h''(x_i)| (x-x_i)^2} \bar{\psi} |0\rangle + \dots & \text{if } h''(x_i) < 0 \end{cases}$$

I termini di correzione li possiamo scrivere sapendo che il ground state per un sist. a un grado di lib. è

$$\begin{cases} e^{-\frac{\lambda}{2} h(x)} |0\rangle \\ e^{\frac{\lambda}{2} h(x)} \bar{\psi} |0\rangle \end{cases}$$ ed espandendo h come in (A)

ma si può dimostrare che ad ogni ordine (nell'espansione in $1/\lambda^{1/2}$) l'energia dello stato è NULLA.

$\rightarrow$ otteniamo nella teoria delle perturbazioni un ground state per ogni pto critico di h

$\Rightarrow$ Witten index di ogni singolo ground state è

$$Tr(-1)^F = \begin{cases} 1 & h''(x_i) > 0 \\ -1 & h''(x_i) < 0 \end{cases}$$

In generale ho N pti critici x_i $\quad (h''(x_i) \neq 0) \rightsquigarrow$ ho N ground states approssimati (sono ground state esatti in teoria delle perturbazioni)

h continua ha segno alternato per $h''(x_i)$ $\qquad \mathrm{Tr}(-1)^F = \sum_{i=1}^{N} \mathrm{sgn}\, h''(x_i) = \begin{cases} 1 \\ -1 \end{cases}$

→ otteniamo il risultato esatto per il Witten index usando la teoria delle perturbazioni.

→ però, usando la teoria delle perturbazioni, non otteniamo il numero corretto di ground states [Infatti sappiamo che per un sist. a 1 grado di lib. c'è al massimo un solo ground state, mentre in teoria delle perturbazioni ne troviamo N.]
↳ (ad ogni ordine)

⇒ dev'essere qualche effetto non-perturbativo che lifta la maggior parte degli stati di vuoto trovati con la teoria delle perturbazioni.

La correzione non-perturbativa (non-polinomiale in $1/\lambda^{1/2}$) è di solito più piccola di tutte le correz. perturbative; d'altra parte, se tutte le correz. perturbative sono nulle, allora quella non-perturbativa diventa la correz. predominante.