SISTEMI INTEGRABILI

Un sistema Hamilt. con $H(\bar{p},\bar{q})$ a n gradi di libertà è chiamato canonicam. integrabile se $\exists$ una trasf. canonica

$$\begin{cases} \bar{p} = \bar{u}(\bar{J},\bar{\varphi}) \\ \bar{q} = \bar{v}(\bar{J},\bar{\varphi}) \end{cases}$$

con $\bar{u}$ e $\bar{v}$ periodiche nelle coord. φ_h

a nuove variabili $(J_1,\dots,J_n,\varphi_1,\dots,\varphi_n) \in \mathbb{R}^n \times T^n$

(dette VARIABILI AZIONE - ANGOLO) t.c. la nuova Ham. è

$$K = H(\bar{u}(J,\varphi), \bar{v}(J,\varphi)) \equiv K(J_1,\dots,J_n)$$

Allora
$$\begin{cases} \dot{J}_h = 0 \\ \dot{\varphi}_h = \dfrac{\partial K}{\partial J_h} \equiv \omega_h(J) \end{cases} \rightarrow \quad \begin{aligned} J_h(t) &= J_h^0 \\ \varphi_h(t) &= \varphi_0 + \underbrace{\omega_h(J)}_{\text{cost.}} t \end{aligned}$$

In questa situazione, $J_1,\dots,J_n$ sono n costanti del moto che sono in involuzione tra di loro, cioè $\{J_h, J_k\} = 0 \quad \forall h,k$.

T^n è un TORO n-dimensionale $(T^n = \underbrace{S^1 \times \dots \times S^1}_{n\text{-volte}})$

↪ le variabili φ_h sono degli angoli di PERIODO 2π

$\Rightarrow$ $\varphi_h(t)$ sono funzioni periodiche di periodo

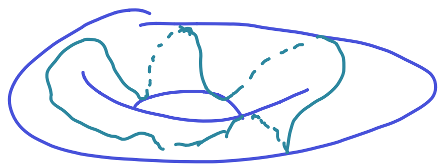
$$T_h = \frac{2\pi}{\omega_h(J)}$$

[T_h è il tempo in cui $\varphi_h(T_h) = \varphi_h(0) + 2\pi$]

$\Rightarrow$ Le traiettorie nello sp. delle fasi sono limitate e quasi-periodiche. [Le traiettorie giacciono su sottoinsiemi dove J_h sono cost., e sono dei cerchi nelle direz. φ_h].

Sp. delle fasi è $2n$-dim. Lo spazio dove i J sono cost. è n-dim. e isomorfo a T^n. Le traiettorie sono curve in T^n.

$n=2$ $\quad T^2$



moto è periodico se il rapporto tra le freq. ω_n è $\in \mathbb{Q}$.

Le traiettorie sono indip. dal sist. di coord usato per descriverle

$\Rightarrow$ il moto in $(\bar{p}, \bar{q})$ è pure un moto limitato e quasi-periodico.

<u>Teorema</u>. Preso sist. Ham. con n gradi di lib.
Ammettiamo che ESISTANO n COSTANTI DEL MOTO $f_i(\bar{p}, \bar{q})$ $\quad i = 1, \dots, n$, indip. e in INVOLUZIONE ($\{f_i, f_j\} = 0 \ \forall i,j$).

Inoltre ammettiamo che per un $\bar{a} \in \mathbb{R}^n$, l'insieme di livello
$$M_{\bar{a}} = \{ f_i(\bar{p}, \bar{q}) = a_i \}$$
sia compatto e connesso.

$\Rightarrow$ il sist. è integrabile ($\exists$ trasf. canonica a $(J_1, \dots, J_n, \psi_1, \dots, \psi_n) \in \mathbb{R}^n \times T^n$)

(Arnold)

$M_{\bar{a}}$ sarà parametrizzato dagli angoli ψ_h; variando ψ_h ottengo una curva γ_h in $M_{\bar{a}}$.

Def. Le variabili azione sono def. da

$$J_h = \frac{1}{2\pi} \oint_{\gamma_h} \sum_{j=1}^{n} p_j \, dq_j$$

J_h dipendono solo dalle cost. del moto f_h e sono anche loro indip. e in involuzione (i $\tilde{p}$ devono avere Par. Poisson nulle fra di loro)

$\Rightarrow$ si dim. che le variabili canonicam. coniugate alle J_h sono proprio angoli di periodo 2π.

$$\Rightarrow \quad T_h = \frac{2\pi}{\omega_h(J)}$$

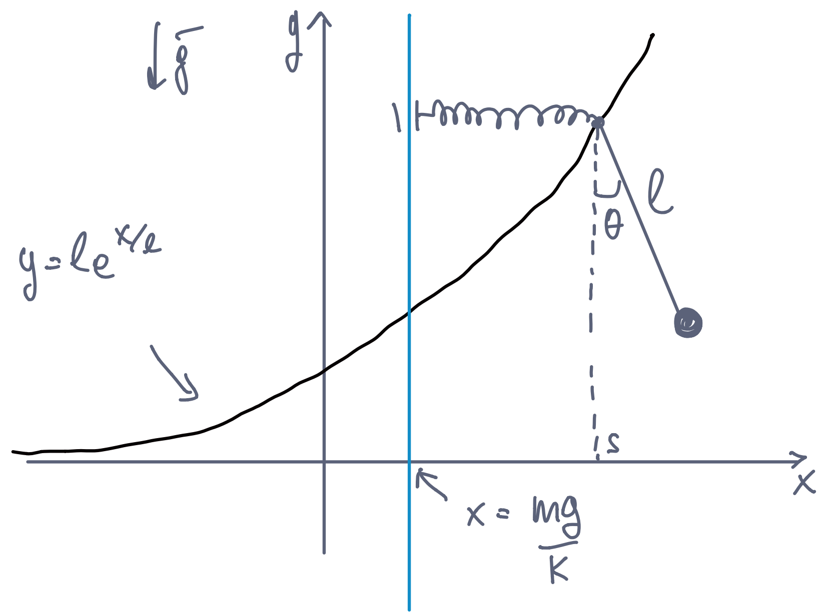
Osservazione: il sistema di un corpo in un campo di forze centrali con $V = V(r)$ è un sist. integrabile. In particolare si nota che $\exists$ $n=3$ cost. del moto in involuzione: $H, M_z, \bar{M}^2$

$$\{H, M_z\} = 0$$
$$\{H, \bar{M}^2\} = 0$$
$$\{\bar{M}^2, M_z\} = 0 .$$

Osservazione: tutti i sistemi a 1 grado di lib. ($n=1$) con Hamiltoniana indip. (esplicitam.) dal tempo sono integrabili. Infatti $\exists$ $n=1$ integrale del moto H con $\{H, H\} = 0$.

Osservazione: i sistemi in natura sono tipicamente non-integrabili. Però spesso sono approssimabili con sist. integrabili e il formalismo Hamiltoniano è molto utile per trattare questa approssimazione (Teoria delle perturbazioni)

ES. 2 del 25.09.19



$$\begin{cases} x = s + l \sin\theta \\ y = l e^{s/l} - l\cos\theta \end{cases}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{cases} \dot x = \dot s + l\dot\theta\cos\theta \\ \dot y = \dot s e^{s/l} + l\dot\theta \sin\theta \end{cases}$$

1) $T = \frac{1}{2}m(\dot x^2 + \dot y^2) = \frac{1}{2}m\Big[\dot s^2 + 2l\dot s\dot\theta\cos\theta + l^2\dot\theta^2\cos^2\theta + \dot s^2 e^{2s/l} + 2l\dot s\dot\theta e^{s/l}\sin\theta + l^2\dot\theta^2\sin^2\theta\Big]$

$= \frac{1}{2}m\Big[\dot s^2(1+e^{2s/l}) + 2l\dot s\dot\theta(\cos\theta + e^{s/l}\sin\theta) + l^2\dot\theta^2\Big]$

$V = mgy + \frac{1}{2}k\left(s - \frac{mg}{K}\right)^2 = mgl\left(e^{s/l} - \cos\theta\right) + \frac{K}{2}\left(s - \frac{mg}{K}\right)^2$

$L = T - V =$

$= \frac{1}{2}m\Big[\dot s^2(1+e^{2s/l}) + 2l\dot s\dot\theta(\cos\theta + e^{s/l}\sin\theta) + l^2\dot\theta^2\Big]$

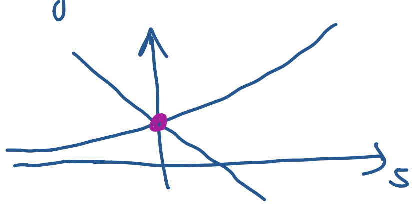
$\quad - mgl\left(e^{s/l} - \cos\theta\right) - \frac{K}{2}\left(s - \frac{mg}{k}\right)^2$

2) Ci sono coord. cicliche? No.

3) $\frac{\partial V}{\partial s} = mg e^{s/l} + k\left(s - \frac{mg}{K}\right) = 0 \rightarrow e^{s/l} = 1 - s\frac{K}{mg}$ ⊛

$\frac{\partial V}{\partial \theta} = mgl\sin\theta = 0 \longrightarrow \underline{\underline{\theta = 0, \pi}}$

⊛ ep. trasc.



$\Rightarrow \underline{\underline{s = 0}}$

Pti ep.

$(s,\theta) = (0,0) \quad (0,\pi)$

$$\partial^2 V = \begin{pmatrix} \frac{mg}{\ell} e^{s/\ell} + K & 0 \\ 0 & mg\ell\cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\partial^2 V(0,0) = \begin{pmatrix} \frac{mg}{\ell} + K & 0 \\ 0 & mg\ell \end{pmatrix}$$ def. positiva $\Rightarrow$ $(0,0)$ è STABILE

$$\partial^2 V(0,\pi) = \begin{pmatrix} \frac{mg}{\ell} + k & 0 \\ 0 & -mg\ell \end{pmatrix}$$ non è def. pos. $(0,\pi)$ è INSTABILE

4) Linearizzare L attorno a pto $(0,0)$

- $A = a(0,0) \qquad B = \partial^2 V(0,0) \qquad \hat{L} = \frac{1}{2}\dot{q}\cdot A\dot{q} - \frac{1}{2} q \cdot B q$

- $$L = \frac{1}{2} m \left[\dot{s}^2 (1 + e^{2s/\ell}) + 2\ell \dot{s}\dot{\theta} (\cos\theta + e^{s/\ell}\sin\theta) + \ell^2\dot{\theta}^2 \right] - mg\ell (e^{s/\ell} - \cos\theta) - \frac{K}{2}\left(s - \frac{mg}{K}\right)^2$$

Espandiamo L attorno a $(s, \theta, \dot{s}, \dot{\theta}) = (0,0,0,0)$

(ci teniamo solo i termini quadratici nell'espansione)

$$\hat{L} = \frac{1}{2} m \left[\dot{s}^2 (1+1) + 2\ell\dot{s}\dot{\theta}(1 + 0) + \ell^2\dot{\theta}^2 \right] - mg\ell\left(\cancel{1} + \cancel{\frac{s}{\ell}} + \frac{1}{2}\frac{s^2}{\ell^2}\right) + mg\ell\left(\cancel{1} - \frac{\theta^2}{2}\right) - \frac{K}{2}\left(s^2 - \cancel{2s\frac{mg}{K}} + \cancel{\left(\frac{mg}{K}\right)^2}\right)$$

$$= m\dot{s}^2 + m\ell\dot{s}\dot{\theta} + \frac{m}{2}\ell^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{mg}{\ell} + K\right)s^2 - \frac{1}{2} mg\ell\theta^2$$

5) prendiamo $K = \frac{mg}{\ell}$

$\frac{1}{2}\dot{q}\cdot A\dot{q} - \frac{1}{2} q \cdot B q$

$$\hat{L} = \frac{1}{2}(2m\dot{s}^2 + 2m\ell\dot{s}\dot{\theta} + m\ell^2\dot{\theta}^2) - \frac{mg}{\ell}s^2 - \frac{1}{2}mg\ell\theta^2$$

$$A = m\begin{pmatrix} 2 & \ell \\ \ell & \ell^2 \end{pmatrix} \qquad B = m\begin{pmatrix} 2\frac{g}{\ell} & \\ & g\ell \end{pmatrix}$$

$$\det(B - \lambda A) = \qquad UAU^T = \mathbb{1} \qquad U' = \overset{C \text{ è ortogonale}}{C}U$$

$$U'AU'^T = CUAU^TC^T = \, = CC^T = \mathbb{1}$$

$$= \det m\begin{pmatrix} \frac{2g}{\ell} - 2\lambda & -\ell\lambda \\ -\ell\lambda & g\ell - \ell^2\lambda \end{pmatrix}$$

$$= m^2 \underbrace{\left[2\left(\frac{g}{\ell} - \lambda\right)\left(\frac{g}{\ell} - \lambda\right) - \lambda^2\right]}\ell^2 = 0$$

$$\lambda^2 - 4\frac{g}{\ell}\lambda + 2\left(\frac{g}{\ell}\right)^2 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{2g}{\ell} \pm \frac{g}{\ell}\sqrt{4-2} = \underbrace{(2 \pm \sqrt{2})}_{>0}\frac{g}{\ell} \quad \text{dim. di } \omega^2$$

$$(B - \lambda A)\bar{u} = 0 \rightarrow \text{autovett.}$$

$$\lambda = (2+\sqrt{2})\frac{g}{\ell} \quad \begin{pmatrix} \frac{2g}{\ell}(-1-\sqrt{2}) & -g(2+\sqrt{2}) \\ -g(2+\sqrt{2}) & g\ell(-1-\sqrt{2}) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\bar{u}^{(1)}, \quad \bar{u}^{(2)}$$

$$\underset{\lambda_1}{\overset{\shortparallel}{(2+\sqrt{2})\frac{g}{\ell}}} \qquad \underset{\lambda_2}{\overset{\shortparallel}{(2-\sqrt{2})\frac{g}{\ell}}}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} u_1^{(1)} \\ u_2^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ell(2+\sqrt{2}) \\ -2(1+\sqrt{2}) \end{pmatrix}$$

$$-(2+\sqrt{2})^2 + 2(1+\sqrt{2})^2$$

$$-(4+2+4\sqrt{2}) + (2+4+4\sqrt{2}) = 0$$

$$\bar{u}^{(1)} \cdot \cos\left(\sqrt{\lambda_1}\, t + \varphi_1\right)$$

$$\bar{u}^{(2)} \cos\left(\sqrt{\lambda_2}\, t + \varphi_2\right)$$

$$\begin{pmatrix} u_1^{(2)} \\ u_2^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ell(2-\sqrt{2}) \\ -2(1-\sqrt{2}) \end{pmatrix}$$