
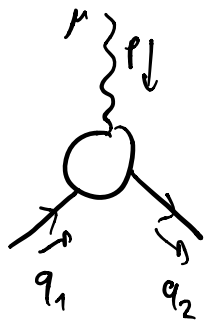


CORREZIONE AL VERTICE DI QED

[S.17, PS. 6.2-3]

Vogliamo calcolare le correzioni 1PI al vertice  :



$$\equiv iM^\mu \equiv -ie \bar{u}(q_2) \Gamma^\mu(q_1, q_2) u(q_1)$$

$p^2 \neq 0$: fotone off-shell.

- In generale possiamo avere

$$\Gamma^\mu = f_1 \gamma^\mu + f_2 p^\mu + f_3 q_1^\mu + f_4 q_2^\mu$$

dove f_i sono funzioni scalari dei 4-momenti.

- Dalla conservazione del momento $p^\mu = q_2^\mu - q_1^\mu$ possiamo mettere $f_2 = 0$.
- Dato $\not{q}_1 u(q_1) = m u(q_1)$ e $\bar{u}(q_2) \not{q}_2 = m \bar{u}(q_2)$ f_i possono solo dipendere da m^2 e p^2 ($\circ q_1 \cdot q_2$) come p^2/m^2 , dato che f_i sono adimensionali.
- Identità di Ward implica:

$$p_\nu \Gamma^\nu = 0 = f_1 \bar{u} \not{p} u + f_3 (p \cdot q_1) \bar{u} u + f_4 (p \cdot q_2) \bar{u} u$$

$$\text{ma } p \cdot q_1 = q_2 \cdot q_1 - m^2 = -p \cdot q_2 \Rightarrow \Downarrow f_3 = f_4$$

$$\Rightarrow M^\mu = f_1 \gamma^\mu + f_3 (q_1 + q_2)^\mu$$

Possiamo usare l'identità di Gordon

$$\bar{u}(q_2) \gamma^\mu u(q_1) = \bar{u}(q_2) \left[\frac{q_1^\mu + q_2^\mu}{2m} + i \frac{\sigma^{\mu\nu} p_\nu}{2m} \right] u(q_1)$$

per riscrivere:

$$i\mathcal{M} = -ie \bar{u}(q_2) \left[F_1\left(\frac{p^2}{m^2}\right) \gamma^\mu + \frac{i \sigma^{\mu\nu} p_\nu}{2m} F_2\left(\frac{p^2}{m^2}\right) \right] u(q_1)$$

A livello albero  abbiamo: $F_1 = 1$ e $F_2 = 0$.

$$\Rightarrow \bar{F}_1 = 1 + \mathcal{O}(\alpha), \quad \bar{F}_2 = \mathcal{O}(\alpha)$$

CARICA ELETTRICA σ MOMENTO MAGNETICO [PS.6.2]



σ campo classico

Vediamo il caso del potenziale elettrostatico $\phi(\vec{x})$.

Prendiamo $\tilde{A}'_\alpha = ((2\pi) \delta(p^0) \tilde{\Phi}(p), \vec{0})$

Nel limite $\vec{p} \rightarrow 0$ (grandi distanze)

$$i\mathcal{M} = iM_\mu A'_\alpha = -ie \bar{u}(q_2) F_1(0) \gamma^0 u(q_1) \tilde{\Phi}(\vec{p}) \approx -ie F_1(0) \tilde{\Phi}(\vec{p}) 2m \sum_{\lambda_2}^+ \sum_{\lambda_1}^-$$

$$\tilde{\Phi}(\vec{p}) \sim \frac{-1}{|\vec{p}|^2}$$

$\Rightarrow e F_1(r)$ è la carica elettrica effettiva a grandi distanze.

Una possibile **CONDIZIONE DI RINORMALIZZAZIONE**

ON-SHELL sarà $F_1(0) \equiv 1$

ovvero e_R è la carica effettiva a grandi distanze.

Prendiamo ora il **POTENZIALE MAGNETICO** A_{cl}^i

$$\tilde{B}^i(p) = -i \epsilon^{ijk} p^j \tilde{A}_{cl}^k(p)$$

$$iM = iM_p A_{cl}^n = +ie \left[\bar{u}(q_2) \left(\gamma^i F_1 + \frac{i \sigma^{iv} p_v}{2m} F_2 \right) u(q_1) \right] \tilde{A}_{cl}^i(\vec{p})$$

$$u(q) = \begin{pmatrix} \sqrt{q \cdot \vec{v}} \xi \\ \sqrt{q \cdot \vec{v}} \xi \end{pmatrix} \approx \sqrt{m} \begin{pmatrix} (1 - \vec{q} \cdot \vec{v} / 2m) \xi \\ (1 + \vec{q} \cdot \vec{v} / 2m) \xi \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \bar{u}(q_2) \gamma^i u(q_1) = 2m \xi_2^+ \left(\frac{\vec{q}_2 \cdot \vec{v}}{2m} \sigma^i + \sigma^i \frac{\vec{q}_1 \cdot \vec{v}}{2m} \right) \xi_1$$

Usando $\sigma^i \sigma^j = \delta^{ij} + i \epsilon^{ijk} \sigma^k$ $\vec{p} = \vec{q}_2 - \vec{q}_1$

$$\bar{u}(q_2) \gamma^i u(q_1) \approx \xi_2^+ \xi_1 (q_1 + q_2)^i + 2m \xi_2^+ \left(\frac{-i}{2m} \epsilon^{ijk} p^j \sigma^k \right) \xi_1$$

$$\bar{u}(q_2) \frac{i}{2m} \sigma^{iv} p_v u(q_1) \approx 2m \xi_2^+ \left(\frac{-i}{2m} \epsilon^{ijk} p^j \sigma^k \right) \xi_1$$

Il termine $(\tilde{q}_1 + \tilde{q}_2) \cdot \vec{A}$ descrive la forza di Lorentz
 Il resto da, nel limite $\vec{p} \rightarrow 0$,

$$\Rightarrow iM = -i(2m) e \xi_2^+ \left(\frac{-1}{2m} \gamma^k [F_1(0) + F_2(0)] \right) \xi_1 \tilde{B}^k(p)$$

Descrive un momento magnetico

$$V(\vec{x}) = - \langle \vec{\mu} \rangle \cdot \vec{B}(x) \quad \text{con}$$

$$\langle \vec{\mu} \rangle = \frac{e}{m} [F_1(0) + F_2(0)] \xi_2^+ \frac{\vec{v}}{2} \xi_1 = \xi_2^+ \left(g \frac{e}{2m} \vec{S} \right) \xi_1$$

\uparrow spin
 fattore g di Landé

con $g = 2 [F_1(0) + F_2(0)]$

Con la condizione di rinormalizzazione on-shell
 $F_1(0) \equiv 1$ abbiamo

$$g = 2 + \underbrace{2 F_2(0)}_{\text{anomalo}}, \quad F_2(0) \sim \mathcal{O}(\alpha)$$

MOMENTO MAGNETICO ANOMALO

CALCOLO DELLA CORREZIONE AL VERTICE A 1-LOOP

[S.17.2, S.19.3]

$$-ie_R \Gamma^M = \text{1PI} = -ie_R \gamma^M + -ie_R \int_1 \gamma^M + i \Gamma_2^M$$

$$i \Gamma_2^M = \text{diagram} = \bar{u}(q_2) i \Gamma_2^M u(q_1)$$

$$= (-ie)^3 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{-ig^{\nu\alpha}}{(k-q_1)^2 + i\epsilon} \bar{u}(q_2) \gamma^\nu i \frac{\not{p} + \not{k} + m}{(p+k)^2 - m^2 + i\epsilon} \gamma^\mu i \frac{\not{k} + m}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \gamma^\alpha u(q_1)$$

$$= -e^3 \bar{u}(q_2) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{\gamma^\nu (\not{p} + \not{k} + m) \gamma^\mu (\not{k} + m) \gamma_\nu}{\underbrace{[(k-q_1)^2 + i\epsilon]}_C \underbrace{[(p+k)^2 - m^2 + i\epsilon]}_B \underbrace{[k^2 - m^2 + i\epsilon]}_A} \} N^M \rightarrow \text{numeratore}$$

La parametrizzazione di Feynman con 3 propagatori da:

$$\frac{1}{ABC} = 2 \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \frac{1}{[xA + yB + zC]^3}$$

Il denominatore diventa:

$$xA + yB + zC = (k^\mu + y p^\mu - z q_1^\mu)^2 - \Delta + i\epsilon$$

\downarrow $k^\mu \rightarrow k^\mu - y p^\mu + z q_1^\mu$ & shift
 $k^2 - \Delta + i\epsilon$

$$\Delta = -xy p^2 + (1-z)^2 m^2$$

Facendo lo shift al numeratore, usando
 $k^\mu k^\nu \rightarrow \frac{1}{4} g^{\mu\nu} k^2$, l'identità di Gordon e $x+y+z=1$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2} N^\mu = \left[-\frac{1}{2} k^2 + (1-x)(1-y) p^2 + (1-4z+z^2) m^2 \right] \bar{u} \gamma^\mu u + \\ + 2m^2 z(1-z) \left(i \not{p}_\nu \frac{\bar{u} \sigma^{\mu\nu} u}{2m} \right) + \underbrace{m(z-z)(x-y) p^\mu}_{=0} \bar{u} u$$

Questo termine dà contributo nullo all'integrale poiché è dispari in $x \leftrightarrow y$ mentre il resto è pari.

Dall'identità di Ward infatti ce lo aspettiamo.

Definisco $F_1(p^2) = 1 + f_1(p^2) + S_1 + \mathcal{O}(e^4)$

$$f_1(p^2) = -2e^2 i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \frac{k^2 - 2(1-x)(1-y)p^2 - 2(1-4z+z^2)m^2}{(k^2 - \Delta + i\varepsilon)^3}$$

$$F_2(p^2) = 4e^2 i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \frac{2m^2 z(1-z)}{(k^2 - \Delta + i\varepsilon)^3}$$

Regolarizziamo in $d=4-\varepsilon$, $e^2 \rightarrow e^2 \mu^{4-d}$
 inoltre alcune parti finite nell'algebra di Dirac vengono modificate.

$$\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{(k^2 - \Delta + i\varepsilon)^3} \xrightarrow{d \rightarrow 4} \frac{-i}{32\pi^2 \Delta} \leftarrow \text{è finito}$$

$$\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{k^2}{(k^2 - \Delta + i\varepsilon)^3} = \frac{d}{4} \frac{i}{(4\pi)^{d/2}} \Delta^{\frac{d}{2}-2} \Gamma\left(\frac{4-d}{2}\right) \rightarrow \frac{i}{(4\pi)^2} \left(\frac{2}{\varepsilon} - \gamma + \log 4\pi + \log \frac{\mu^2}{\Delta} - \frac{1}{2} \right)$$

Valutiamo prima il momento magnetico anomalo

$$\Rightarrow F_2(p^2) = \frac{\alpha}{\pi} m^2 \int_0^1 dx dy dz \int (x+y+z-1) \frac{z(1-z)}{(1-z)^2 m^2 - xy p^2}$$

Per $p^2=0$ troviamo:

$$F_2(0) = \frac{\alpha}{\pi} \int_0^1 dz \int_0^1 dy \int_0^1 dx \int (x+y+z-1) \frac{z}{1-z} = \frac{\alpha}{\pi} \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dy \frac{z}{1-z} =$$

$$= \frac{\alpha}{\pi} \int_0^1 dz z = \frac{\alpha}{2\pi} = a_e \approx 0,00116$$

Il momento magnetico anomalo dell'elettrone dunque è:

$$\Rightarrow g = 2 + 2\left(\frac{\alpha}{2\pi}\right) + \mathcal{O}(\alpha^2) = 2.00232\dots$$

Presentato per la prima volta da Schwinger, Feynman e Tomonaga nel 1948.

Adesso abbiamo: $a_e^{\text{th}} = 0.001159625181643(764)$
 $a_e^{\text{exp}} = 0.00115962518073(28)$

a_e è noto a 1 parte su 10^9 .

Per ottenere ciò, g è stato misurato con precisione di 10^{-12} .

Calcoliamo infine $F_1(p^2) = 1 + \mathcal{J}_1(p^2) + \mathcal{J}_2$

Per rinormalizzare la teoria è sufficiente calcolare la **parte divergente**.

L'unica tale viene dal termine con k^2 al numeratore

$$\mathcal{J}_1(p^2) = -2e^2 i \mu^{4d} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \frac{\frac{(d-2)^2}{d} k^2}{(k^2 - \Delta + i\varepsilon)^3} + \dots$$

$$\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{k^2}{(k^2 - \Delta + i\varepsilon)} = \frac{i}{(4\pi)^2} \left(\frac{2}{\varepsilon} - \gamma + \log 4\pi + \log \frac{\mu^2}{\Delta} - \frac{1}{2} \right) \quad \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) = \frac{1}{2}$$

$$\mathcal{J}_1^{\text{div}}(p^2) = \frac{e^2}{(4\pi)^2} \left(\frac{2}{\varepsilon} - \gamma + \log 4\pi + \log \mu^2 + \dots \right)$$

Nello **schema \overline{MS}** avremmo

$$\mathcal{J}_1^{\overline{MS}} = -\frac{\alpha}{4\pi} \left(\frac{2}{\varepsilon} - \gamma + \log 4\pi \right)$$

$$\mathcal{J}_2^{\overline{MS}} = -\frac{\alpha}{4\pi} \left(\frac{2}{\varepsilon} - \gamma + \log 4\pi \right)$$

$$\text{Quindi } \mathcal{J}_1^{\overline{MS}} = \mathcal{J}_2^{\overline{MS}} \Rightarrow \mathcal{Z}_1 = \mathcal{Z}_2,$$

come ci si aspettava da Ward-Takahashi.

Nello **schema on-shell** occorre calcolare tutto $f_1(p^2)$.

Analogamente a $\Sigma_2(p)$, c'è una divergenza IR che possiamo regolare dando una massa al fotone:

$$\Delta \rightarrow \Delta = (1-z)^2 m^2 - xy p^2 + z m_\gamma^2$$

Otteniamo

$$f_1(p^2) = \frac{e^2}{(4\pi)^2} \left(\frac{2}{\epsilon} - \gamma + \log 4\pi - 2 \right.$$

$$\left. + 2 \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \left[\frac{p^2(1-x)(1-y) + m^2(1-4z+z^2)}{\Delta} + \log \frac{\mu^2}{\Delta} \right] \right)$$

Imponiamo la condizione di rinormalizzazione

$$F_1(0) = 1 + f_1(0) + \mathcal{J}_1 \equiv 1$$

$$\Rightarrow \mathcal{J}_1^{\text{MOM}} = -f_1(0) = -\frac{\alpha}{4\pi} \left(\frac{2}{\epsilon} - \gamma + \log 4\pi + 4 + \log \frac{\mu^2}{m^2} + \log \frac{m_\gamma^2}{m^2} \right)$$

Anche in questo schema possiamo verificare che

$$\mathcal{J}_1^{\text{MOM}} = \mathcal{J}_2^{\text{MOM}} .$$