SISTEMI DINAMICI

- LEZIONE DEL 21 MAGGIO 2020
- PRIMA PARTE

Sistemi dinamici di tipo gradiente.

$\exists\ V : U \longrightarrow \mathbb{R} \qquad U \subset \mathbb{R}^n$

$\dot{x} = -\nabla V(x) \qquad \nabla V = \left(\frac{\partial V}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial V}{\partial x_n} \right)$

$(\dot{x} = f(x))$

$\rightarrow\ \dot{V} < 0$ lungo il flusso e $\dot{V}(x^*) = 0$

$\rightarrow\ N_c = \{ V(x) = c \}$: ∇V ortogonale

SISTEMI HAMILTONIANI

Consideriamo un sistema dinamico n-dim

$$\frac{d}{dt} x(t) = f(x(t))$$

$I(x)$: quantità conservata (lungo il

flusso) se vale

$$0 = \frac{d I(x(t))}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial I}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} = \nabla I \cdot \frac{dx}{dt} =$$

$$= \nabla I \cdot f$$ → il gradiente di una quantità conservata è ortogonale al campo vettoriale

⇒ le traiettorie giacciono sugli insiemi di livello $I(x(t)) =$ costante

Esempio   Modelli Preda-Predatore
(Lotka-Volterra)

$$\begin{cases} u'(t) = r\,u(t) - a\,u(t)\,v(t) = \big(r - a\,v(t)\big)\,u(t) \\ v'(t) = -\mu\,v(t) + d\,u(t)\,v(t) = \big(-\mu + d\,u(t)\big)\,v(t) \end{cases}$$

$(r, a, \mu, d > 0)$

Punti eq: $(u^*, v^*) = (0, 0)$, $(u^*, v^*) = \left(\frac{\mu}{d}, \frac{r}{a}\right)$

La quantità

$$H(u,v) = d\,u(t) - \mu \log u(t) + a\,v(t) - r \log v(t)$$

si conserva. Verifichiamo:

$$\frac{d}{d\tau} H(u,v) = u'(\tau)\left(d - \frac{\mu}{u(\tau)}\right) + v'(\tau)\left(a - \frac{\varepsilon}{v(\tau)}\right)$$

$$= \left(\varepsilon - a\,v(\tau)\right)u(\tau)\left(d - \frac{\mu}{u(\tau)}\right) +$$

$$+ \left(-\mu + d\,u(\tau)\right)v(\tau)\left(a - \frac{\varepsilon}{v(\tau)}\right) = 0$$

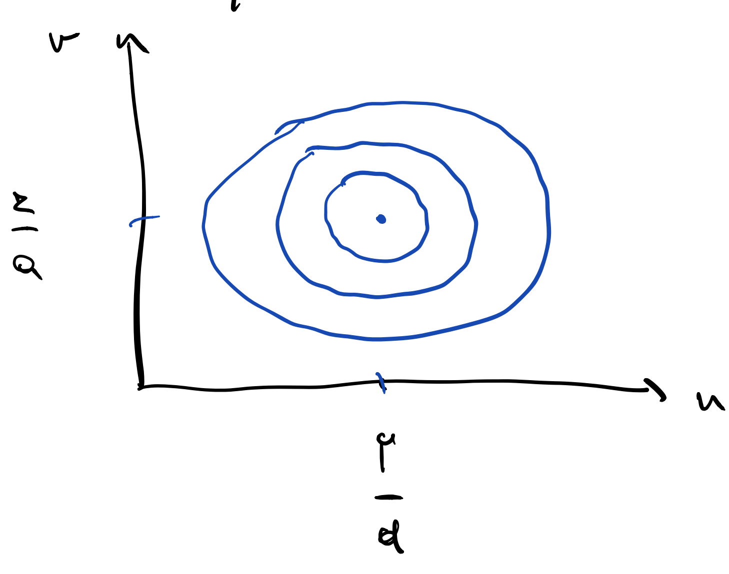
$\Rightarrow$ le soluzioni giacciono sulle curve

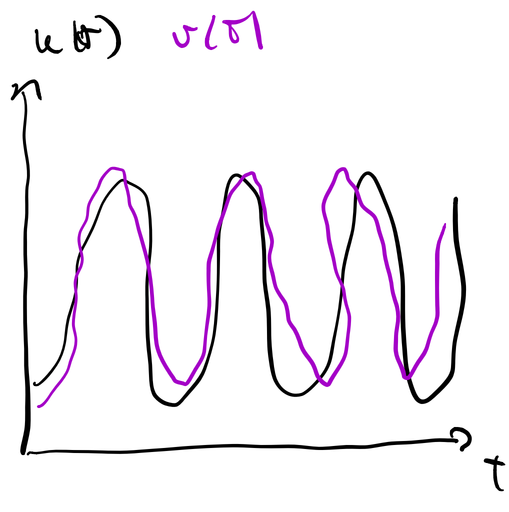
$H(u,v) =$ costante

L'insieme $\{H(u,v) = k\}$ per

$k > H\left(\frac{\mu}{d}, \frac{\varepsilon}{a}\right)$ è una curva

compatta che circonda il punto di equilibrio





Poniamo $p = \log u$, $\quad q = \log v$

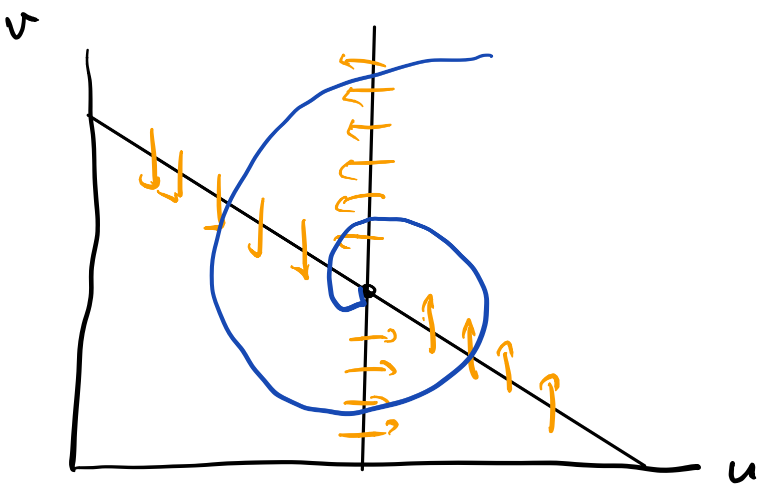
$$\to h = d e^{q} - \mu p + a e^{p} - r q$$

$$\begin{cases} \dfrac{dq}{d\tau} = \dfrac{d}{d\tau} \log v = \dfrac{1}{v} \dfrac{dv}{d\tau} = (-\mu + du) = \dfrac{\partial h}{\partial p} \\[2ex] \dfrac{dp}{d\tau} = \dfrac{d}{d\tau} \log u = \dfrac{1}{u} \dfrac{du}{d\tau} = (r - av) = -\dfrac{\partial h}{\partial q} \end{cases}$$

Esercizio: crescita logistica

$$u' = (r - \underline{bu)u} - auv$$

$$v' = -\mu v + duv$$



1. equilibrio
2. isocline
3. ritratto di fase

In generale:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{d\tau} q_i = \dfrac{\partial H}{\partial p_i} \\[2ex] \dfrac{d}{d\tau} p_i = -\dfrac{\partial H}{\partial q_i} \end{cases}$$

in meccanica

q_i coordinate libere

p_i momenti coniugati

$$H(p,q) = \sum_i \frac{p_i^2}{2m} + V(q_i)$$

$$\rightarrow \frac{d}{dt} H = \sum_i \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{dq_i}{dt} + \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{dp_i}{dt} = 0$$

Introduciamo le parentesi di Poisson

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$$

$$\{F, G\} := \nabla F^T \cdot J \cdot \nabla G =$$

$$= \sum_i \left(\frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial q_i} \right)$$

Allora posiamo $z = (q, p)$: le equazioni di Hamilton diventano

$$\dot{z} = \{z, H\} = J \cdot \nabla H$$

$\rightarrow$ implica che i punti critici sono dati da $\nabla H = 0$

Per ogni funzione $F = F(z(t), t)$

$$\frac{d}{dt} F = \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial z} \dot{z} = \frac{\partial F}{\partial t} + \{F, H\}$$

se H è indipendente dal tempo

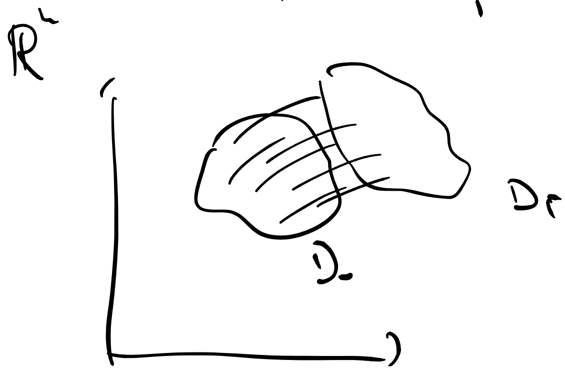
$$H = H(p(t), q(t))$$

$\rightarrow$ si conserva lungo le traiettorie

$$\frac{dH}{dt} = \{H, H\} = \nabla H^T \cdot J \cdot \nabla H = 0$$

J è antisimmetrica

$\dot{x} = f(x)$, φ_T il flusso



$$D_T = \varphi_T(D_0)$$

$$\mathrm{vol}\, D_T$$

<u>Lemma</u>
$$\frac{d}{dT}\left(\mathrm{Vol}\, D_T\right)\Big|_{T=0} = \int_{D_0} \nabla\cdot f \, dx$$

$$\left(\nabla\cdot f = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \right)$$

<u>Dim</u>: usiamo lo Jacobiano della trasf.

$$\mathrm{Vol}\, D_T = \int_{D_T} dx = \int_{D_0} \det \frac{\partial \varphi_T(x)}{\partial x}\, dx$$

Espandiamo in serie di Taylor

$$\varphi_T(x) = x + f(x)\,T + O(T^2)$$

$$\frac{\partial \varphi_T(x)}{\partial x} = \mathrm{id} + \frac{\partial f}{\partial x}\,T + O(T^2)$$

Andiamo a vedere $\det\left(\frac{\partial \varphi_T(x)}{\partial x}\right)$

Formula $\det(\mathbb{1} + A\varepsilon) = 1 + \varepsilon \operatorname{Tr} A + O(\varepsilon^2)$

segue

$$\det(\mathbb{1} + A\varepsilon) = \prod_i (1 + \varepsilon \lambda_i) = 1 + \varepsilon \sum_i \lambda_i + O(\varepsilon^2)$$

Allora $\det\left(\dfrac{\partial \varphi_\tau(x)}{\partial x}\right) =$

$$= \det\left(\mathbb{1} + \frac{\partial f}{\partial x}\tau\right) + O(\tau^2)$$

$$= 1 + \operatorname{Tr}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\tau + O(\tau^2)$$

$$\mathrm{Vol}\, D_\tau = \int_{D_0} \det \frac{\partial \varphi_\tau(x)}{\partial x}\, dx =$$

$$= \mathrm{Vol}\, D_0 + \int_{D_0} \tau \cdot \nabla \cdot f \, dx + O^2(\tau^2)$$

<u>Teorema</u> [Liouville] Se $\nabla \cdot f = 0$, allora $\forall D_0$, $\mathrm{Vol}\, D_\tau = \mathrm{Vol}\, D_0$

Per un sistema hamiltoniano,

$$f = \left(\frac{\partial H}{\partial p}, -\frac{\partial H}{\partial q}\right)$$

$$D_i f = \sum_i \left(\frac{\partial}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) = 0$$

SISTEMI DINAMICI

- LEZIONE DEL 21 MAGGIO 2020
- SECONDA PARTE

Sistemi non lineari

→ linearizzando

{ gradiente
{ hamiltoniana

→ classificazione ?

Q: quando due sistemi dinamici descrivono lo stesso fenomeno?

CONIUGAZIONE TOPOLOGICA

Definizione

Due flussi $\varphi_t : A \to A$, $\psi_t : B \to B$ sono topologicamente coniugati se esiste un omeomorfismo (continuo & con inversa continua) $h: A \to B$ tale che

$$h(\varphi_t(x)) = \psi_t(h(x)) \qquad \forall x \in A \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

ovvero se il diagramma

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varphi_t"] \arrow[d, "h"'] & A \arrow[d, "h"] \\ B \arrow[r, "\psi_t"'] & B \end{tikzcd}$$

commuta.

Ad esempio: c'è corrispondenza tra le traiettorie

x^* pto fisso: $\varphi_t(x^*) = x^*$. Allora

$$\psi_t(h(x^*)) = h(\varphi_t(x^*)) = h(x^*)$$

Possiamo dare una definizione più debole che richiede solo che la direzione del tempo sia la stessa

<u>Def</u> $\varphi_t: A \to A$, $\psi_t: B \to B$ sono topologicamente equivalenti, se $\exists$ omeomorfismo $h: A \to B$ e una mappa $\tau: A \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

monotona crescente in Γ, tale che

il diagramma

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varphi_{\tau(x,\Gamma)}"] \arrow[d, "h"'] & A \arrow[d, "h"] \\ B \arrow[r, "\psi_\tau"'] & B \end{tikzcd}$$

commuta, cioè

$$h\left(\varphi_{\tau(x,\Gamma)}(x)\right) = \psi_T(h(x))$$

Per sistemi dinamici unidimensionali:

<u>Teorema</u>: Due flussi φ e ψ in $\mathbb{R}$ sono topologicamente equivalenti $\iff$ i loro pti fissi, ordinati lungo la linea reale, possono essere messi in corrispondenza uno ad uno, in modo che pti fissi corrispondenti abbiano lo stesso tipo topologico (pozzo, sorgente, semistabile)

<u>Dim</u> Se abbiamo h, allora per def pti fissi corrispondono in modo ordinato e hanno lo stesso carattere (perché h è monotono)

Viceversa, supponiamo φ e ψ tali che i pti critici siano in corrispondenza

$\longrightarrow$ costruiamo h.

Supponiamo che pti eq. in numero finito

$\varphi \qquad x_1^* < \dots < x_n^* \qquad$ (in $\mathbb{R}$)

$\psi \qquad y_1^* < \dots < y_n^*$

Come parte della def di h : $h(x_i^*) = y_i^*$

Prendiamo α_i e β_i

$$\alpha_0 < x_1^* < \alpha_1 < \dots < \alpha_{n-1} < x_n^* < \alpha_n$$

$$\beta_0 < y_1^* < \beta_1 < \dots < \beta_{n-1} < y_n^* < \beta_n$$

e definiamo $h(\alpha_i) = \beta_i$.

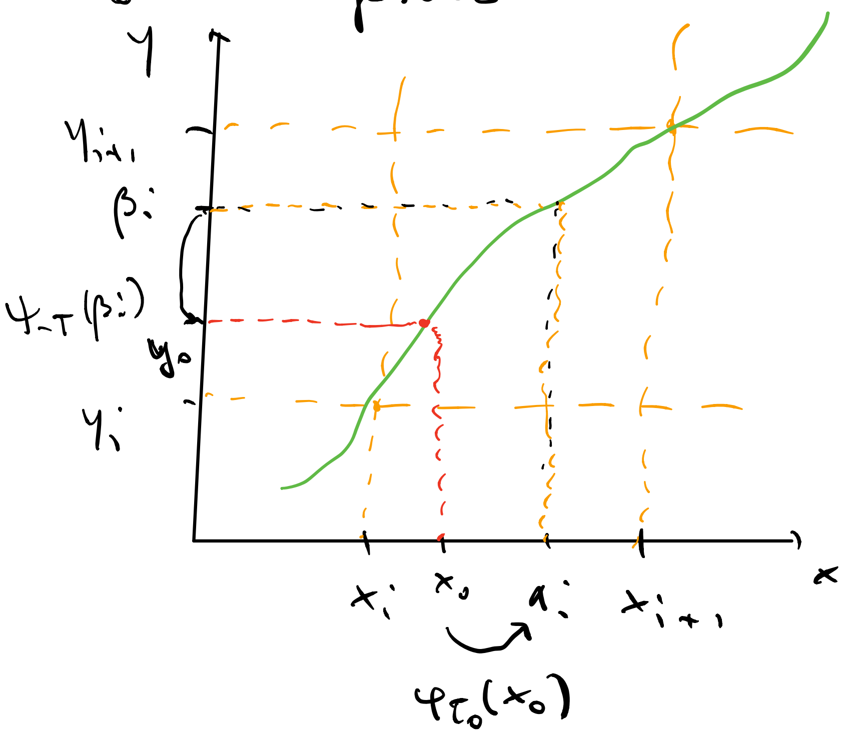
Usiamo questi dati per definire h su tutti gli intervalli (x_i^*, x_{i+1}^*)

Prendiamo $x_0 \in (x_i^*, x_{i+1}^*)$: il flusso nell'intervallo è monotono (crescente o decrescente) e quindi $\exists$ un unico t_0 tale che $\varphi_{t_0}(x_0) = \alpha_i$

Per ogni x_0, definiamo

$$h(x_0) = y_0 \equiv \varphi_{-T_0}(\beta_i)$$

Segue dalle proprietà di φ che h è omeomorfismo



abbiamo h
$h(x_0) = y_0$

Inoltre: $\varphi_{T_0 - T}(\varphi_T(x_0)) = \alpha_1$

Segue

$$\underline{h(\varphi_T(x_0))} = \varphi_{-(T_0 - T)}(\beta_i) =$$

$$= \varphi_T(\varphi_{-T_0}(\beta_i)) = \underline{\varphi_T(h(x_0))}$$

stabilisce la coniugazione topologica

$\blacksquare$

<u>Esempio</u>: Prendiamo il flusso generato

da $\underline{\dot{x} = -x}$, cioè $\varphi_t(x) = x e^{-t}$

Consideriamo $y = h(x) = x^3$

È equivalente al flusso

$$\psi_t(y) = (x e^{-t})^3 = y e^{-3t}$$

che risolve $\underline{\dot{y} = -3y}$.

<u>Def</u>: Due flussi $\varphi_t : A \to A$, $\psi_t : B \to B$ si dicono diffeomorfi se $\exists$ un diffeomorfismo h tale che il diagramma

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varphi_t"] \arrow[d, "h"'] & A \arrow[d, "h"] \\ B \arrow[r, "\psi_t"'] & B \end{tikzcd}$$

commuta.