Integrali doppi: esercizi svolti

Gli esercizi contrassegnati con il simbolo * presentano un grado di difficoltà maggiore.

Esercizio. Calcolare i seguenti integrali doppi sugli insiemi specificati:

$a)\ \displaystyle\int_\Omega (x+y)\,dx\,dy, \qquad \Omega = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ 0<y<\frac{\sqrt{2}}{2},\ y<x<\sqrt{1-y^2}\right\}$

$\left[\frac{1}{3}\right]$

$b)\ \displaystyle\int_\Omega \left(x^2+y^2\right)\,dx\,dy, \qquad \Omega = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ 0\le x\le 1,\ 1\le y\le 2\right\}$

$\left[\frac{8}{3}\right]$

$c)\ \displaystyle\int_\Omega xy\,dx\,dy, \qquad \Omega = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ 0<x<1,\ x^2<y<\sqrt{x}\right\}$

$\left[\frac{1}{12}\right]$

$d)\ \displaystyle\int_\Omega \frac{xy}{x^2+y^2}\,dx\,dy, \qquad \Omega = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ 1<x^2+y^2<4,\ x>0,\ y>0\right\}$

$\left[\frac{3}{4}\right]$

$e)\ \displaystyle\int_\Omega xy\,dx\,dy, \qquad \Omega = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x^2+y^2<1,\ x^2+y^2<2x,\ y>0\right\}$

$\left[\frac{5}{48}\right]$

$f)\ \displaystyle\int_\Omega xy\,dx\,dy, \qquad \Omega = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x^2+2y^2<1,\ x>0,\ y>0\right\}$

$\left[\frac{1}{16}\right]$

g) $\displaystyle\int_\Omega x(1-y)\,dx\,dy, \qquad \Omega = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ 0<y<\frac{\sqrt{2}}{2},\ y<x<\sqrt{1-y^2}\right\}$

$\left[\frac{\sqrt{2}}{6}-\frac{1}{16}\right]$

h) $\displaystyle\int_\Omega \log(xy)\,dx\,dy, \qquad \Omega = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ -1<x<-\frac{1}{2},\ 4x<y<\frac{1}{x}\right\}$

$[5\log 2-3]$

**i)* $\displaystyle\int_\Omega \log\frac{x}{y^2}\,dx\,dy, \qquad \Omega = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ \frac{1}{4}x<y^2<x,\ 1<xy<2\right\}$

$\left[\frac{1}{6}\log^2 4\right]$

l) $\displaystyle\int_\Omega \frac{1}{(x+y)^2}\,dx\,dy, \qquad \Omega = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ 1\le x\le 2,\ 3\le y\le 4\right\}$

$[\log 25-\log 24]$

m) $\displaystyle\int_\Omega \frac{x}{x^2+y^2}\,dx\,dy, \qquad \Omega = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x^2<y<2x^2,\ 1<x<2\right\}$

$\left[2\arctan 4-3\arctan 2+\frac{\pi}{4}-\frac{1}{4}\log 17+\frac{3}{4}\log 5-\frac{1}{2}\log 2\right]$

n) $\displaystyle\int_\Omega \frac{\sin y^2}{y}\,dx\,dy, \qquad \Omega = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ 0<x<y^2,\ \sqrt{\pi}<y<\sqrt{2\pi}\right\}$

$[-1]$

o) $\displaystyle\int_\Omega xy\,dx\,dy, \qquad \Omega = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x^2+2y^2<1\right\}$

$[0]$

p) $\displaystyle\int_\Omega \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy, \qquad \Omega = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x^2+y^2-4x<0\right\}$

$\left[\frac{256}{9}\right]$

q) $\displaystyle\int_\Omega \left(x+y^2\right)\,dx\,dy, \qquad \Omega = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ 1<x^2+y^2<4,\ x>0,\ y>0\right\}$

$\left[\frac{7}{3}+\frac{15}{16}\pi\right]$

r) $\displaystyle\int_\Omega x\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy, \qquad \Omega = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x^2+y^2<1,\ x^2+y^2<2y,\ x<0\right\}$

$\left[-\frac{3}{20}\right]$

$s)$ $\displaystyle\int_\Omega (x+y)\,dx\,dy, \qquad \Omega = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ 2x^2+3y^2<4,\ x>0,\ y>0\right\}$

$$\left[\tfrac{4}{9}\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\right]$$

Svolgimento

$a)$ Consideriamo l'integrale $\displaystyle\int_\Omega (x+y)\,dx\,dy$, dove

$$\Omega = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ 0<y<\frac{\sqrt{2}}{2},\ y<x<\sqrt{1-y^2}\right\}.$$

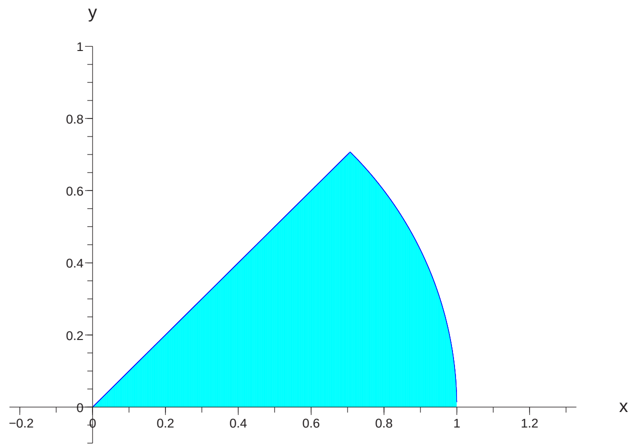

Fig. 1: L'insieme Ω (in azzurro).

L'insieme Ω è x-semplice. Quindi si ha che

$$\int_\Omega (x+y)\,dx\,dy = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left[\int_y^{\sqrt{1-y^2}} (x+y)\,dx\right] dy =$$

$$= \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left[\frac{1}{2}x^2+xy\right]_y^{\sqrt{1-y^2}} dy = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left[\frac{1}{2}\left(1-y^2\right)+y\sqrt{1-y^2}-\frac{3}{2}y^2\right] dy =$$

$$= \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(\frac{1}{2}-2y^2+y\sqrt{1-y^2}\right) dy = \left[\frac{1}{2}y-\frac{2}{3}y^3-\frac{1}{3}\left(1-y^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{3}.$$

$b)$ Consideriamo l'integrale $\displaystyle\int_\Omega \left(x^2+y^2\right)\,dx\,dy$, dove

$$\Omega = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ 0\le x\le 1,\ 1\le y\le 2\right\}.$$

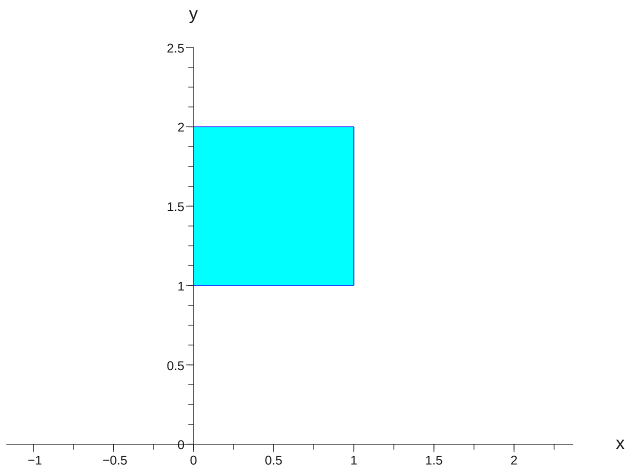

Fig. 2: L'insieme Ω è il quadrato.

L'insieme Ω è sia x-semplice che y-semplice. Si ha che

$$\int_\Omega \left(x^2+y^2\right)\,dx\,dy = \int_0^1 \left[\int_1^2 \left(x^2+y^2\right)\,dy\right]dx =$$

$$= \int_0^1 \left[x^2y+\frac{1}{3}y^3\right]_1^2 dx = \int_0^1 \left(x^2+\frac{7}{3}\right)dx = \left[\frac{1}{3}x^3+\frac{7}{3}x\right]_0^1 = \frac{8}{3}.$$

c) Consideriamo l'integrale $\int_\Omega xy\,dx\,dy$, dove

$$\Omega = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ \ 0<x<1,\ x^2<y<\sqrt{x}\right\}.$$

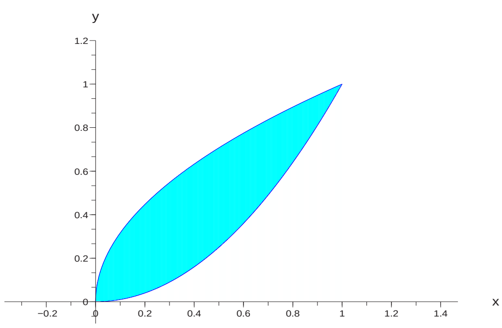

Fig. 3: L'insieme Ω (in azzurro).

L'insieme Ω è y-semplice. Quindi si ha che

$$\int_\Omega xy\,dx\,dy = \int_0^1 \left[\int_{x^2}^{\sqrt{x}} xy\,dy\right] dx =$$

$$= \int_0^1 x\left[\frac{1}{2}y^2\right]_{x^2}^{\sqrt{x}} dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(x^2 - x^5\right) dx = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{6}x^6\right]_0^1 = \frac{1}{12}.$$

d) Consideriamo l'integrale $\displaystyle\int_\Omega \frac{xy}{x^2+y^2}\,dx\,dy$, dove

$$\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 1 < x^2+y^2 < 4,\ x > 0,\ y > 0\right\}.$$

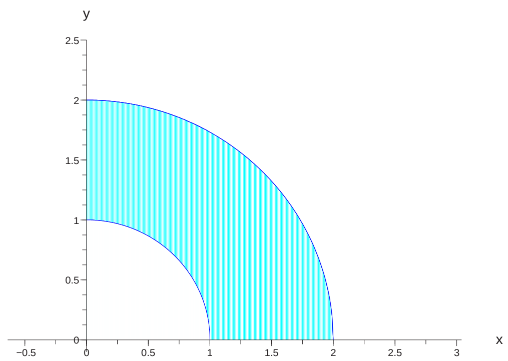

Fig. 4: L'insieme Ω (in azzurro).

L'insieme Ω è sia x-semplice che y-semplice. Osserviamo che Ω presenta una simmetria radiale. Possiamo quindi passare in coordinate polari nel piano. Poniamo quindi

$$\Phi : \begin{cases} x = \rho\cos\vartheta \\ y = \rho\sin\vartheta, \end{cases} \qquad \rho \geq 0,\ 0 \leq \vartheta \leq 2\pi, \quad |\det J_\Phi(\rho,\vartheta)| = \rho.$$

Allora

$$(x,y) \in \Omega \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} 1 < \rho < 2 \\ 0 < \vartheta < \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Quindi si ha che $\Omega = \Phi(\Omega')$, dove

$$\Omega' = \left\{(\rho,\vartheta) \in \mathbb{R}^2 :\ 1 < \rho < 2,\ 0 < \vartheta < \frac{\pi}{2}\right\}.$$

Ne segue che

$$\int_\Omega \frac{xy}{x^2+y^2}\,dx\,dy = \int_{\Omega'} \rho\cos\vartheta\sin\vartheta\,d\rho\,d\vartheta =$$

essendo Ω' un rettangolo con lati paralleli agli assi ρ e ϑ e la funzione integranda prodotto di una funzione in ρ e di una di ϑ si ottiene

$$= \left(\int_1^2 \rho\, d\rho\right)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\vartheta \sin\vartheta\, d\vartheta\right) = \left[\frac{1}{2}\rho^2\right]_1^2 \left[\frac{1}{2}\sin^2\vartheta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{4}.$$

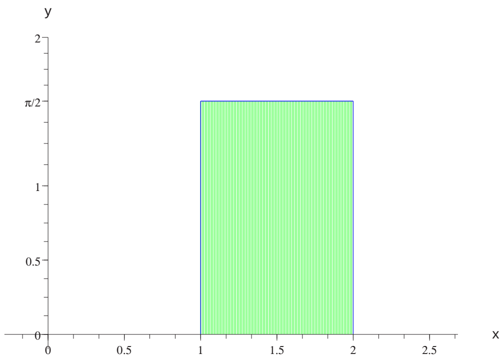

Fig. 5: L'insieme Ω' (in verde).

e) Consideriamo l'integrale $\int_\Omega xy\, dx\, dy$, dove

$$\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; x^2 + y^2 < 1, \; x^2 + y^2 < 2x, \; y > 0\right\}.$$

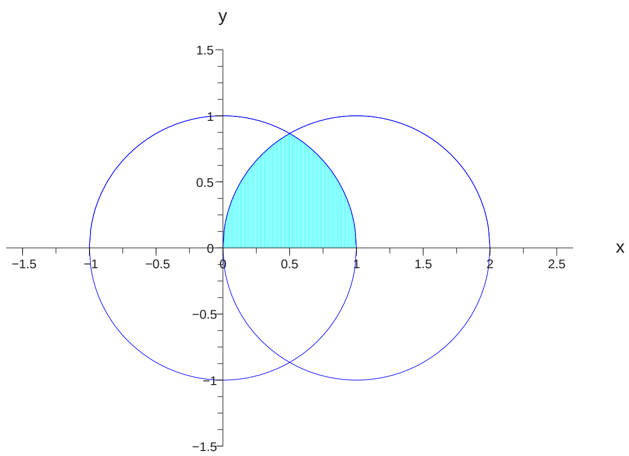

Fig. 6: L'insieme Ω (in azzurro).

Passiamo in coordinate polari nel piano. Poniamo quindi

$$\Phi : \begin{cases} x = \rho\cos\vartheta \\ y = \rho\sin\vartheta, \end{cases} \qquad \rho \geq 0,\ 0 \leq \vartheta \leq 2\pi, \quad |\det J_\Phi(\rho,\vartheta)| = \rho.$$

Allora

$$(x,y) \in \Omega \quad \iff \quad \begin{cases} 0 < \rho < 1 \\ 0 < \rho < 2\cos\vartheta \\ 0 < \vartheta < \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Quindi si ha che $\Omega = \Phi(\Omega')$, dove $\Omega' = \Omega_1' \cup \Omega_2'$, con

$$\Omega_1' = \left\{(\rho,\vartheta) \in \mathbb{R}^2 :\ \ 0 < \rho < 1,\ 0 < \vartheta < \frac{\pi}{3}\right\},$$

$$\Omega_2' = \left\{(\rho,\vartheta) \in \mathbb{R}^2 :\ \ 0 < \rho < 2\cos\vartheta,\ \frac{\pi}{3} \leq \vartheta < \frac{\pi}{2}\right\}.$$

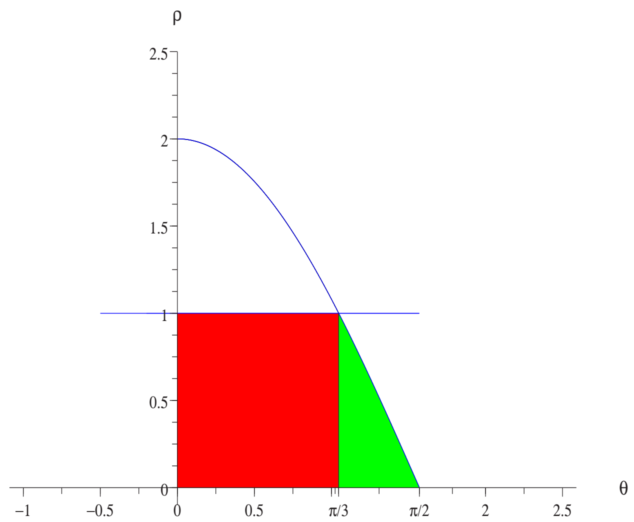

Fig. 7: L'insieme $\Omega' = \Omega_1' \cup \Omega_2'$, con Ω_1' (in rosso) e Ω_2' (in verde).

Ne segue che

$$\int_\Omega xy\,dx\,dy = \int_{\Omega'} \rho^3\cos\vartheta\sin\vartheta\,d\rho\,d\vartheta =$$

$$= \int_{\Omega_1'} \rho^3\cos\vartheta\sin\vartheta\,d\rho\,d\vartheta + \int_{\Omega_2'} \rho^3\cos\vartheta\sin\vartheta\,d\rho\,d\vartheta =$$

essendo sia Ω_1' che Ω_2' ρ-semplici e la funzione integranda prodotto di una funzione in ρ e di una di ϑ, si ottiene

$$= \left(\int_0^1 \rho^3\,d\rho\right)\left(\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos\vartheta\sin\vartheta\,d\vartheta\right) + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\vartheta\sin\vartheta\left[\int_0^{2\cos\vartheta} \rho^3\,d\rho\right]d\vartheta =$$

$$= \left[\frac{1}{4}\rho^4\right]_0^1 \left[\frac{1}{2}\sin^2\vartheta\right]_0^{\frac{\pi}{3}} + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\vartheta\sin\vartheta \left[\frac{1}{4}\rho^4\right]_0^{2\cos\vartheta} d\vartheta =$$

$$= \frac{3}{32} + 4\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^5\vartheta\sin\vartheta\, d\vartheta = \frac{3}{32} + 4\left[-\frac{1}{6}\cos^6\vartheta\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{5}{48}.$$

f) Consideriamo l'integrale $\int_\Omega xy\,dx\,dy$, dove

$$\Omega = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 :\ x^2+2y^2<1,\ x>0,\ y>0\right\}.$$

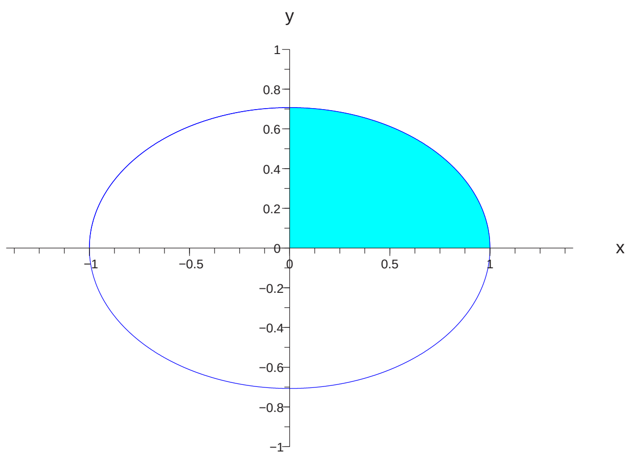

Fig. 8: L'insieme Ω (in azzurro).

Essendo Ω la parte del I quadrante inclusa nell'ellisse di equazione $x^2+\frac{y^2}{\frac{1}{2}}=1$, passiamo in coordinate ellittiche nel piano. Poniamo quindi

$$\Phi : \begin{cases} x = \rho\cos\vartheta \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}\rho\sin\vartheta, \end{cases} \qquad \rho\ge 0,\ 0\le\vartheta\le 2\pi, \qquad |\det J_\Phi(\rho,\vartheta)| = \frac{\sqrt{2}}{2}\rho.$$

Allora

$$(x,y)\in\Omega \qquad\Longleftrightarrow\qquad \begin{cases} 0<\rho<1 \\ 0<\vartheta<\frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Quindi si ha che $\Omega = \Phi(\Omega')$, dove

$$\Omega' = \left\{(\rho,\vartheta)\in\mathbb{R}^2 :\ 0<\rho<1,\ 0<\vartheta<\frac{\pi}{2}\right\}.$$

Ne segue che

$$\int_\Omega xy\,dx\,dy = \frac{1}{2}\int_{\Omega'} \rho^3\cos\vartheta\sin\vartheta\,d\rho\,d\vartheta =$$

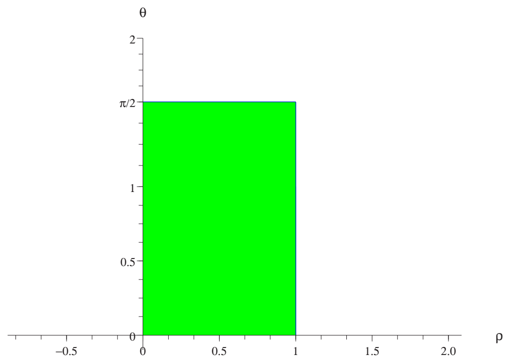

Fig. 9: L'insieme Ω' (in verde).

essendo Ω' un rettangolo con lati paralleli agli assi ρ e ϑ e la funzione integranda prodotto di una funzione in ρ e di una di ϑ si ottiene

$$= \frac{1}{2}\left(\int_0^1 \rho^3\, d\rho\right)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\vartheta \sin\vartheta\, d\vartheta\right) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}\rho^4\right]_0^1 \left[\frac{1}{2}\sin^2\vartheta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{16}.$$

g) Consideriamo l'integrale $\int_\Omega x(1-y)\, dx\, dy$, dove

$$\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 < y < \frac{\sqrt{2}}{2},\ y < x < \sqrt{1-y^2}\right\}.$$

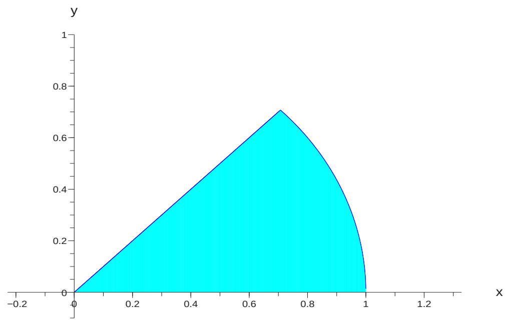

Fig. 10: L'insieme Ω (in azzurro).

L'insieme Ω è x-semplice. Quindi si ha che

$$\int_\Omega x(1-y)\, dx\, dy = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left[\int_y^{\sqrt{1-y^2}} x(1-y)\, dx\right] dy =$$

$$= \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left[\frac{1}{2}x^2(1-y)\right]_y^{\sqrt{1-y^2}} dy = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} (1-y)\left(1-2y^2\right) dy =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(1-y-2y^2+2y^3\right) dy = \frac{1}{2}\left[y-\frac{1}{2}y^2-\frac{2}{3}y^3+\frac{1}{2}y^4\right]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{6}-\frac{1}{16}.$$

h) Consideriamo l'integrale $\int_\Omega \log(xy)\, dx\, dy$, dove

$$\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ -1 < x < -\frac{1}{2},\ 4x < y < \frac{1}{x}\right\}.$$

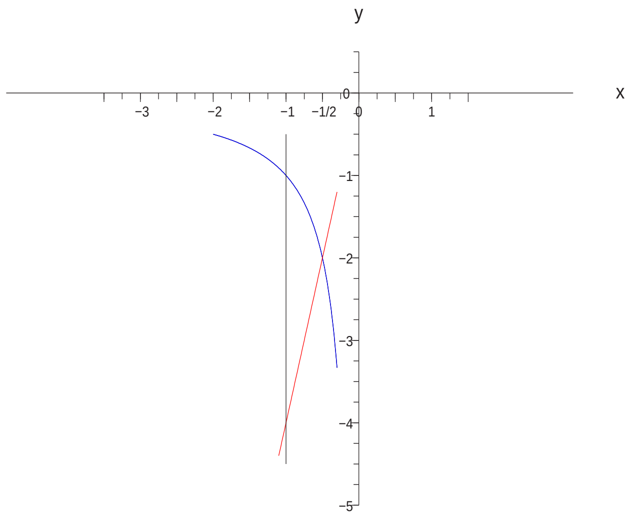

Fig. 11: L'insieme Ω è la parte di piano delimitata dall'iperbole $xy = 1$ (in blu) e dalle rette $y = 4x$ (in rosso) e $x = -1$ (in nero).

L'insieme Ω è y-semplice. Quindi si ha che

$$\int_\Omega \log(xy)\, dx\, dy = \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} \left[\int_{4x}^{\frac{1}{x}} \log(xy)\, dy\right] dx =$$

integrando per parti

$$= \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} \left(\left[y\log(xy)\right]_{4x}^{\frac{1}{x}} - \int_{4x}^{\frac{1}{x}} dy\right) dx = \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} \left(-4x\log 4x^2 - \frac{1}{x} + 4x\right) dx =$$

integrando per parti

$$= -4\left(\left[\frac{1}{2}x^2\log 4x^2\right]_{-1}^{-\frac{1}{2}} - \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} x\, dx\right) + \left[-\log|x| + 2x^2\right]_{-1}^{-\frac{1}{2}} =$$

$$= -4\left(-\log 2 + \frac{3}{8}\right) + \log 2 - \frac{3}{2} = 5\log 2 - 3.$$

$*i)$ Consideriamo l'integrale $\displaystyle\int_\Omega \log\frac{x}{y^2}\,dx\,dy$, dove

$$\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; \frac{1}{4}x < y^2 < x, \; 1 < xy < 2\right\}.$$

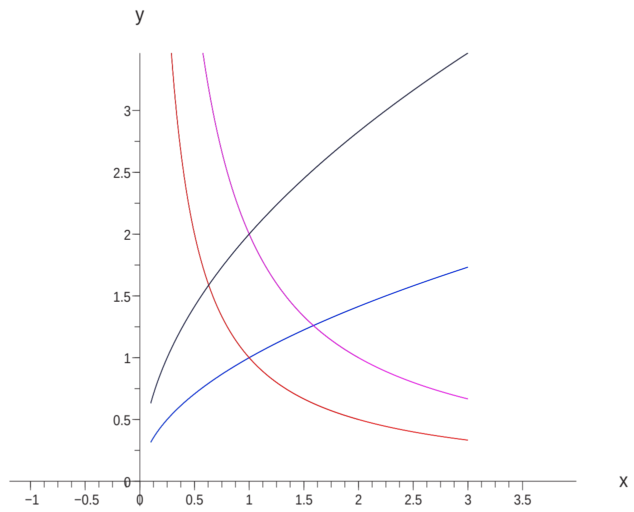

Fig. 12: L'insieme Ω è la parte di piano delimitata dalle parabole $x = y^2$ (in blu), $x = 4y^2$ (in nero) e dalle iperboli $xy = 1$ (in rosso) e $xy = 2$ (in fucsia).

L'insieme Ω si può scomporre nell'unione di un numero finito di insiemi x-semplici o y-semplici aventi a due a due in comune al più dei segmenti del piano. Tuttavia procedendo in questo modo risulta assai arduo il calcolo dell'integrale. Pertanto conviene procedere come segue.

Osserviamo che Ω è contenuto nel I quadrante. Pertanto per ogni $(x,y) \in \Omega$ si ha che $x, y > 0$. Quindi

$$(x,y) \in \Omega \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \frac{1}{4} < \frac{y^2}{x} < 1, \\ 1 < xy < 2. \end{cases}$$

Poichè anche la funzione integranda $f(x,y) = \log\frac{x}{y^2}$ contiene il termine $\frac{y^2}{x}$, conviene operare il seguente cambiamento di variabili:

$$\Psi : \begin{cases} u = xy \\ v = \frac{x}{y^2}, \end{cases} \quad (x,y) \in \Omega.$$

Evidentemente

$$(x, y) \in \Omega \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} 1 < u < 2, \\ 1 < v < 4. \end{cases}$$

In realtà a noi interessa il cambiamento di variabili inverso. Posto quindi $\Phi = \Psi^{-1}$, ricavando x e y in funzione di u e v, si ottiene

$$\Phi : \begin{cases} x = u\sqrt[3]{\frac{v}{u}} \\ y = \sqrt[3]{\frac{u}{v}}, \end{cases} \qquad 1 < u < 2,\ 1 < v < 4.$$

Resta da calcolare il determinante della matrice Jacobiana di Φ. Dal Teorema dell'inversione locale si ha che

$$\det J_\Phi(u, v) = \det J_{\Psi^{-1}}(u, v) = \Big(\det J_\Psi(\Phi(u, v))\Big)^{-1}.$$

Si ha che

$$J_\Psi(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & x \\ \frac{1}{y^2} & -\frac{2x}{y^3} \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \det J_\Psi(x, y) = -\frac{3x}{y^2}.$$

Quindi

$$|\det J_\Phi(u, v)| = \frac{1}{3v}.$$

Si ha che $\Omega = \Phi(\Omega')$, dove $\Omega' = \Big\{(u, v) \in \mathbb{R}^2 :\ 1 < u < 2,\ 1 < v < 4\Big\}$.

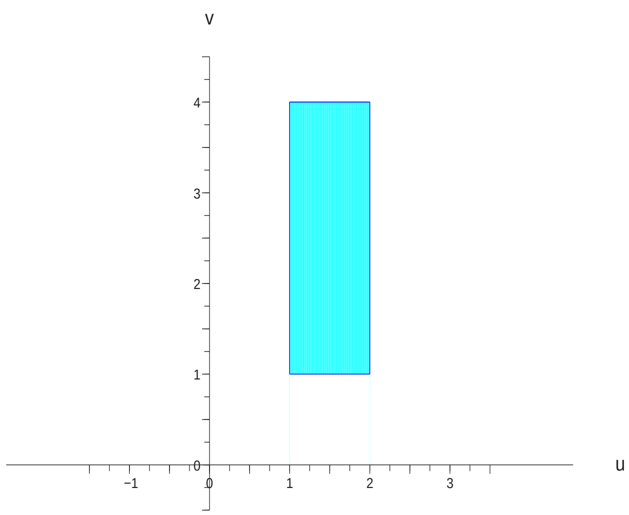

Fig. 13: L'insieme Ω' (in azzurro).

L'integrale diventa

$$\int_\Omega \log \frac{x}{y^2}\, dx\, dy = \int_{\Omega'} \frac{\log v}{3v}\, du\, dv =$$

essendo Ω' un rettangolo con lati paralleli agli assi u e v e la funzione integranda prodotto di una funzione di u per una funzione di v, si ottiene

$$= \frac{1}{3}\left(\int_1^2 du\right)\left(\int_1^4 \frac{\log v}{v}\, dv\right) = \frac{1}{3}\Big[u\Big]_1^2 \left[\frac{1}{2}\log^2 v\right]_1^4 = \frac{1}{6}\log^2 4.$$

l) Consideriamo l'integrale $\displaystyle\int_\Omega \frac{1}{(x+y)^2}\, dx\, dy$, dove

$$\Omega = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 1 \le x \le 2,\ 3 \le y \le 4\Big\}.$$

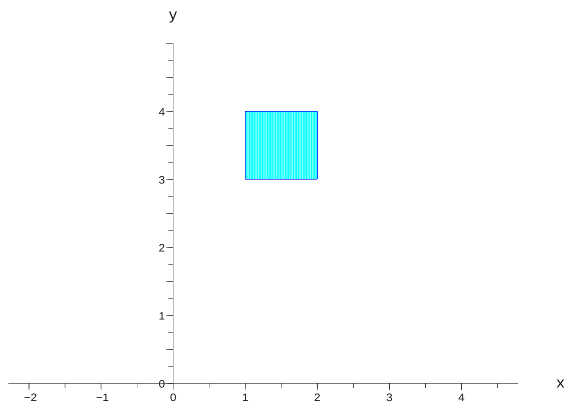

Fig. 14: L'insieme Ω è il quadrato.

L'insieme Ω è sia x-semplice che y-semplice. Si ha che

$$\int_\Omega \frac{1}{(x+y)^2}\, dx\, dy = \int_1^2 \left[\int_3^4 \frac{1}{(x+y)^2}\, dy\right] dx = \int_1^2 \left[-\frac{1}{x+y}\right]_3^4 dx =$$

$$= \int_1^2 \left(\frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+4}\right) dx = \Big[\log|x+3| - \log|x+4|\Big]_1^2 = \log 25 - \log 24.$$

m) Consideriamo l'integrale $\displaystyle\int_\Omega \frac{x}{x^2+y^2}\, dx\, dy$, dove

$$\Omega = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 < y < 2x^2,\ 1 < x < 2\Big\}.$$

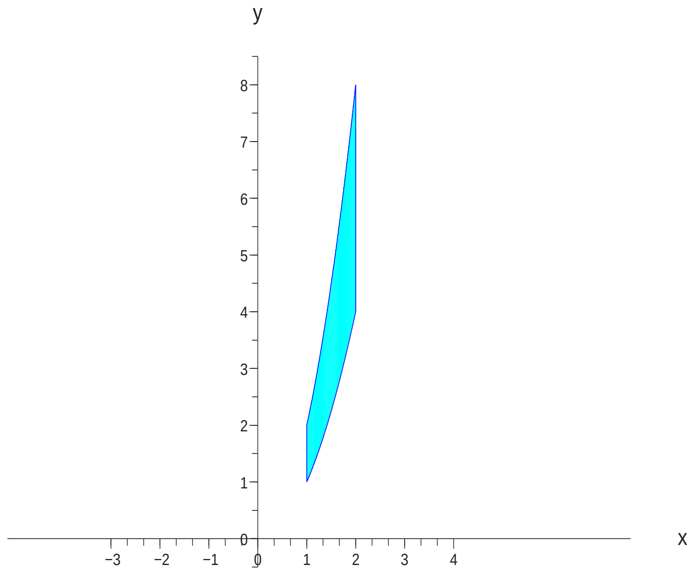

Fig. 15: L'insieme Ω (in azzurro).

L'insieme Ω è y-semplice. Quindi si ha che

$$\int_\Omega \frac{x}{x^2+y^2}\,dx\,dy = \int_1^2 \left[\int_{x^2}^{2x^2} \frac{x}{x^2+y^2}\,dy\right] dx = \int_1^2 \left[\int_{x^2}^{2x^2} \frac{\frac{1}{x}}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\,dy\right] dx =$$

$$= \int_1^2 \left[\arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right]_{x^2}^{2x^2} dx = \int_1^2 (\arctan 2x - \arctan x)\,dx =$$

integrando per parti

$$= \Big[x(\arctan 2x - \arctan x)\Big]_1^2 - \int_1^2 \left(\frac{2x}{1+4x^2} - \frac{x}{1+x^2}\right) dx =$$

$$= 2\arctan 4 - 3\arctan 2 + \frac{\pi}{4} - \left[\frac{1}{4}\log\left(1+4x^2\right) - \frac{1}{2}\log\left(1+x^2\right)\right]_1^2 =$$

$$= 2\arctan 4 - 3\arctan 2 + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{4}\log 17 + \frac{3}{4}\log 5 - \frac{1}{2}\log 2.$$

$n)$ Consideriamo l'integrale $\displaystyle\int_\Omega \frac{\sin y^2}{y}\,dx\,dy$, dove

$$\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 < x < y^2,\ \sqrt{\pi} < y < \sqrt{2\pi}\right\}.$$

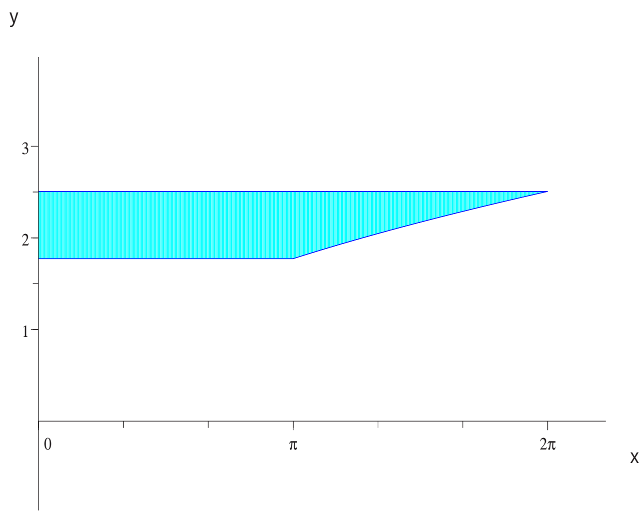

Fig. 16: L'insieme Ω (in azzurro).

L'insieme Ω è x-semplice. Quindi si ha che

$$\int_\Omega \frac{\sin y^2}{y}\,dx\,dy = \int_{\sqrt{\pi}}^{\sqrt{2\pi}} \left[\int_0^{y^2} \frac{\sin y^2}{y}\,dx\right] dy = \int_{\sqrt{\pi}}^{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{\sin y^2}{y} x\right]_0^{y^2} dy =$$

$$= \int_{\sqrt{\pi}}^{\sqrt{2\pi}} y \sin y^2\,dy = \left[-\frac{1}{2}\cos y^2\right]_{\sqrt{\pi}}^{\sqrt{2\pi}} = -1.$$

$o)$ Consideriamo l'integrale $\displaystyle\int_\Omega xy\,dx\,dy$, dove

$$\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ \ x^2 + 2y^2 < 1\right\}.$$

Osserviamo che sia Ω che $f(x,y) = xy$ presentano una simmetria rispetto ad entrambi gli assi. In particolare si ha che

$$(x,y) \in \Omega,\ y > 0 \quad \Longrightarrow \quad (x,-y) \in \Omega, \quad f(x,-y) = -f(x,y).$$

Quindi

$$\int_{\Omega \cap \{(x,y):\ \ y \geq 0\}} xy\,dx\,dy = -\int_{\Omega \cap \{(x,y):\ \ y < 0\}} xy\,dx\,dy.$$

Essendo $\Omega = \left(\Omega \cap \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ \ y \geq 0\right\}\right) \cup \left(\Omega \cap \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ \ y < 0\right\}\right)$, si ha che

$$\int_\Omega xy\,dx\,dy = 0.$$

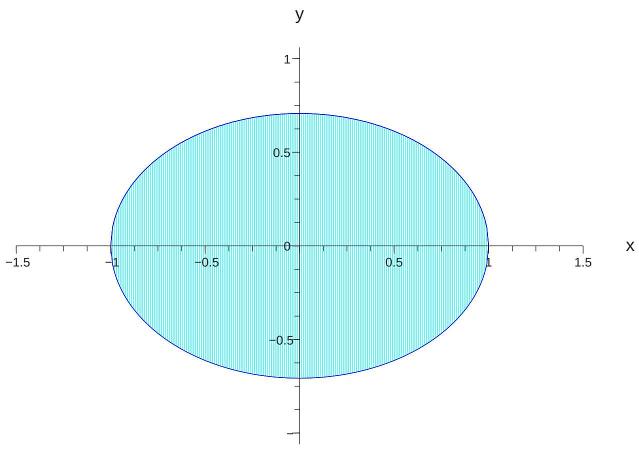

Fig. 17: L'insieme Ω (in azzurro).

p) Consideriamo l'integrale $\int_\Omega \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$, dove

$$\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \;\; x^2+y^2-4x < 0\right\}.$$

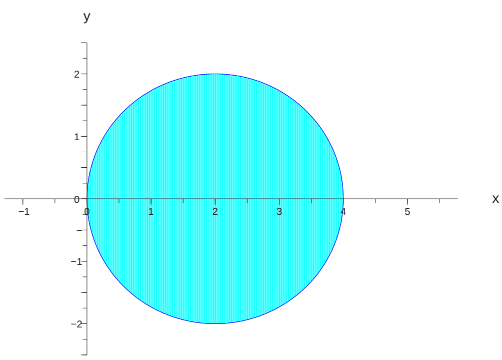

Fig. 18: L'insieme Ω (in azzurro).

Passiamo in coordinate polari nel piano. Poniamo quindi

$$\Phi : \begin{cases} x = \rho\cos\vartheta \\ y = \rho\sin\vartheta, \end{cases} \qquad \rho \geq 0, \;\; -\pi \leq \vartheta \leq \pi, \qquad |\det J_\Phi(\rho,\vartheta)| = \rho.$$

Allora

$$(x,y) \in \Omega \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} 0 < \rho < 4\cos\vartheta \\ -\frac{\pi}{2} < \vartheta < \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Quindi si ha che $\Omega = \Phi(\Omega')$, dove

$$\Omega' = \left\{(\rho, \vartheta) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 < \rho < 4\cos\vartheta, \ -\frac{\pi}{2} < \vartheta < \frac{\pi}{2}\right\}.$$

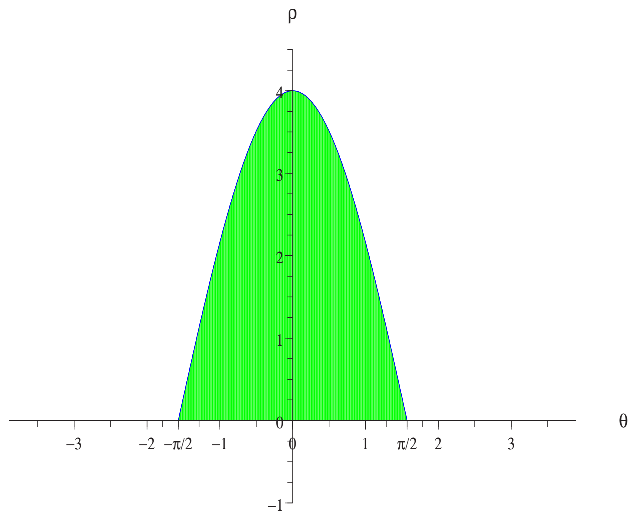

Fig. 19: L'insieme Ω' (in verde).

Ne segue che

$$\int_\Omega \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy = \int_{\Omega'} \rho^2\,d\rho\,d\vartheta =$$

essendo Ω' ρ-semplice e la funzione integranda prodotto di una funzione in ρ e di una di ϑ si ottiene

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{4\cos\vartheta} \rho^2\,d\rho\right) d\vartheta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{3}\rho^3\right]_0^{4\cos\vartheta} d\vartheta = \frac{64}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\vartheta\,d\vartheta =$$

integrando per parti

$$= \frac{64}{3}\left(\left[\sin\vartheta\cos^2\vartheta\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\vartheta\sin^2\vartheta\,d\vartheta\right) = \frac{128}{3}\left[\frac{1}{3}\sin^3\vartheta\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{256}{9}.$$

q) Consideriamo l'integrale $\displaystyle\int_\Omega \left(x+y^2\right) dx\,dy$, dove

$$\Omega = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ 1 < x^2+y^2 < 4, \ x > 0, \ y > 0\right\}.$$

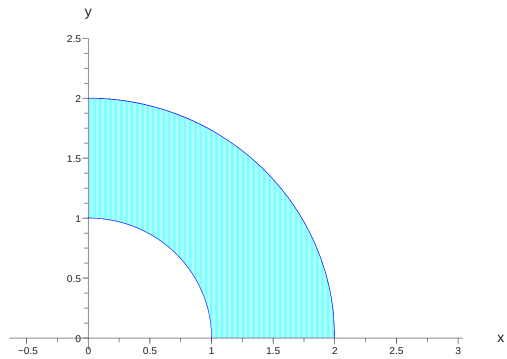

Fig. 20: L'insieme Ω (in azzurro).

Passiamo in coordinate polari nel piano. Poniamo quindi

$$\Phi : \begin{cases} x = \rho\cos\vartheta \\ y = \rho\sin\vartheta, \end{cases} \qquad \rho \geq 0,\ 0 \leq \vartheta \leq 2\pi, \quad |\det J_\Phi(\rho,\vartheta)| = \rho.$$

Allora

$$(x,y) \in \Omega \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} 1 < \rho < 2 \\ 0 < \vartheta < \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Quindi si ha che $\Omega = \Phi(\Omega')$, dove

$$\Omega' = \left\{(\rho,\vartheta) \in \mathbb{R}^2 :\ \ 1 < \rho < 2,\ 0 < \vartheta < \frac{\pi}{2}\right\}.$$

Ne segue che

$$\int_\Omega \left(x + y^2\right)\, dx\, dy = \int_{\Omega'} \left(\rho^2\cos\vartheta + \rho^3\sin^2\vartheta\right)\, d\rho\, d\vartheta =$$

essendo Ω' un rettangolo con lati paralleli agli assi ρ e ϑ e la funzione integranda somma di prodotti di funzioni di ρ e di funzioni di ϑ, si ottiene

$$= \left(\int_1^2 \rho^2\, d\rho\right)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\vartheta\, d\vartheta\right) + \left(\int_1^2 \rho^3\, d\rho\right)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\vartheta\, d\vartheta\right) =$$

$$= \left[\frac{1}{3}\rho^3\right]_1^2 \left[\sin\vartheta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \left[\frac{1}{4}\rho^4\right]_1^2 \left[\frac{1}{2}\left(\vartheta - \sin\vartheta\cos\vartheta\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{7}{3} + \frac{15}{16}\pi.$$

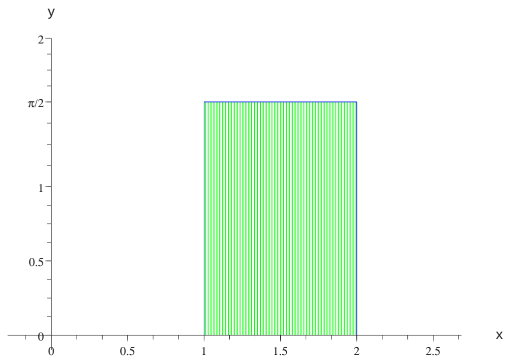

Fig. 21: L'insieme Ω' (in verde).

r) Consideriamo l'integrale $\int_\Omega x\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$, dove

$$\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \;\; x^2+y^2 < 1,\; x^2+y^2 < 2y,\; x < 0\right\}.$$

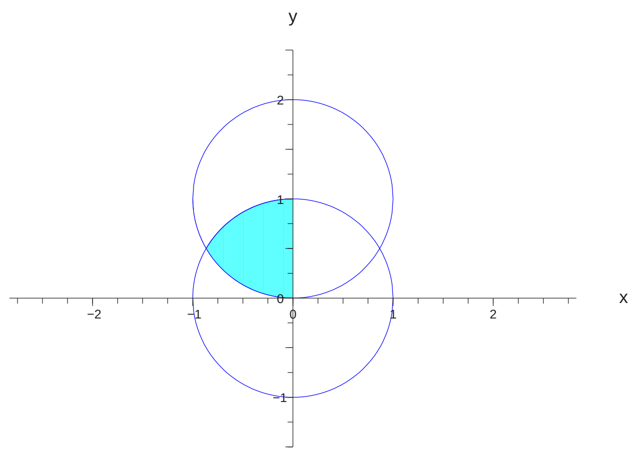

Fig. 22: L'insieme Ω (in azzurro).

Passiamo in coordinate polari nel piano. Poniamo quindi

$$\Phi : \begin{cases} x = \rho\cos\vartheta \\ y = \rho\sin\vartheta, \end{cases} \qquad \rho \geq 0,\; 0 \leq \vartheta \leq 2\pi, \qquad |\det J_\Phi(\rho,\vartheta)| = \rho.$$

Allora

$$(x,y) \in \Omega \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} 0 < \rho < 1 \\ 0 < \rho < 2\sin\vartheta \\ \frac{\pi}{2} < \vartheta < \pi. \end{cases}$$

Quindi si ha che $\Omega = \Phi(\Omega')$, dove $\Omega' = \Omega_1' \cup \Omega_2'$, con

$$\Omega_1' = \left\{(\rho,\vartheta) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 < \rho < 1, \ \frac{\pi}{2} < \vartheta < \frac{5}{6}\pi\right\},$$

$$\Omega_2' = \left\{(\rho,\vartheta) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 < \rho < 2\sin\vartheta, \ \frac{5}{6}\pi \le \vartheta < \pi\right\}.$$

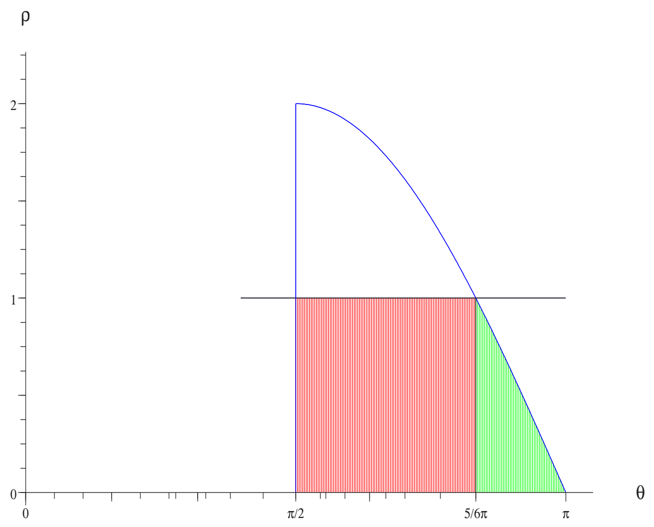

Fig. 23: L'insieme $\Omega' = \Omega_1' \cup \Omega_2'$, con Ω_1' in rosso e Ω_2' in verde.

Ne segue che

$$\int_\Omega x\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy = \int_{\Omega'} \rho^3 \cos\vartheta \,d\rho\,d\vartheta =$$

$$= \int_{\Omega_1'} \rho^3 \cos\vartheta \,d\rho\,d\vartheta + \int_{\Omega_2'} \rho^3 \cos\vartheta \,d\rho\,d\vartheta =$$

essendo sia Ω_1' che Ω_2' ρ-semplici e la funzione integranda prodotto di una funzione di ρ e di una di ϑ si ottiene, si ottiene

$$= \left(\int_0^1 \rho^3\,d\rho\right)\left(\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5}{6}\pi} \cos\vartheta\,d\vartheta\right) + \int_{\frac{5}{6}\pi}^{\pi} \cos\vartheta \left[\int_0^{2\sin\vartheta} \rho^3\,d\rho\right] d\vartheta =$$

$$= \left[\frac{1}{4}\rho^4\right]_0^1 \Big[\sin\vartheta\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5}{6}\pi} + \int_{\frac{5}{6}\pi}^{\pi} \cos\vartheta \left[\frac{1}{4}\rho^4\right]_0^{2\sin\vartheta} d\vartheta =$$

$$= -\frac{1}{8} + 4\int_{\frac{5}{6}\pi}^{\pi} \cos\vartheta \sin^4\vartheta \, d\vartheta = -\frac{1}{8} + 4\left[\frac{1}{5}\sin^5\vartheta\right]_{\frac{5}{6}\pi}^{\pi} =$$

$$= -\frac{1}{8} - \frac{1}{40} = -\frac{3}{20}.$$

s) Consideriamo l'integrale $\displaystyle\int_\Omega (x+y)\,dx\,dy$, dove

$$\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 2x^2 + 3y^2 < 4, \ x > 0, \ y > 0\right\}.$$

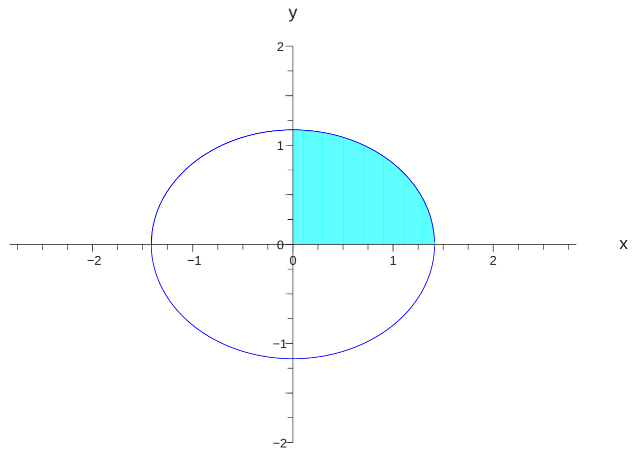

Fig. 24: L'insieme Ω (in azzurro).

Essendo Ω la parte del I quadrante inclusa nell'ellisse di equazione $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{\frac{4}{3}} = 1$, passiamo in coordinate ellittiche nel piano. Poniamo quindi

$$\Phi : \begin{cases} x = \sqrt{2}\rho\cos\vartheta \\ y = \frac{2}{3}\sqrt{3}\rho\sin\vartheta, \end{cases} \qquad \rho \geq 0, \ 0 \leq \vartheta \leq 2\pi, \qquad |\det J_\Phi(\rho,\vartheta)| = \frac{2}{3}\sqrt{6}\rho.$$

Allora

$$(x,y) \in \Omega \quad \iff \quad \begin{cases} 0 < \rho < 1 \\ 0 < \vartheta < \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Quindi si ha che $\Omega = \Phi(\Omega')$, dove

$$\Omega' = \left\{(\rho,\vartheta) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 < \rho < 1, \ 0 < \vartheta < \frac{\pi}{2}\right\}.$$

Ne segue che

$$\int_\Omega (x+y)\,dx\,dy = \int_{\Omega'} \frac{2}{3}\sqrt{6}\rho\left(\sqrt{2}\rho\cos\vartheta + \frac{2}{3}\sqrt{3}\rho\sin\vartheta\right)\,d\rho\,d\vartheta =$$

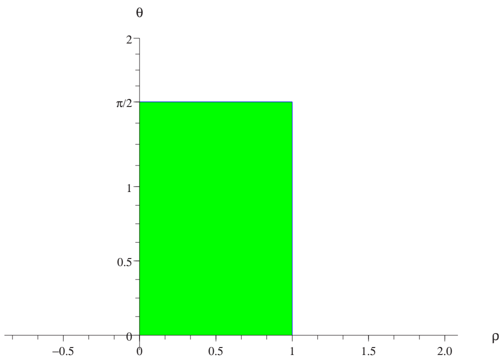

Fig. 25: L'insieme Ω' (in verde).

essendo Ω' un rettangolo con lati paralleli agli assi ρ e ϑ e la funzione integranda somma di prodotti di funzioni di ρ e di funzioni di ϑ, si ottiene

$$= \frac{4}{3}\sqrt{3}\left(\int_0^1 \rho^2\, d\rho\right)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\vartheta\, d\vartheta\right) + \frac{4}{3}\sqrt{2}\left(\int_0^1 \rho^2\, d\rho\right)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\vartheta\, d\vartheta\right) =$$

$$= \frac{4}{3}\sqrt{3}\left[\frac{1}{3}\rho^3\right]_0^1 \left[\sin\vartheta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{4}{3}\sqrt{2}\left[\frac{1}{3}\rho^3\right]_0^1 \left[-\cos\vartheta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{4}{9}\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right).$$