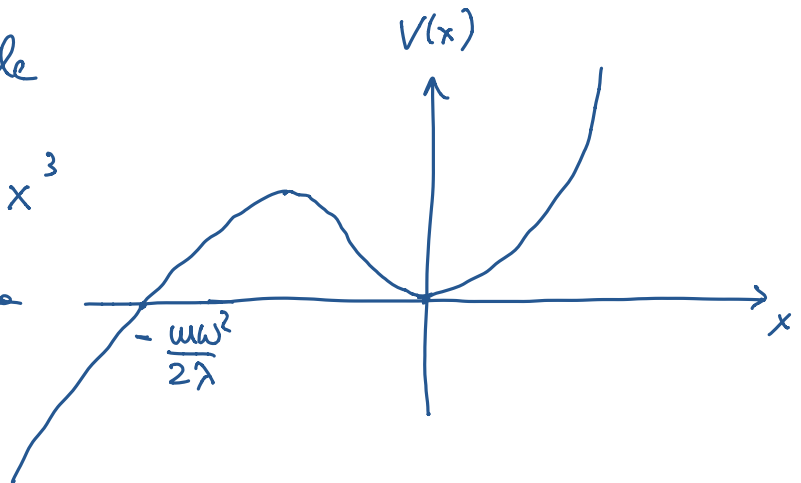


EFFETTI NON-PERTURBATIVI

Consideriamo il potenziale

$$V(x) = \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 + \lambda x^3$$

↑
piccola



Ho un minimo in $x=0$, posso fare teoria delle perturb. attorno $x=0$ con $\lambda \ll 1$.

↳ ci si calcola lo spettro e in particolare il ground state, ordine μ ordine nella teoria delle perturbazioni!

Tuttavia non ci si accorge che questo stato ("gr. st.") è INSTABILE

↳ c'è la possibilità di EFFETTO TUNNEL attraverso la barriera di potenziale (a sinistra di $x=0$)

(In particolare lo spettro dell'energia non è limitato inferiormente)

La probabilità di tunneling $P \sim e^{-\frac{m^3 \omega^5}{2 \lambda^2}}$

⇒ l'effetto scompare esponenzialmente $\mu \lambda \rightarrow 0$

più velocemente di qui potenza in λ

(beyond all orders in λ)

Esempio: double well potential

$$V(x) = \frac{\lambda}{4!} (x^2 - a^2)^2$$

- V ha due minimi

- in teoria delle perturbazioni

possa espandere attorno a ciascuno min.

def. $x = y + a$ ($y=0 \leftrightarrow x=a$)

$$a^2 = 3 \frac{m\omega^2}{\lambda} \quad a = \omega \sqrt{\frac{3m}{\lambda}}$$

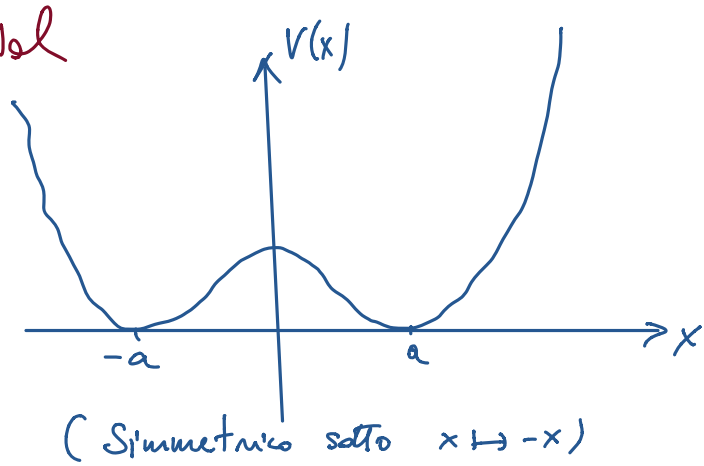
$$V(y) = \frac{\lambda}{4!} (y^2 + 2ay + \cancel{a^2} - \cancel{a^2})^2 = \frac{\lambda a^2}{6} y^2 + \frac{\lambda a}{6} y^3 + \frac{\lambda}{4!} y^4$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2} m \omega^2 y^2}_{\text{potenziale armonico}} + \underbrace{\frac{1}{2} \omega \sqrt{\frac{m\lambda}{3}} y^3 + \frac{\lambda}{4!} y^4}_{\text{perturbazione}}$$

Consideriamo l'approssimazione λ piccolo, mentre $m\omega$ rimane $O(1)$ [$\frac{\lambda m \omega^2 a^2}{m^2 \omega^4} = \frac{\lambda a^2}{m \omega^2} \ll 1$]

Per piccoli valori di λ , si possono calcolare i livelli energetici in teoria delle perturb. senza che ci sia evidenza della presenza del secondo minimo con i suoi livelli energetici localizzati.

Si può fare teoria delle perturb. anche attorno al secondo min $x = -a$ e si trovano gli stessi risultati (sist. è simm. sotto riflessione $x \mapsto -x \Rightarrow$ per ogni liv. en. ^{approx} localizzato attorno a $x = a$ con en. E , si ottiene un liv. en. ^{approx} localizzato attorno a $x = -a$ con la stessa en. E)



⇒ spettro è doppiamente degenere in teoria delle pert. (???)

Tuttavia sappiamo che per i sistemi unidimensionali
i liv. energetici (in spettro discreto) sono NON-DEGENERI,
Inoltre il ground state non ha nodi e pari
è pari per $x \rightarrow -x$ (se V è sim.)

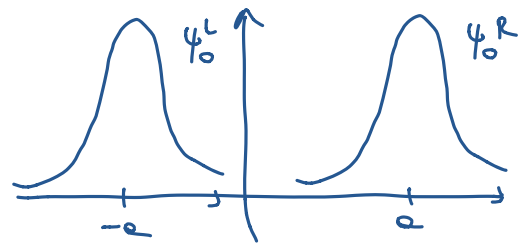
$$\Psi_0(-x) = \Psi_0(x)$$

Il primo liv. en. eccitato ha un nodo ed è dispari

$$\Psi_1(-x) = -\Psi_1(x)$$

In teoria delle perturb. ci sono due stati con queste proprietà

$\psi_0^L + \psi_0^R$ e $\psi_0^L - \psi_0^R$
↑ ↖ attorno $x=a$
ground st. appox
attorno a $x=-a$



Saremmo tentati di def.

$$\Psi_0(x) = \psi_0^L(x) + \psi_0^R(x)$$

$$\Psi_1(x) = \psi_0^L(x) - \psi_0^R(x)$$

In teoria delle perturbazioni
questi stati hanno la
stessa energia

Cioè $E_1 - E_0 = 0$ a ogni ordine
in teoria delle perturbazioni

Vogliamo dimostrare che $E_1 - E_0 \neq 0$, considerando
effetti non perturbativi.



Useremo il seguente risultato:

$$K_E(x_f, x_i; \beta/2, -\beta/2) = \langle x_f | e^{-\beta H/\hbar} | x_i \rangle = \int \mathcal{D}x e^{-S/\hbar}$$

dove $S = \int_{-\beta/2}^{\beta/2} dt \left(\frac{m\dot{x}^2}{2} + V(x) \right)$

è l'azione euclidea

$$= \sum_n \langle x_f | E_n \rangle \langle E_n | x_i \rangle e^{-\beta E_n/\hbar}$$

Questa somma, nel limite $\beta \rightarrow \infty$, è dominata dai primi livelli energetici

$$\Rightarrow K_E(x_f, x_i; \beta) \underset{\beta \rightarrow \infty}{\approx} \langle x_f | E_0 \rangle \langle E_0 | x_i \rangle e^{-\beta E_0/\hbar} + \langle x_f | E_1 \rangle \langle E_1 | x_i \rangle e^{-\beta E_1/\hbar} + \dots$$

(Importante in questo argomento che si consideri il P.l. euclideo.)

$$K_E(x_f, x_i; \beta) = \int \mathcal{D}x e^{-S[x]/\hbar}$$

$$x(-\beta/2) = x_i$$

$$x(\beta/2) = x_f$$

$$m \quad V(x) = \frac{\lambda}{4!} (x^2 - a^2)^2$$

$$S[x] = \int_{-\beta/2}^{\beta/2} dt \left[m \frac{\dot{x}^2}{2} + \frac{\lambda}{4!} (x^2 - a^2)^2 \right] \quad (*)$$

è def. positiva $\Rightarrow K_E$ è dominato ($\hbar \rightarrow 0$) dai MINIMI di S
(con cond. al bordo $x(-\beta/2) = x_i$ $x(\beta/2) = x_f$)

Cerchiamo sol. di

$$\frac{\delta S[x]}{\delta x} = 0$$

, che possono formalmente essere viste come soluz. delle eq. del moto classico con azione S (cioè V invertito)

Si come K_E è dominato da tali soluzioni, possiamo approssimare S attorno a x_{min} ("appross. semiclassica")

$$K_E = \sum_{x_{min}} \int_{x(-\beta/2)=x_i}^{x(\beta/2)=x_f} Dx e^{-S_E[x_{min}]/\hbar} - \frac{1}{2\hbar} \int \int dt_1 dt_2 (x-x_{min}) \frac{\delta^2 S[x_{min}]}{\delta x^2} (x-x_{min}) + \dots$$

$$= \sum_{x_{min}} e^{-S_E[x_{min}]/\hbar} \int Dy e^{-\frac{1}{2\hbar} \int \int dt_1 dt_2 y(t_1) \frac{\delta^2 S[x_{min}]}{\delta x^2}(t_1, t_2) y(t_2)}$$

oscillatore armonico $\frac{d^2}{dt^2} - \omega^2$

peso che cambia da

x_{min} a un altro.

Integrale che sappiamo fare

Cerchiamo soluzioni di $\frac{\delta S}{\delta x} = 0$ per la S (*)
 ↳ eq. di Lagrange con Lagrange

$$L = m \frac{\dot{x}^2}{2} + \frac{\lambda}{4!} (x^2 - a^2)^2$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m \ddot{x}$$

$$\rightarrow m \ddot{x} = \frac{\lambda}{6} (x^2 - a^2) x$$

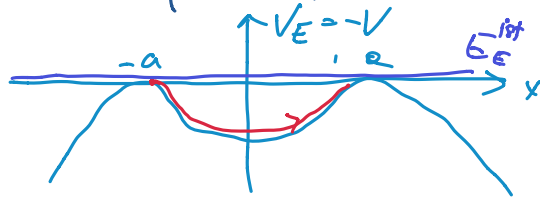
$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\lambda}{4 \cdot 3 \cdot 2} 2 (x^2 - a^2) \cdot 2x = \frac{\lambda}{6} (x^2 - a^2) x$$

Solus (minimi di S):

1) soluzioni costanti: $x(t) = \pm a$ (soddisfano cond. al bordo quando $x_i = x_f$)
 $S[x_{sol}] = 0$

2) soluzioni ISTANTANEE (o ISTANTONI), che si trovano con condiz. al bordo $x_i = \pm a$ e $x_f = \mp a$

→ solut. di ep. del moto classica rispetto a potenziale invertito:



$$V_E = -\frac{\lambda}{4!} (x^2 - a^2)^2$$

In pho sistema 1dim. conservativo ($L = T - V_E$)

$$E_E = m \frac{\dot{x}^2}{2} + V_E(x)$$

$$\Rightarrow E_E^{\text{ist}} = \frac{m \dot{x}_{\text{ist}}^2}{2} + V_E(x_{\text{ist}}) = 0 \quad \forall t$$

\uparrow
 costante
 \uparrow
 $\rightarrow 0$
 in $t \rightarrow \pm \infty$

$\Rightarrow V_E(x_{\text{ist}}) \rightarrow 0$
 $t \rightarrow \pm \infty$

Per tutti i tempi t

$$m \frac{\dot{x}_{\text{ist}}^2}{2} = -V_E(x_{\text{ist}}) = V(x_{\text{ist}})$$

$$\Rightarrow \dot{x}_{\text{ist}} = \sqrt{\frac{2V(x_{\text{ist}})}{m}}(x) \rightarrow \text{questo ci permette di calcolare: } S[x_{\text{ist}}]$$

$$S[x] = \int_{-\infty}^{+\infty} dt \left(\frac{m \dot{x}_{\text{ist}}^2}{2} + V(x_{\text{ist}}) \right) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt m \dot{x}_{\text{ist}}^2 = \int_{-a}^a m \dot{x} dx = \int_{-a}^a \sqrt{2mV(x)} dx$$

$\dot{x} dt = dx$

$t_f = +\infty$? Invece che $t_f = \beta/2$
 $t_i = -\infty$? $t_i = -\beta/2$

↳ perché siamo interessati al lim $\beta \rightarrow \infty$.

Per il caso in esame, l'ep. del mot si può risolvere analiticam. in due modi :

- risolvere le 2nd order diff. ep. di Laplace
- risolvere l'ep. al 1^o ordine (*) (più semplice)

(*) nel nostro caso

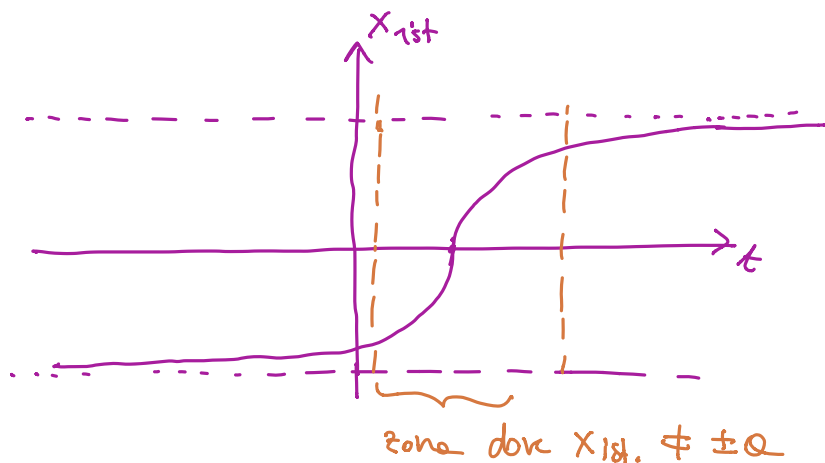
$$V(x) = \frac{\lambda}{4!} (x^2 - a^2)^2$$

$$\dot{x} = \pm \sqrt{\frac{2V(x)}{m}} = \pm \sqrt{\frac{2\lambda(x^2 - a^2)^2}{m \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}}$$

↓ def. $\omega^2 = \frac{\lambda a^2}{3m}$

$$\dot{x} = \pm \frac{\omega}{2a} (x^2 - a^2)$$

⇓ soluzione



$$x_{ist}(t) = \pm a \tanh\left(\frac{\omega}{2}(t - t_0)\right)$$

$$\frac{S[x_{ist.}]}{\hbar} = \frac{1}{\hbar} \int_{-a}^a m \dot{x} dx = \frac{1}{\hbar} \int_{-a}^a \frac{m\omega}{2a} (a^2 - x^2) dx = \frac{m\omega}{2a\hbar} \left[a^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_{-a}^a$$

$x_{ist.} = +a \tanh(\dots)$

$$= \frac{m\omega}{2a\hbar} \cdot \frac{2}{3} a^3 = \frac{2}{3} \frac{m\omega a^2}{\hbar} \cdot \frac{\lambda}{m} \cdot \frac{m}{\lambda} = \frac{2m^2\omega^3}{\lambda\hbar} \equiv \frac{2}{\bar{\lambda}}$$

↙ a-dimensionale
e sarà $\ll 1$ in
teoria delle perturb.

Da sopra: $a^2 = \frac{m\omega^2}{\lambda} \cdot 3 \cdot 2 \rightarrow \omega^2 = \frac{\lambda a^2}{3m}$

$$\frac{\lambda a^2}{m\omega^2} = \frac{\lambda\hbar}{m^2\omega^3} \frac{m\omega a^2}{\hbar} = \bar{\lambda} \frac{m\omega a^2}{\hbar}$$

↑ sopra detto che teoria perturb. in lim.

$$\frac{\lambda a^2}{m\omega^2} \ll 1$$

↖ contr. con $\bar{\lambda} \ll 1$