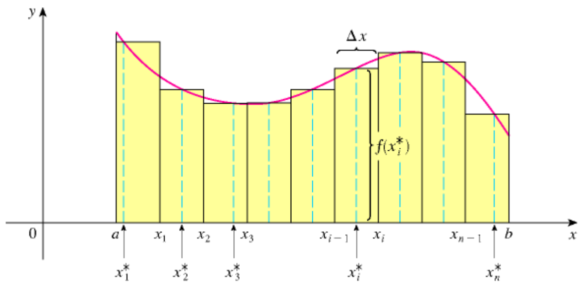
Contenuto

- Integrali doppi.
- Teorema di Fubini
- Cambio di variabili: coordinate polari.
- Cambio di variabili: caso generale.
- Coordinate sferiche.

Somme di Riemann per funzioni di una variabile



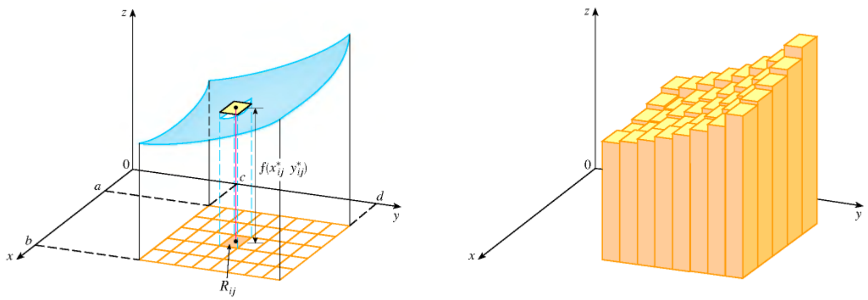
Somma di Riemann di f, associata alla partizione $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ e alla scelta di punti x_i^*:

$$\mathcal{S}_f(P) = \sum_{j=1}^{m} f(x_j^*)(x_j - x_{j-1}) = \sum_{j=1}^{m} f(x_j^*)\Delta x_j$$

Integrale di funzioni di una variabile

Se accade che le somme di Riemann di f si avvicinano quanto si vuole a un numero A, pur di prendere sufficientemente piccola la massima delle lunghezze $\Delta x_j = x_j - x_{j-1}$ e qualunque sia la scelta dei punti x_j^*, allora si dice che la funzione f è integrabile (secondo Riemann) e che il numero A è il suo integrale. Si scrive:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\max \Delta \to 0} \sum_j f(x_j^*)\Delta x_j$$



Somme di Riemann di $f = f(x, y)$, definita su un rettangolo $R = [a, b] \times [c, d]$:

$$\sum_{i,j} f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\, \Delta x_i\, \Delta y_j$$

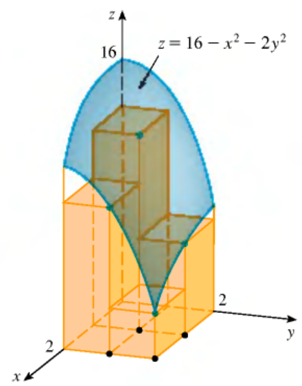
$$\iint_R f(x, y)\, dx\, dy = \lim_{\max \Delta \to 0} \sum_{i,j} f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\, \Delta x_i\, \Delta y_j$$

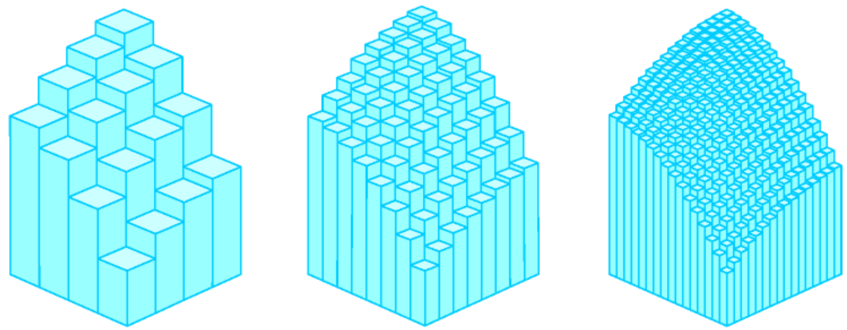
Varie interpretazioni

Un integrale doppio è dunque un limite di somme di Riemann.
Vedremo che può avere molteplici interpretazioni:

- Un volume;
- Una massa totale di una lamina (quando si integra un densità superficiale di massa);
- L'area di una superficie;
- La quantità totale di carica sulla superficie di un conduttore;
- eccetera.

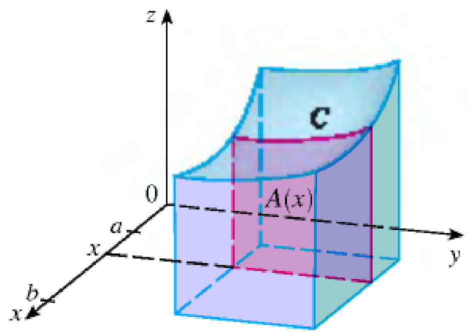
Una interpretazione: volume.





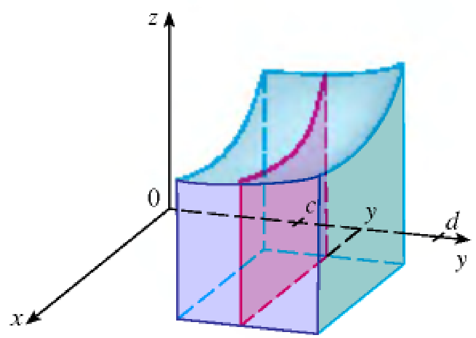
(a) $m = n = 4$, $V \approx 41.5$ (b) $m = n = 8$, $V \approx 44.875$ (c) $m = n = 16$, $V \approx 46.46875$

Teorema di Fubini per $f = f(x, y)$ su un rettangolo R



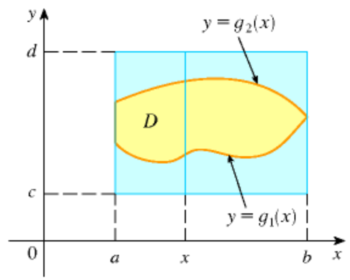
$$\iint_R f(x, y)\, dx\, dy = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y)\, dy \right] dx$$

Teorema di Fubini per $f = f(x, y)$ su un rettangolo R



$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)\,dx \right] dy$$

Integrale su un dominio D limitato

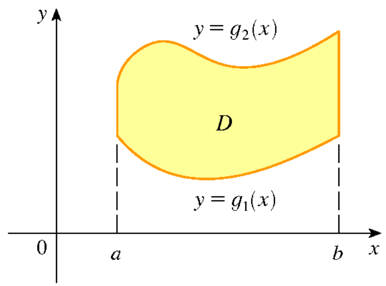


Se $D \xrightarrow{f} \mathbb{R}$,

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_R \tilde{f}(x,y)\,dx\,dy$$

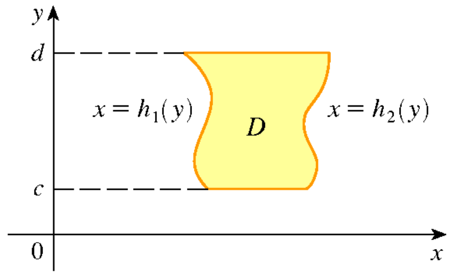
dove $\tilde{f} = f$ su D ed è uguale a zero fuori da D.

Integrale su un dominio normale D rispetto asse x



$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left[\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy \right] dx$$

Integrale su un dominio normale D rispetto asse y



$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \left[\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\,dx \right] dy$$