EQUAZIONE DI HAMILTON - JACOBI (HJ)

Trasf. canoniche permettono di tradurre un sistema Hamiltoniano con eq. differenziali (canoniche) difficili in un sistema equivalente con Hamiltoniana K che possibilmente dia eq. differ. (canoniche) semplici.

Esiste una prescrizione per trovare una trasf. canonica che dia una nuova Hamiltoniana semplicissima?

In particolare $K=0$?

eq. diff. semplicissime

$$\begin{cases} \dot{\tilde{p}}_h = -\dfrac{\partial K}{\partial \tilde{q}_h} = 0 \\ \dot{\tilde{q}}_h = \dfrac{\partial K}{\partial \tilde{p}_h} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \tilde{p}_h(t) = \tilde{p}_h^{(0)} \\ \tilde{q}_h(t) = \tilde{q}_h^{0} \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} \tilde{p}_h(t) &= \underline{\underline{u_h}}(\tilde{p}^{(0)}, \tilde{q}^{(0)}, t) \\ \tilde{q}_h(t) &= \underline{\underline{v_h}}(\tilde{p}^{(0)}, \tilde{q}^{(0)}, t) \end{aligned}\right\}$$ risolvono eq. di Hamilton con Hamiltoniana $H(\bar{p}, \bar{q}, t)$

Tale prescrizione è data dall' EQ. di H-J.

Cerchiamo trasf. canonica t.c. $K=0$. K è legata ad H dalla relazione $K = \tilde{H} + \dfrac{\partial F_a}{\partial t}$ F_a funz. gen. $a=1,2,3,4$

Cercheremo una funz. generatrice $(F_2(\tilde{p}, q, t))$ t.c.

$$\tilde{H} + \frac{\partial F_2}{\partial t} = K = 0.$$

$$p_h = \frac{\partial F_2}{\partial q_h}(\tilde{p}, q, t)$$

$$\tilde{q}_h = \frac{\partial F_2(\tilde{p}, q, t)}{\partial \tilde{p}_h}$$

$$\boxed{H\left(\frac{\partial F_2}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial F_2}{\partial q_n}, q_1, \dots, q_n, t\right) + \frac{\partial F_2}{\partial t} = 0}$$

EQ. DI HAMILTON - JACOBI (eq. alle derivate parziali)

È un'equazione nell'incognita $F_2(\tilde{p}, q, t)$. Risolta, otteniamo F_2, cioè la trasf. canonica cercata.

In questa eq. F_2 viene spesso indicata con S.

L'eq. ammette un INTEGRALE COMPLETO se ∃ una famiglia di soluzioni

$$S(q_1, \dots, q_n, t; \alpha_1, \dots, \alpha_{n+1})$$

dove $\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}$ sono parametri indipendenti (cost. di integrazione)

Eq. di H-J contiene solo le derivate parziali di S (non anche S stesso) ⇒ se S è soluz. anche $S + \alpha$ è soluz. (la cost. additiva α non è interessante per i nostri propositi, poiché S sarà funz. generatrice di trasf. canonica, dove appaiono solo derivate della funz. generatrice) ⇒ possiamo dimenticarci di uno degli $n+1$ parametri α_i → soluz. completa sarà

$$S(q_1, \dots, q_n, t; \alpha_1, \dots, \alpha_n) \qquad \left(\det \frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_h \partial q_k} \neq 0\right)$$

Possiamo prendere $\alpha_i = \tilde{p}_i$, che sappiamo essere cost. $(K=0)$

$\Rightarrow$ S è la funzione generatrice di una trasformazione canonica a un sist. con coord. $\tilde{q}$ e momenti $\tilde{p}$ costanti
$\rightarrow$ risolve il "problema meccanico".

$$p_h = \frac{\partial S}{\partial q_h} \qquad \tilde{q}_h = \frac{\partial S}{\partial \tilde{p}_h}$$

$$H + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

$S \rightarrow$ valutiamo in $\bar{q}(t)$ e $\tilde{p}$ cost.

$$\frac{d}{dt} S(q(t), \tilde{p}; t) = \sum_h \frac{\partial S}{\partial q_h} \dot{q}_h + \frac{\partial S}{\partial t} = \sum_h p_h \dot{q}_h - H$$

$$= L(q(t), \dot{q}(t), t)$$

$$S[q] = \int_{t_0}^{t} L\, dt$$

funz. in t

AZIONE HAMILTONIANA

Quando l'Hamiltoniana H non dip. esplicitam. dal tempo, allora

$$S[\bar{q}, t; \bar{\alpha}] = W[\bar{q}; \bar{\alpha}] - a t \quad \text{è soluz. di eq. di H-J}$$

W soddisfa l'eq. di H-J ridotta

$$H\left(\frac{\partial W}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial W}{\partial q_n}, q_1, \dots, q_n\right) = a \qquad a \text{ è una cost.}$$

Eq. con incognite $\underline{W(q_1, \dots, q_n)}$ e $\underline{a}$; pto soluz. dip. ancora da n parametri $\alpha_1, \dots, \alpha_n$

Soluz: $W(q_1, \dots, q_n; \alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $a_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}$

W genera una trasf. canonica indip. dal t che muta H in $K(\tilde{P}_1, \dots, \hat{P}_n) \equiv a_{\alpha_1, \dots, \alpha_m}$

Nuove eq. di Ham. sono allora semplicissime

$$\dot{\tilde{p}}_h = -\frac{\partial K(\tilde{p})}{\partial \tilde{q}_h} = 0 \qquad \tilde{p}_h(t) = \tilde{p}_h^{(0)}$$

$$\dot{\tilde{q}}_h = \frac{\partial K(\tilde{p})}{\partial \tilde{p}_h} \text{ cost.} \Rightarrow \tilde{q}_h(t) = \underbrace{\frac{\partial K(\tilde{p})}{\partial \tilde{p}_h}}_{\omega_h} t + \tilde{q}_h^{(0)}$$

Esempio: Oscillatore armonico

$$H = \frac{1}{2m}\left(p^2 + m^2\omega^2 q^2\right) \qquad (n=1)$$

$\to$ Eq. H-J: $$\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)^2 + m^2\omega^2 q^2\right] + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

H è indip. da t $\to$ $S(q, t; \tilde{p}) = W(q, \tilde{p}) - a t$

$$\to \frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial W}{\partial q}\right)^2 + m^2\omega^2 q^2\right] = a \qquad (*)$$

Eq. di H-J ridotta per l'oscill. armonico

Abbiamo una sola cost. α (non-additiva)

$$\tilde{p} \equiv I$$
$$a = \omega \alpha$$
$$\tilde{q} \equiv \psi$$

Risolviamo $(*)$:

$$\left(\frac{\partial W}{\partial q}\right)^2 = 2m\omega I - m^2\omega^2 q^2$$

$$W(q; I) = \sqrt{2m\omega I} \int_{q_0}^{q} \sqrt{1 - \frac{m\omega q'^2}{2I}}\, dq' = \int_{q_0}^{q} \sqrt{2m\omega I - m^2\omega^2 q^2}\, dq$$

A noi interessano le derivate di W rispetto a q e I per ottenere la trasf. canonica cercata

$p = \frac{\partial W}{\partial q}(q, I)$ $\qquad$ $\psi = \frac{\partial W}{\partial I}(q, I)$

invertire $\leadsto$ $q = q(I, \psi)$

successiv. sostituiamo a sinistra

$\leadsto$ $p = p(I, \psi)$

$$\psi = \frac{\partial W}{\partial I} = \int_{q_0}^{q} \frac{2m\omega}{2\sqrt{2m\omega I - m^2\omega^2 q'^2}}\, dq'$$

$x \equiv \sqrt{\frac{m\omega}{2I}}\, q'$

$$= \sqrt{\frac{m\omega}{2I}} \int_{q_0}^{q} \frac{dq'}{\sqrt{1 - \frac{m\omega}{2I} q'^2}} = \int_{\sqrt{\frac{m\omega}{2I}} q_0}^{\sqrt{\frac{m\omega}{2I}} q} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$= \arcsen\left(\sqrt{\frac{m\omega}{2I}}\, q\right) - \psi_0 = \psi(I, q)$$

$$p = \frac{\partial W}{\partial q} = \sqrt{2m\omega I}\sqrt{1 - \frac{m\omega q^2}{2I}} = p(I, q)$$

TRASF. CANONICA

- Invertiamo $\psi = \psi(I, q) \Rightarrow$ $\boxed{q = \sqrt{\frac{2I}{m\omega}}\, \operatorname{sen}(\psi + \psi_0)}$ $\quad v(\tilde{p}, \tilde{q})$
- sostituiamo in $p = p(I, q) \Rightarrow$ $\boxed{p = \sqrt{2m\omega I}\, \cos(\psi + \psi_0)}$ $\quad u(\tilde{p}, \tilde{q})$

$$K(I, \psi) = H(u(I, \psi), v(I, \psi)) = \frac{1}{2m}\Big(2m\omega I \cos^2(\psi + \psi_0) + $$

trasf. can. indip. dal t

$$+ m^2\omega^2 \frac{2I}{\cancel{m\omega}} \operatorname{sen}^2(\psi + \psi_0) \Big) =$$

$$= \frac{2m\omega}{2m} I \left(\cos^2(\psi + \psi_0) + \operatorname{sen}^2(\psi + \psi_0) \right)$$

$$= \omega I$$

$\Rightarrow$ Eq. di Ham. in I, ψ sono

$$\begin{cases} \dot{I} = -\dfrac{\partial K}{\partial \psi} = 0 & \Rightarrow \quad I \text{ costante} \\ \dot{\psi} = \dfrac{\partial K}{\partial I} = \omega & \Rightarrow \quad \psi(t) = \omega t + \hat{\psi} \leftarrow \text{cost.} \end{cases} \longrightarrow$$

$q_0 = q(t=0)$
$\Downarrow$
$\hat\psi + \psi_0 = \psi_0$ a $t=0$
$\Rightarrow \hat{\psi} = 0$

$$\rightarrow \quad q(t) = \sqrt{\frac{2I}{m\omega}} \sin(\omega t + \psi_0)$$

soluz. dell'osc. arm.

I viene chiamata "variabile azione"
ψ " " "variabile angolo"

Esempio: HJ per il problema di Keplero in 3d

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\varphi^2}{r^2 \sin^2\theta}\right) + V(r)$$

Eq H-J:

$$H\left(\frac{\partial W}{\partial r}, \frac{\partial W}{\partial \theta}, \frac{\partial W}{\partial \varphi}; r, \theta, \varphi\right) = E_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3}$$

Cerchiamo soluz. della forma

$$W = W_r(r) + W_\theta(\theta) + W_\varphi(\varphi)$$

$\rightarrow$ eq. diventa:

$$\frac{1}{2m}\left[(W_r')^2 + \frac{(W_\theta')^2}{r^2} + \frac{(W_\varphi')^2}{r^2\sin^2\theta}\right] + V(r) = E_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3}$$

$$\left[\begin{array}{l} \dot{p}_\varphi = -\dfrac{\partial H}{\partial \varphi} = 0 \\ \varphi \text{ ciclico} \Rightarrow p_\varphi \text{ è} \\ \text{cost. del moto.} \end{array}\right]$$

φ è coord. ciclica, cioè non compare in H
$\Rightarrow$ possiamo scegliere $W_\varphi = \alpha_\varphi \cdot \varphi$

↓ riduciamo il problema a due variabili

$$\frac{1}{2m}\left[(W_r')^2 + \frac{(W_\theta')^2}{r^2} + \frac{\alpha_\varphi^2}{r^2 \sin^2\theta} \right] + V(r) = E_{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_\varphi}$$

$$\Downarrow$$

$$\underbrace{\left\{ \frac{1}{2m} (W_r')^2 + V(r) - E_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_\varphi} \right\} \cdot r^2}_{\text{LHS dip solo da } r} = \underbrace{-\frac{1}{2m}\left[(W_\theta')^2 + \frac{\alpha_\varphi^2}{\sin^2\theta} \right]}_{\text{RHS dip. solo da } \theta}$$

$\Rightarrow$ sia LHS che RHS sono indip. da r e θ

(perché LHS = RHS)

cioè sia LHS che RHS sono uguali a una cost. che chiamiamo $-\frac{\alpha_\theta^2}{2m}$

$$\Rightarrow \begin{cases} (W_\theta')^2 + \dfrac{\alpha_\varphi^2}{\sin^2\theta} = \alpha_\theta^2 \\ (W_r')^2 + \dfrac{\alpha_\theta^2}{r^2} = 2m\left(E_{\alpha_1 \alpha_\theta \alpha_\varphi} - V(r)\right) \end{cases}$$

↓ scegliamo $\alpha_1 = E$

Le cost. di integrazione sono $\alpha_\varphi, \alpha_\theta, E$:

$$p_\varphi = \frac{\partial W}{\partial \varphi} = \frac{\partial W_\varphi}{\partial \varphi} = \alpha_\varphi \quad \to \quad M_z$$

$$p_\theta^2 + \frac{p_\varphi^2}{\sin^2\theta} = \left(\frac{\partial W_\theta}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{\alpha_\varphi^2}{\sin^2\theta} = \alpha_\theta^2 \quad \to \quad \overline{M}^2$$

$$E = \alpha_1 \quad \to \quad E$$

Eq. di H-J si risolve per quadrature

$$W_r(r) = \int_{r_0}^{r} \sqrt{2m(E - V(r')) - \frac{\alpha_\theta^2}{r'^2}}\, dr' \qquad W_\theta(\theta) = \int_{\theta_0}^{\theta} \sqrt{\alpha_\theta^2 - \frac{\alpha_\varphi^2}{\sin^2\theta'}}\, d\theta'$$

$$W_\varphi(\varphi) = \alpha_\varphi \varphi$$

(Quando $\alpha_\theta = \alpha_\varphi$, θ è fissato $\left((W')^2 \geq 0 \Rightarrow |\mathrm{sen}\,\theta| = 1 \right)$)

$$K(E, \alpha_\varphi, \alpha_\theta) = E$$

$$\dot{E} = 0 \qquad \dot{\alpha}_\varphi = 0 \qquad \dot{\alpha}_\theta = 0 \qquad \dot{\tilde{q}}_\varphi = \frac{\partial K}{\partial \alpha_\varphi} = 0 \qquad \dot{\tilde{q}}_\theta = \frac{\partial K}{\partial \alpha_\theta} = 0$$

$$\dot{\tilde{q}}_E = \frac{\partial K}{\partial E} = 1 \longrightarrow \tilde{q}_E(t) = t + t_0$$

$$\underset{\text{cost.}}{\tilde{q}_\varphi} = \frac{\partial W}{\partial \alpha_\varphi} = \varphi + \frac{\partial W_\theta(\theta)}{\partial \alpha_\varphi}$$

$$\underset{\text{cost.}}{\tilde{q}_\theta} = \frac{\partial W}{\partial \alpha_\theta} = \frac{\partial W_r}{\partial \alpha_\theta} + \frac{\partial W_\theta}{\partial \alpha_\theta}$$

$$\underset{t+t_0}{\tilde{q}_E} = \frac{\partial W_r}{\partial E} \quad \Big\}$$ legge oraria per problema di Keplero.

$$W_r(r) = \int_{r_0}^{r} \sqrt{2m(E - V(r')) - \frac{\alpha_\theta^2}{r'^2}}\, dr'$$

$$t + t_0 = \int_{r_0}^{r} \frac{2m\, dr'}{2\sqrt{2m\Big(E \underbrace{- V(r') - \frac{\alpha_\theta^2}{2mr'^2}}_{-V_{eff}(r')}\Big)}}$$

(nella trattazione lagrangiana avevamo preso $\alpha_\theta = \underset{\ell}{\alpha_\varphi}$)

M_i sono cost. del moto : $\{M_i, H\} = 0$ se H è inv. per rotaz.

$$\Rightarrow \{\bar{M}^2, H\} = \sum_{i=1}^{3} \{M_i \cdot M_i, H\} = \sum_{i=1}^{3} 2M_i \{M_i, H\} = 0$$

$\Rightarrow \bar{M}^2$ è una cost. del moto.

Inoltre

$$\underline{\{\bar{M}^2, M_j\}} = \sum_i \{M_i^2, M_j\} = \sum_i 2M_i \{M_i, M_j\} = \sum_{ik} 2 M_i \epsilon_{kij} M_k = \underline{0}$$

sim. in $i \leftrightarrow k$

antisim. in $k \leftrightarrow i$

H è una cost. del moto quando

$$\frac{d}{dt} H(\bar{p}(t), \bar{q}(t), t) = 0$$

soddisf. eq. Ham.

Cioè quando

$$\underbrace{\{H, H\}}_{=0} + \frac{\partial H}{\partial t} = 0 \quad \rightarrow \quad H \text{ è cost. del moto } (E)$$

(la antisimmetria delle Parentesi di Poisson)

quando non dip. esplicitam. dal tempo.