# Note sul Teorema di Jordan-Chevalley

(G. Tondo)

In queste note discuteremo su una scomposizione per operatori lineari (endomorfismi) in uno spazio vettoriale V di dimensione finita su un campo K aventi tutti gli autovalori in K. Tale scomposizione, detta di Jordan-Chevalley, permette di calcolare l'esponenziale di un operatore lineare e, quindi, la soluzione del problema di Cauchy associato ~~al~~ sistema dinamico

$$(1.1) \qquad \dot{x} = A x \qquad x \in \mathbb{R}^n,$$

dove A è la matrice dell'operatore rispetto alla base canonica. La scomposizione di Jordan-Chevalley permette di scomporre un operatore lineare T

$$(1.2) \qquad T = S + N, \qquad [S, N] = 0$$

con S diagonalizzabile, N nilpotente ($\exists k \in \mathbb{N}$ tale che $N^k = 0$). Il minimo intero m per il quale $N^m = 0$, si dice indice di nilpotenza di N. Alla dimostrazione del teorema premettiamo alcuni richiami e preliminari di algebra lineare, basati sulla nozione di sottospazio T-invariante, cioè di un sottospazio vettoriale U di V tale che

$$(1.3) \qquad T(U) \subseteq U.$$

Lemma Sia $T: V \to V$ un operatore lineare e $U \subseteq V$ un sottospazio T-invariante. Allora, denotata con $T^j|_U$, $j \in \mathbb{N}$, la restrizione di $T^j$ a $U$, vale

$$(1.4) \qquad \operatorname{Ker} T^j|_U = \operatorname{Ker} T^j \cap U$$

Lemma di Fitting [Hans Fitting (1906-1938)]

Consideriamo la catena di sottospazi T-invarianti

(2.1) $\{0\}=\operatorname{Ker}T^0\subseteq \operatorname{Ker}T\subseteq \operatorname{Ker}T^2\subseteq \dots \subseteq V$ catena ascendente

(2.2) $V \supseteq \operatorname{Im} T \supseteq \operatorname{Im} T^2 \supseteq \quad \supseteq \{0\}$ catena discendente

i) esiste il minimo intero $\rho$ tale che $\operatorname{Ker}T^\rho=\operatorname{Ker}T^m$ $\forall m\geq\rho$
Esso è uguale al minimo intero tale che $\operatorname{Im}T^\rho=\operatorname{Im}T^m$ $\forall m\geq\rho$.
Tale intero, che stabilizza sia la catena ascendente, sia quella discendente, è detto indice di Riesz di T.
Come conseguenza dell'esistenza di $\rho$ si hanno le inclusioni strette

(2.3) $\operatorname{Ker}T \subsetneq \operatorname{Ker}T^2 \subsetneq \dots \subsetneq \operatorname{Ker}T^\rho$

(2.4) $\operatorname{Im}T \supsetneq \operatorname{Im}T^2 \supsetneq \quad \supsetneq \operatorname{Im}T^\rho$

ii) Lo spazio vettoriale V si decompone come

(2.5) $V = \operatorname{Ker}T^\rho \oplus \operatorname{Im}T^\rho$.

Dem.

i) Dato che $\operatorname{Ker}T^m \subseteq V$ e $V$ ha dimensione finita, la catena (2.1) si deve stabilizzare. Quindi, deve esistere $j\in\mathbb{N}$ tale che $\operatorname{Ker}T^j=\operatorname{Ker}T^{j+1}$. Dimostriamo che $\operatorname{Ker}T^{j+1}=\operatorname{Ker}T^{j+2}$. Infatti, se $T^{j+2}(v)=T^{j+1}(T(v)) \Rightarrow T(v)\in \operatorname{Ker}T^{j+1}=\operatorname{Ker}T^j$. Quindi, $0=T^jT(v)=T^{j+1}(v) \Rightarrow \operatorname{Ker}T^{j+2}\subseteq \operatorname{Ker}T^{j+1}$ e quindi la tesi. Dunque, la catena (2.1) si stabilizza almeno da $j$ in poi. Il fatto che $\rho$ stabilizza anche la catena (2.2) segue dal fatto che

(2.6) $$\dim V = \dim(\operatorname{Ker}T^\rho)+\dim(\operatorname{Im}T^\rho)$$

ii) Tenuto conto della (2.6), basta dimostrare che

$$\operatorname{Ker} T^{\rho} \cap \operatorname{Im} T^{\rho} = \{0\} \tag{3.1}$$

Supponiamo che $w \in \operatorname{Ker} T^{\rho} \cap \operatorname{Im} T^{\rho}$. Allora, deve esistere $v \in V$ tale che

$$\begin{cases} w = T^{\rho} v \\ T^{\rho} w = 0 \end{cases} \Rightarrow T^{2\rho} v = 0 \Rightarrow v \in \operatorname{Ker} T^{2\rho} = \operatorname{Ker} T^{\rho}$$

Quindi $w = T^{\rho} v = 0$. ∎

Corollario

i) L'operatore $T_{|\operatorname{Ker} T^{\rho}} : \operatorname{Ker} T^{\rho} \to \operatorname{Ker} T^{\rho}$ è nilpotente di indice $\rho$.

ii) L'operatore $T_{|\operatorname{Im} T^{\rho}} : \operatorname{Im} T^{\rho} \to \operatorname{Im} T^{\rho}$ è un automorfismo

Dem

i) $T^{\rho}(\operatorname{Ker} T^{\rho}) = \{0\}$, inoltre $\exists\, v \in \operatorname{Ker} T^{\rho} \setminus \operatorname{Ker} T^{\rho-1}$ tale che

$$T^{\rho-1} v \neq 0$$

ii) segue dal fatto che

$$\operatorname{Ker}\left(T_{|\operatorname{Im} T^{\rho}}\right) \overset{(1.4)}{=} \operatorname{Ker} T \cap \operatorname{Im} T^{\rho} \subseteq \operatorname{Ker} T^{\rho} \cap \operatorname{Im} T^{\rho} \overset{(3.1)}{=} \{0\}$$

N.B. Se nel lemma di Fitting $T$ è un automorfismo, allora $\operatorname{Ker} T = \{0\}$, $\operatorname{Im} T = V$ e l'indice di Riesz è pari a zero.

Proposizione Siano $A_1 : V \to V$, $A_2 : V \to V$, due operatori lineari tali che

$$(4.1) \qquad [A_1, A_2] = 0.$$

Allora,

i) il nucleo e l'immagine di $A_i$ sono sottospazi invarianti per $A_j$ con $i, j = 1, 2$;

ii) $\operatorname{Ker} A_i^m$ e $\operatorname{Im} A_i^m$, $m \in \mathbb{N}$, sono sottospazi $A_j$-invarianti.

Dim. Per $i = j$ la tesi è ovvia.

Dimostriamo che l'invarianza sussiste anche per $i \neq j$

i) Consideriamo $v \in \operatorname{Ker} A_i$. Allora,

$$0 = A_j(A_i v) \overset{(4.1)}{=} A_i(A_j v) \Rightarrow A_j v \in \operatorname{Ker} A_i$$

Inoltre, se $w \in \operatorname{Im} A_i$ esiste $v$ tale che $w = A_i v$, allora

$$A_j w = A_j A_i v = A_i (A_j v) \in \operatorname{Im} A_j$$

ii) Dalla (4.1) segue che

$$[A_i^m, A_j] = 0 \qquad m \in \mathbb{N}$$

Allora, basta applicare la i) alla coppia di operatori $(A_i^m, A_j)$.

Lemma Siano $A : V \to V$ e $B : V \to V$ due operatori lineari e $U$ un sottospazio invariante sia per $A$, sia per $B$. Allora,

$$(4.1) \qquad (A + B)_{|U} = A_{|U} + B_{|U}$$

$$(4.2) \qquad (AB)_{|U} = A_{|U} B_{|U}$$

Esempi di sottospazi invarianti sono gli autospazi di $T$, cioè i sottospazi di tutti gli autovettori di $T$ associati a un autovalore $\lambda_i$

(5.1) $$V_{\lambda_i} = \{ v \in V : \ T v = \lambda_i v \}$$

Denoteremo con $sp(T)$ l'insieme degli autovalori di $T$, cioè le radici del polinomio caratteristico

(5.2) $$p_T(\lambda) = \det (T - \lambda \mathbb{1})$$

e con $m_a(\lambda_i)$ la molteplicità algebrica di ogni autovalore. Accanto agli autovettori (5.1) (detti propri) che soddisfano l'equazione

(5.3) $$(T - \lambda_i \mathbb{1}) v = 0 ,$$

dove $\mathbb{1}$ è l'operatore identità in $V$, considereremo anche i vettori che soddisfano l'equazione

(5.4) $$(T - \lambda_i \mathbb{1})^m v = 0 \qquad \forall \ m \in \mathbb{N}$$

e che sono detti autovettori generalizzati. L'insieme degli autovettori generalizzati associati ad un autovalore $\lambda_i$, forma un sottospazio vettoriale che denoteremo con $V'_{\lambda_i}$. Ovviamente, $V'_{\lambda_i}$ soddisfa la relazione

(5.5) $$V'_{\lambda_i} \supseteq V_{\lambda_i} = \mathrm{Ker} (T - \lambda_i \mathbb{1})$$

Anche gli autospazi generalizzati sono sottospazi $T$-invarianti. Infatti, se $v \in V'_{\lambda_i}$, cioè $\exists \, K \in \mathbb{N}$ tale che

$$(6.1) \qquad (T-\lambda_i \mathbb{1})^k v = 0, \qquad k \in \mathbb{N}$$

allora

$$(6.2) \qquad (T-\lambda_i \mathbb{1})^k (Tv) = T(T-\lambda_i \mathbb{1})^k v = 0,$$

per il fatto che gli operatori $T$ e $(T-\lambda_i \mathbb{1})$ commutano.
Per inciso, osserviamo che anche gli operatori

$$(6.3) \qquad (T-\lambda_i \mathbb{1}) \text{ e } (T-\lambda_j \mathbb{1})$$

commutano, insieme con le loro potenze. Quindi i loro nuclei e immagini sono invarianti per la Prop. di pag. 4.

## Somme dirette di sottospazi invarianti

Supponiamo che $V$ si possa scomporre in somma diretta di due sottospazi $U$ e $W$

$$(7.1) \qquad V = U \oplus W$$

Definizione: diremo che un operatore $T: V \to V$ è somma diretta di due operatori lineari $T_1 : U \to U$, $T_2 : W \to W$

$$(7.2) \qquad T = T_1 \oplus T_2$$

se

i) $U$ e $W$ sono sottospazi $T$-invarianti

ii) $Tv = T(u+w) = T_1 u + T_2 w$.

Osserviamo che i) e ii) equivalgono a $T_{|U} = T_1$ e $T_{|W} = T_2$, dove con $T_{1|U}$ e $T_{2|W}$ abbiamo indicato le restrizioni di $T$ a $U$ e $W$, rispettivamente.
E' facile osservare che se si sceglie una base $\mathcal{B}(V)$ di $V$ adattata alla scomposizione (4.1), cioè unione di una base $\mathcal{B}(U)$ di $U$ e una base $\mathcal{B}(W)$ di $W$

$$(7.3) \qquad \mathcal{B}(V) = \mathcal{B}(U) \cup \mathcal{B}(W),$$

la matrice rappresentativa di $T$ su $\mathcal{B}(V)$ è una matrice diagonale a blocchi

$$(7.4) \qquad [T]^{\mathcal{B}(V)} = \left[\begin{array}{c|c} T_1 & \\ \hline & T_2 \end{array}\right] \qquad \begin{array}{l} T_1 = T_{|U} \\ T_2 = T_{|W} \end{array}$$

Da tale rappresentazione, segue che

$$(8.1) \qquad \det(T) = \det(T_1)\,\det(T_2)$$

$$(8.2) \qquad p_T(\lambda) = p_{T_1}(\lambda)\, p_{T_2}(\lambda) \qquad \text{(polinomio caratteristico di } T)$$

Vediamo come gli autovettori di $T$ si distribuiscono nei sottospazi $U$ e $W$. Vale il seguente

Lemma [degli autovettori ristretti] Sia $V = U \oplus W$ una scomposizione di $V$ in sottospazi $T$-invarianti. Allora,

i) $sp(T) = sp(T_{|U}) \cup sp(T_{|W})$;

ii) se $\mu \in sp(T_{|U}) \Rightarrow Ker(T_{|U} - \mu \mathbb{1}_{|U}) = Ker(T - \mu \mathbb{1}) \cap U$;

iii) se $\mu$ $sp(T)$, le tre condizioni seguenti sono equivalenti

$$(8.3) \qquad \mu \in sp(T_{|U}) \setminus sp(T_{|W}) \qquad \Leftrightarrow p_T(\lambda) = (\mu-\lambda)^{m_a(\mu)} p_{T_{|W}}$$

$$(8.4) \qquad V_\mu \subseteq U$$

$$(8.5) \qquad Ker(T_{|U} - \mu \mathbb{1}_{|U}) = V_\mu .$$

Dim.

i) segue dalla (8.2);

ii) segue dal fatto che $U$ è $(T-\mu\mathbb{1})$-invariante e dalla (1.4);

iii) dimostriamo che $(8.3) \Rightarrow (8.4)$. Se vale la (8.3), dalla (8.2) segue che $\mu$ è radice solo di $p_{T_1}(\lambda)$. Quindi gli autovettori corrispondenti a $\mu$ sono solo gli autovettori di $T_1 = T_{|U}$ quindi $V_\mu \subset \mu$.

Viceversa, se $\forall v \in V_\mu \Rightarrow v \in W$, allora

$$(9.1) \qquad T_{|W}\, v = \lambda v \;\Rightarrow\; \mu \in sp(T_{|W})$$

Inoltre, $V_\mu \cap U = \{0\} \overset{iii)}{\Longrightarrow} \operatorname{Ker}(T_{|U} - \mu 1_U) = \{0\} \Rightarrow \mu \notin sp(T_{|U})$.
Il fatto che la $(8.4) \Leftrightarrow (8.5)$ è un'immediata conseguenza della ii). ∎

N.B. La iii) del lemma precedente si può esprimere dicendo che la scomposizione di $V$ in somma diretta di sottospazi $T$-invarianti "separa" gli autovalori di $T$ se e solo se "separa" gli autospazi corrispondenti.

La discussione di questa sezione si generalizza facilmente alle somme dirette di più di due sottospazi $T$-invarianti.

## Somma diretta di autospazi propri

Consideriamo ora l'intero spettro di $T: V \to V$

(10.1) $$sp(T) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_r\} \qquad r \leq n,$$

gli autospazi propri $V_{\lambda_i}$ e la loro somma.

(10.2) $$V' = V_{\lambda_1} + \dots + V_{\lambda_r} .$$

Sappiamo che

(10.3) $$V_{\lambda_i} \cap V_{\lambda_j} = \{0\} \qquad \text{se } i \neq j$$

poiché se $v \in V_{\lambda_i} \cap V_{\lambda_j}$

(10.4) $$\begin{matrix} (T - \lambda_i \mathbb{1}) v = 0 \\ (T - \lambda_j \mathbb{1}) v = 0 \end{matrix} \Rightarrow (\lambda_i - \lambda_j) v = 0 \overset{i \neq j}{\Rightarrow} v = 0$$

Quindi, la (10.2) diventa

(10.5) $$V' = \bigoplus_{i=1}^{r} V_{\lambda_i}$$

Inoltre, vale la seguente

<u>Proposizione</u> Gli autospazi $V_{\lambda_i}$ soddisfano le seguenti proprietà

(10.6) i) $$\operatorname{Ker}\left(T_{|V_{\lambda_i}} - \lambda_j \mathbb{1}_{|V_{\lambda_i}}\right) = \begin{cases} V_{\lambda_i} & \text{se } i = j \\ \{0\} & \text{se } i \neq j \end{cases} \qquad i, j = 1, \dots, r$$

(10.7) ii) $$sp\left(T_{|V_{\lambda_i}}\right) = \{\lambda_i\} \qquad i = 1, \dots, r$$

(10.8) iii) $$T_{|V_{\lambda_i}} = \lambda_i \mathbb{1}_{|V_{\lambda_i}} \qquad i = 1, \dots, r$$

Dem.

La i) è conseguenza del fatto che $V_{\lambda_i}$ è $(T-\lambda_j \mathbb{1})$-invariante, quindi, dalla (1.4) segue che

$$\mathrm{Ker}\left(T-\lambda_j \mathbb{1}\right)_{|V_{\lambda_i}} = \mathrm{Ker}\left(T-\lambda_j \mathbb{1}\right) \cap V_{\lambda_i} = V_{\lambda_j} \cap V_{\lambda_i} \overset{(10.3)}{=} \begin{cases} V_{\lambda_i} & \text{se } i=j \\ \{0\} & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

ii) Ovviamente, $\lambda_i \in sp(T_{|V_{\lambda_i}})$. Mostriamo che $\lambda_i$ è l'unico elemento. Infatti, se esiste $v \neq 0$ e $v \in V_{\lambda_i}$ tale che $Tv = \lambda_j v \Rightarrow v \in V_{\lambda_j} \cap V_{\lambda_i} \overset{(10.3)}{\Rightarrow} i = j$.

iii) Segue dal fatto che la restrizione di qualunque operatore sul suo nucleo è l'operatore nullo, quindi

$$T_{|V_{\lambda_i}} - \lambda_i \mathbb{1}_{|V_{\lambda_i}} = \left(T-\lambda_i \mathbb{1}\right)_{|V_{\lambda_i}} = 0$$

∎

Dalla (7.5) e dalla ii) della Prop. precedente segue una condizione necessaria e sufficiente per la diagonalizzazione di un operatore

Corollario Un operatore $T: V \to V$ è diagonalizzabil se e solo se

(11.1) $$V = V' := \bigoplus_{i=1}^{r} V_{\lambda_i}$$

Dem Consideriamo il sottospazio $V'$. Poiché gli autospazi $V_{\lambda_i}$ sono T-invarianti, anche $V'$ è T-invariante. Allora,

(11.2) $$T_{|V'} = \bigoplus_{i=1}^{r} T_i$$

dove

(11.3) $$T_i := T_{|V_{\lambda_i}} \overset{ii)}{=} \lambda_i \mathbb{1}_{|V_{\lambda_i}}$$

Quindi, una qualsiasi base di $V'$ adattata alla scomposizione (7.5) è una base di autovettori per $T_{|V'}$. Da qui segue la tesi ∎

## Somme dirette di autospazi generalizzati

Consideriamo gli autospazi generalizzati di $T: V \to V$

$$(12.1) \qquad V'_{\lambda_i} = \ker (T - \lambda_i \mathbb{1})^{\rho_i} \qquad \rho_i: \text{indice di Riesz di } \lambda_i$$

Vale la seguente

<u>Proposizione</u> Sia $T: V \to V$ un operatore lineare e $V'_{\lambda_i}$ i suoi autospazi generalizzati. Essi soddisfano le proprietà

$$(12.2) \quad i) \qquad V'_{\lambda_i} \cap V'_{\lambda_j} = \{0\} \qquad i \neq j$$

$$(12.3) \quad ii) \qquad \ker \left(T_{|V'_{\lambda_i}} - \lambda_j \mathbb{1}_{|V'_{\lambda_i}}\right)^{\rho_i} = \begin{cases} V'_{\lambda_i} & \text{se } i = j \\ \{0\} & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

$$(12.4) \quad iii) \qquad sp\left(T_{|V'_{\lambda_i}}\right) = \{\lambda_i\}$$

<u>Dim.</u> i) Supponiamo per assurdo che $v \in V'_{\lambda_i} \cap V'_{\lambda_j}$ e $v \neq 0$. Allora $\exists\, n_i, n_j \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ t.c.

$$(T - \lambda_i \mathbb{1})^{n_i} v = 0 \quad \text{et} \quad w := (T - \lambda_i \mathbb{1})^{n_i - 1} v \neq 0$$

$$(T - \lambda_j \mathbb{1})^{n_j} v = 0$$

Quindi, $Tw = \lambda_i w$ e

$$0 = (T - \lambda_i \mathbb{1})^{n_i - 1} (T - \lambda_j \mathbb{1})^{n_j} v = (T - \lambda_j \mathbb{1})^{n_j} (T - \lambda_i \mathbb{1})^{n_i - 1} v = (T - \lambda_j \mathbb{1})^{n_j} w$$

$$= (T - \lambda_j)^{n_j - 1} (\lambda_i - \lambda_j) w = (\lambda_i - \lambda_j)(T - \lambda_j \mathbb{1})^{n_j - 1} w =$$

$$= (\lambda_i - \lambda_j)^{n_j} w \overset{i \neq j}{\Longrightarrow} w = 0. \text{ Assurdo.}$$

ii) Segue dal fatto che $V'_{\lambda_i}$ è $(T-\lambda_j \mathbb{1})$-invariante e

$$\operatorname{Ker}\left(T_{|V'_{\lambda_i}} - \lambda_j \mathbb{1}_{|V'_{\lambda_i}}\right)^{\rho_i} = \operatorname{Ker}\left(\left(T-\lambda_j \mathbb{1}\right)_{|V'_{\lambda_i}}\right)^{\rho_i} \overset{(4.2)}{=} \operatorname{Ker}\left(T-\lambda_j \mathbb{1}\right)^{\rho_i}_{|V'_{\lambda_i}} \overset{(1.4)}{=} \operatorname{Ker}\left(T-\lambda_j \mathbb{1}\right)^{\rho_i} \cap V'_{\lambda_i}$$

Allora, la i) implica la tesi.

iii) È analoga alla dimostrazione della (10.7).
Sappiamo che $\lambda_i \in sp\left(T_{|V'_{\lambda_i}}\right)$ poiché $V'_{\lambda_i} \supseteq V_{\lambda_i}$. Inoltre, $\lambda_i$ è l'unico elemento poiché, se esistesse $\lambda_j \in sp\left(T_{|V'_{\lambda_i}}\right)$, $i \neq j$ allora esisterebbe $v \in V'_{\lambda_i}$ tale che $Tv = \lambda_j v$, quindi $v \in V'_{\lambda_i} \cap V_{\lambda_j}$. Assurdo per la i). ∎

Teorema di scomposizione spettrale

Sia $T: V \to V$ un operatore con tutti gli autovalori nel campo $K$. Allora, $V$ si scompone nella somma diretta degli autospazi generalizzati di $T$.

(14.1) $$V = \bigoplus_{i=1}^{r} V'_{\lambda_i},$$

inoltre

(14.2) $$\dim(V'_{\lambda_i}) = ma(\lambda_i),$$

(14.3) $$T = \bigoplus_{i=1}^{r_i} T_i \qquad T_i := T_{|V'_{\lambda_i}}$$

Dem. Per induzione sul numero $r$ degli autovalori. Sia $r = 1$ e quindi $ma(\lambda_1) = \dim V$. Allora, dal lemma di Fitting segue che

$$V = V'_{\lambda_1} \oplus W_1 = Ker(T-\lambda_1)^{\rho_1} \oplus Im(T-\lambda_1)^{\rho_1}.$$

Supponiamo $W_1 \neq \{0\}$. $W_1$ è $T$-invariante e l'operatore

$$T_{|W_1}: W_1 \to W_1$$

ammette almeno un autovalore, che deve coincidere con $\lambda_1$. Ma, poiché $V_{\lambda_1} \subseteq V'_{\lambda_1}$, è soddisfatta la (8.4) equivalente alla (8.3). Dunque, $\lambda_1 \notin T_{|W_1}$. Assurdo.

Dunque,

$$W_1 = \{0\}$$

$$V = V'_{\lambda_1} = Ker(T-\lambda_1)^{\rho_1}.$$

Quindi,

$$\dim(V'_{\lambda_1}) = \dim(V) = ma(\lambda_1)$$

Supponiamo, ora, che il Teorema sia vero per gli operatori che hanno al max $(r-1)$ autovalori e consideriamo un operatore $T$ con $\{\lambda_1, \dots, \lambda_r\}$ autovalori in $K$ con molteplicità, rispettivamente $(m_1, \dots, m_r)$. Per il lemma di Fitting vale

$$V = V'_{\lambda_1} \oplus W_1,$$

Allora, poiché $V_{\lambda_1} \subseteq V'_{\lambda_1}$ vale la (8.4), quindi per le (8.3) e (8.2)

$$sp(T_{|W_1}) = \{\lambda_2, \dots, \lambda_r\}.$$

Dunque, per l'ipotesi induttiva

$$W_1 = \bigoplus_{i=2}^{r} Ker\left(T_{|W_1} - \lambda_i 1\!\!1_{|W_1}\right)^{\rho_i}$$

Dimostriamo che

$$Ker\left(T_{|W_1} - \lambda_i 1\!\!1_{|W_1}\right)^{\rho} = Ker\left(T - \lambda_i 1\!\!1\right)^{\rho_i} \qquad i = 2, \dots, r$$

Sappiamo per la proprietà (12.2) che

$$V'_{\lambda_i} \cap V'_{\lambda_1} = \{0\} \qquad i = 2, \dots r,$$

quindi $V'_{\lambda_i} \subseteq W_1$ e dunque

$$Ker\left(T_{|W_1} - \lambda_i 1\!\!1_{|W_1}\right)^{\rho_i} = Ker\left(T - \lambda_i 1\!\!1\right)^{\rho_i}_{|W_1} = V'_{\lambda_i} \cap W_1 = V'_{\lambda_i} = Ker\left(T - \lambda_i 1\!\!1\right)^{\rho_i}.$$

Dunque, abbiamo dimostrato la (14.1). Allora, l'operatore $T$ ammette la scomposizione (14.3) in somma di tto.. Su una base $\mathcal{B}$ adattata a tale scomposizione, $T$ ha una rappresentazione diagonale a blocchi

$$[T]^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} T_1 & & \\ & \ddots & \\ & & T_r \end{bmatrix}$$

Quindi, il suo polinomio caratteristico è

$$p_T(\lambda) = p_{T_1}(\lambda) \cdots p_{T_r}(\lambda)$$

con

$$p_{T_i}(\lambda) = (\lambda_i - \lambda)^{\dim V'_{\lambda_i}} \qquad i = 1, \dots, s$$

Dunque, vale la (13.2)

$$\dim V'_{\lambda_i} = ma(\lambda_i).$$

Corollario Un operatore $T: V \longrightarrow V$ con tutti gli autovalori nel campo $K$ è diagonalizzabile se e solo se l'indice di Riesz di ciascun autovalore è pari a 1, cioè se e solo se gli autospazi generalizzati di $T$ coincidono con i suoi autospazi propri.

## Teo di Jordan-Chevalley.

Sia $T: V \to V$ un operatore con tutti gli autovalori in $K$. Allora, $T$ si può sempre scomporre come

$$(17.1) \qquad T = S + N$$

con $S: V \to V$ diagonalizzabile, $N: V \to V$ nilpotente e

$$(17.2) \qquad [S, N] = 0$$

La scomposizione (17.1) con (17.2) è unica.

Dem

Dal Teorema di scomposizione spettrale

$$(17.3) \qquad V = \bigoplus_{i=1}^{s} V'_{\lambda_i} \qquad T = \bigoplus_{i=1}^{s} T_i$$

Consideriamo gli operatori

$$T_i := T_{|V'_{\lambda_i}} : V'_{\lambda_i} \to V'_{\lambda_i} \qquad i = 1, \dots, s$$

Ognuno di essi ha come unico autovalore $\lambda_i$ per la (12.4).

Definiamo,

$$S_i := \lambda_i \mathbb{1}_{|V'_{\lambda_i}} : V'_{\lambda_i} \to V'_{\lambda_i} \Rightarrow \text{diagonali}$$

$$N_i := T_i - S_i = (T_i - \lambda_i \mathbb{1})_{|V'_{\lambda_i}} = \left(T_{i|V'_{\lambda_i}} - \lambda_i \mathbb{1}_{|V'_{\lambda_i}}\right)$$

Gli operatori $S_i$ sono proporzionali all'identità, quindi $[S_i, N_i] = 0$.

Gli operatori $N_i$ sono nilpotenti di indice $p_i$ per il Corollario di pag. 3.

Allora

$$T=\bigoplus_{i=1}^{r}\left(S_i+N_i\right)=\left(\bigoplus_{i=1}^{r} S_i\right)+\left(\bigoplus_{i=1}^{r} N_i\right)=S+N$$

dove

$$S:=\bigoplus_{i=1}^{r} S_i$$

$$N:=\bigoplus_{i=1}^{r} N_i .$$

L'operatore $S$ è diagonalizzabile su di una base $\mathcal{B}$ adattata alla scomposizione spettrale (17.3), mentre $N$ è nilpotente di indice

$$\rho=\max\{\rho_i\}_{1\le i\le r}$$

poiché

$$N^{\rho}=\left(\bigoplus_{i=1}^{r} N_i\right)^{\rho}=\bigoplus_{i=1}^{r}\left(N_i^{\rho}\right)=0 \qquad \rho\geq\rho_i .$$

Infine,

$$[S,N]=\left[\left(\bigoplus_{i=1}^{r} S_i\right),\left(\bigoplus_{i=1}^{r} N_i\right)\right]=\bigoplus_{i=1}^{r}\left[S_i,N_i\right]=0$$

∎

Corollario Su una qualsiasi base $\mathcal{B}'$ adattata alla scomposizione spettrale (17.3), l'operatore $T$ ha la rappresentazione

$$[T]^{\mathcal{B}}=\begin{bmatrix} \underbrace{\begin{matrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_1\end{matrix}}_{ma(1)\times ma(1)} & & \\ & \ddots & \\ & & \underbrace{\begin{matrix}\lambda_r & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_r\end{matrix}}_{ma(r)\times ma(r)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underbrace{N_1}_{ma(1)\times ma(1)} & & \\ & \ddots & \\ & & \underbrace{N_r}_{ma(r)\times ma(r)} \end{bmatrix}$$