Instantons in double-well potential

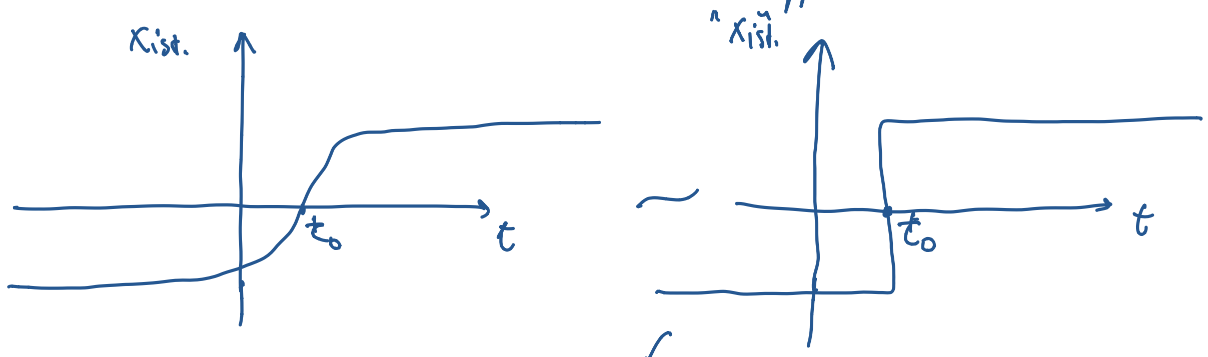
$$e^{-S[x_{ist.}]/\hbar} = e^{-2/\hbar}$$

$x_{ist}(t) = \pm a \tanh\left(\frac{\omega}{2}(t-t_0)\right)$

(famiglia di soluz.) ← parametro libero (zero-mode)

il risultato che stiamo cercando è pesato da più fattori

- Soluzione istantonica è ben approssimata da una step funct.



Istantone è localizzato nel tempo

(da cui il nome di ISTANTONE)

Ora dobbiamo calcolare $\int \mathcal{D}y \, e^{-\int S^{(2)} y^2/\hbar} \sim \det\left(\frac{\delta^2 S}{\delta x^2}\Big|_{x_{ist.}}\right)$

$y(-\beta/2) = 0$
$y(\beta/2) = 0$

fluttuazioni attorno al background istantonico

$$\frac{\delta^2 S}{\delta x^2} = -m\frac{d^2}{dt^2} + V_E''(x_{ist.})$$

funzione di t

- Per calcolare il P.I., dobbiamo trovare una base di autofunz. dell'op. $\frac{\delta^2 S}{\delta x^2}\Big|_{x_{ist.}}$

- Bisogna stare attenti, perché $\frac{\delta^2 S}{\delta x^2}\Big|_{x_{ist.}}$ ha uno ZERO-MODO normalizzabile, che è un'autofunzione con autovalore nullo (e norma finita)

$$y_0(t) : \left(-m \frac{d^2}{dt^2} + V_\varepsilon''(x_{ist.}(t)) \right) y_0(t) = 0 \qquad \& \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} |y_0(t)|\, dt = 1$$

(quando c'è un autovalore nullo , $\int \mathcal{D}y\, e^{-\int S^{(2)}_{y}y^2} = \int d(\text{zero-mode}) \det{}' S^{(2)}$)

$$\prod_{\lambda \neq 0} \lambda$$

$x_{ist.}$ è soluz. di

eq. del moto $\Rightarrow$ $-m \frac{d^2}{dt^2} x_{ist}(t) + V_\varepsilon'(x_{ist}(t)) = 0$

Facciamo la derivata $\frac{d}{dt}$ a entrambi i membri :

$$-m \frac{d^2}{dt^2} \dot{x}_{ist}(t) + V_\varepsilon''(x_{ist.}(t))\, \dot{x}_{ist.}(t) = 0$$

$$\Rightarrow \left(-m \frac{d^2}{dt^2} + V_\varepsilon''(x_{ist.}(t)) \right) \dot{x}_{ist}(t) = 0$$

è uno zero-mode

$$\| \dot{x}_{ist.} \|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{x}^2_{ist.}\, dt = \frac{1}{m} \int_{-\infty}^{+\infty} m \dot{x}^2_{ist.}\, dt = \frac{1}{m} S[x_{ist.}] \equiv \frac{1}{m} S_I$$

$\Rightarrow$ lo zero-mode normalizzato è $\quad y_0(t) = \sqrt{\frac{m}{S_I}}\, \dot{x}_{ist.}(t)$

Presenza di uno zero-mode di un'eq. diff. $\Rightarrow$ $\exists$ parametro libero t_0

t.c. la soluz. generale dip. da t_0

$\rightarrow$ generalmente questo è associato a una proprietà

di invarianza dell'eq. (e dell'azione : $S[\tilde{x}_{ist.}] = S[x_{ist}]$)

In effetti : $\tilde{x}_{ist.}(t) \equiv x_{ist.}(t + \Delta t)$ è ancora soluz.

(questo si riflette nel parametro t_0 nell'espressione

di $x_{ist}(t)$ data sopra)

- Espandiamo $x(t)$ in autofunz. di $\left.\frac{\delta^2 S}{\delta x^2}\right|_{x_{i'st.}}$:

$$x(t) = x_{i'st}(t) + \underbrace{\sqrt{\hbar}\sum_n y_n(t)\,\tilde{a}_n}_{\equiv\, y(t)}$$

$$= \underbrace{x_{ist.}(t) + \underbrace{\sqrt{\frac{m\hbar}{S_I}}\,\tilde{a}_0\,\dot{x}_{ist.}(t)}_{\sqrt{\hbar}\,\tilde{a}_0\,y_0(t)}}_{\simeq\, x_{ist}\Big(t + \underbrace{\tilde{a}_0\sqrt{\frac{m\hbar}{S_I}}}_{-t_0}\Big) + \dots} + \sum_{n\neq 0}\sqrt{\hbar}\,\tilde{a}_n\,y_n(t)$$

Definiamo $\mathcal{D}y = \tilde{N}\prod_n \frac{da_n}{\sqrt{2\pi}}$

$\tilde{N}$ lo calcoliamo andando a vedere l'oscillatore armonico

$S_E = \frac{m\dot{y}^2}{2} + \frac{m\omega^2 y^2}{2}$ $\qquad \lambda_n^{o.a.} = m\left(\left(\frac{\pi n}{\beta}\right)^2 + \omega^2\right)$

$$\tilde{N}\int\prod_n \frac{da_n}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\sum_n \lambda_n^{o.a.} a_n^2} = \frac{\tilde{N}}{\sqrt{\det(\dots)}} \underset{\text{già calcolato}}{=} \sqrt{\frac{m\omega}{2\pi\hbar\,\underbrace{\operatorname{senh}(\beta\omega)}_{\frac{e^{\beta\omega}-e^{-\beta\omega}}{2}\,\simeq\, \underset{\beta\to\infty}{\simeq} \frac{e^{\beta\omega}}{2}}}} \simeq$$

$$\underset{\beta\to\infty}{\simeq} \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/2} e^{-\beta\omega/2}$$

$$\tilde{N}\int\prod_n \frac{d\tilde{a}_n}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\sum_n \lambda_n a_n^2} = \int_{-\beta/2}^{\beta/2} \underbrace{dt_0 \sqrt{\frac{S_I}{m\pi\hbar}}}_{d\tilde{a}_0}\; \tilde{N}\prod_{n\neq 0}\frac{d\tilde{a}_n}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\sum_{n\neq 0}\lambda_n \tilde{a}_n^2}$$

$$= \int dt_0 \sqrt{\frac{S_I}{m\pi\hbar}}\; \frac{\tilde{N}}{\sqrt{\det\left(-m\frac{d^2}{dt^2}+m\omega^2\right)}} \cdot \frac{\sqrt{\det\left(-m\frac{d^2}{dt^2}+m\omega^2\right)}}{\sqrt{\det\left(-m\frac{d^2}{dt^2}+V_\varepsilon''(x_{ist.})\right)}}$$

$$\underset{\beta\to\infty}{\approx} \int dt_0 \sqrt{\frac{S_I}{m\pi\hbar}}\sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}}\, e^{-\beta\omega/2}\, \frac{\sqrt{\det\left(-m\frac{d^2}{dt^2}+m\omega^2\right)}}{\sqrt{\det\left(-m\frac{d^2}{dt^2}+V_\varepsilon''(x_{ist.})\right)}}$$

$$\sqrt{\frac{S_I}{m\pi\hbar}}\,\frac{\sqrt{\det\left(-m\frac{d^2}{dt^2}+m\omega^2\right)}}{\sqrt{\det\left(-m\frac{d^2}{dt^2}+V_\varepsilon''(x_{ist.})\right)}} = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/2}\underset{\downarrow\; =2a\omega}{\tilde{v}} \equiv R$$

$\tilde{v}$ è determinato dal comportamento asintotico di $\dot{x}_{ist.}(t)$ per $|t-t_0| \gg 1/\omega$

$$\dot{x}_{ist} = \tilde{v}\, e^{-\omega|t-t_0|}$$

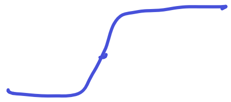
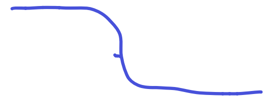
Nel nostro caso

$$x_{ist.}(t) = a\,\frac{1-e^{-\omega(t-t_0)}}{1+e^{-\omega(t-t_0)}} \xrightarrow[t-t_0\gg 1/\omega]{} a\left(1-2e^{-\omega(t-t_0)}\right)$$

$$\dot{x}_{ist}(t) \xrightarrow[t-t_0\gg 1/\omega]{} 2a\omega\, e^{-\omega(t-t_0)} \leadsto \tilde{v} = 2a\omega$$

$$R = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\tilde{v}^2\right)^{1/2} = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}4a^2\omega^2\right)^{1/2} = \left(\frac{4m a^2\omega^3}{\pi\hbar}\right)^{1/2} = \left(\frac{12 m^2\omega^5}{\pi\hbar\lambda}\right)^{1/2} = \left(\frac{12}{\pi\bar{\lambda}}\right)^{1/2}\omega$$

K_E ottiene contributo da soluz. di eq. del moto di S (Eucl.)

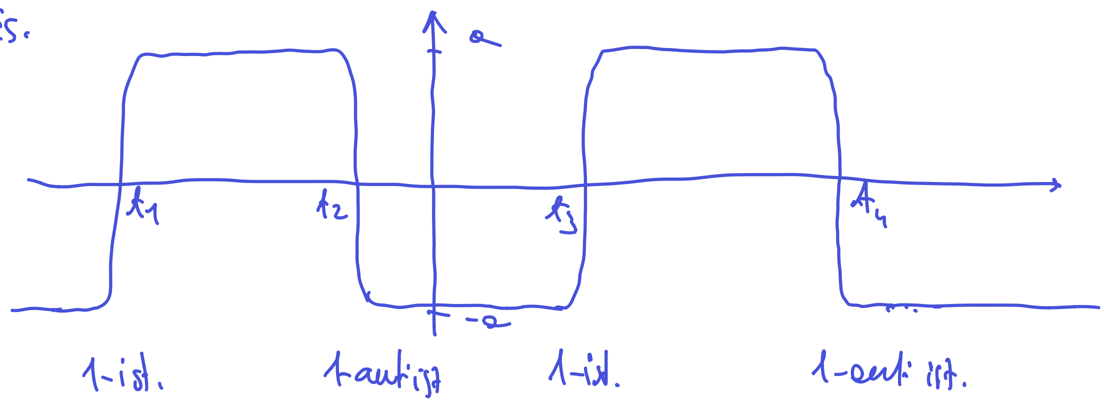
- finora trovato, oltre a soluz. cost., delle soluz. ist. (anti-ist) del tipo  o 

  → sol. 1-ist. o 1-anti-ist.

- Ci sono altre soluzioni, che possono essere approssimate dalla soluz. 1-ist. e 1-anti-ist. presa molte volte

  → uno può prendere una soluz. che salta su e giù in diversi t_i (approssimaz. è buona se $|t_i - t_j| \gg 1$

Es.



$n_I = 2$ istantoni

$n_A = 2$ anti-istantoni

$N = n_I + n_A = 4$

$$x^N_{ist.} \approx x_{ist.}(t-t_1) \text{ "+" } x_{ist.}(t-t_3) \text{ "+" } x_{antiist.}(t-t_2) \text{ "+" } x_{antiist.}(t-t_4)$$

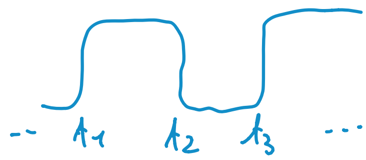
→ Queste soluz. approssimano le soluz. a N-istantoni esatte.

(approssimaz. di DILUITE INST. GAS)

- Quando calcoliamo il P.I., dobbiamo considerare i contributi che vengono da tutte queste soluz. (e sommarli)

- Una soluz. a N ist. è una stringa di .../ist./anti ist./ist./anti ist/...

- Per una soluz. a N istantoni, calcoliamo $S[x^N_{ist.}]$



$$S[x^N_{ist}] = \int \mathcal{L}[x^N_{ist.}]$$

$\downarrow$ è $=0$ ogni t lontano dai t_i

($x^N_{ist.}$ è cost. che azzera V_E)

$$= \int n_I \mathcal{L}[x_{ist.}] + \int n_A \mathcal{L}[x_{anti\,ist.}] = n_I S[x_{ist.}] + n_A S[x_{anti\,ist.}] =$$

$$= (n_I + n_A) S_I = N S_I$$

$$\Rightarrow e^{-S[x^N_{ist.}]/\hbar} = e^{-NS_I/\hbar} = e^{-2N/\bar{\lambda}}$$

con b.c. $\underset{\beta\to-\infty}{-a}$ $\underset{\beta\to+\infty}{+a}$ $\to$ solut.

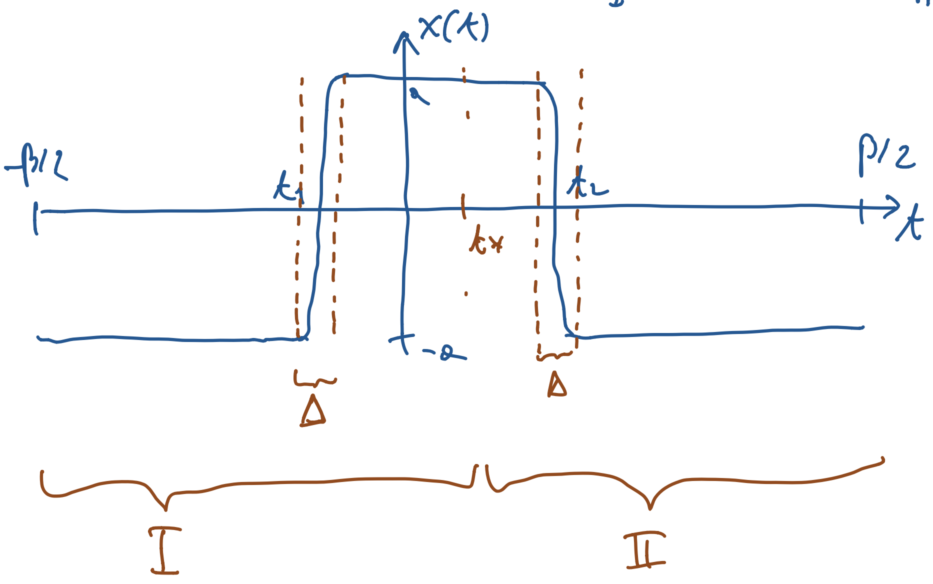
$$e^{-S_I} \gg e^{-3S_I} \gg e^{-5S_I} \dots$$

- il fattore $\left(\det(\dots)\right)^{-1/2}$:

$$\tilde{N}\left[\det\left(-m\frac{d^2}{dt^2} + V''(x^N_{ist.})\right)\right]^{-1/2} = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/2} e^{-\omega\beta/2} R^N$$

$$N = n_I + n_A$$

Consideriamo il caso $n_I = 1$ e $n_A = 1$



$|t_2 - t_1| \gg \Delta$

$t_i^{\pm} \equiv t_i \pm \Delta$

$$K\left(-a,-a;-\tfrac{\beta}{2},\tfrac{\beta}{2}\right) = \int dt_* \, K\left(-a,a;\tfrac{\beta}{2},t_*\right) \cdot K\left(a,-a;t_*,-\tfrac{\beta}{2}\right)$$

per il momento non considero zero-mode

$$\int_{I+II} \mathcal{D}'y \, e^{-S^{(2)}/\hbar} = \int \mathcal{D}'y \, e^{-S^{(2)}_{I}/\hbar} \, e^{-S^{(2)}_{II}/\hbar} = \int dt_* \int \mathcal{D}'y_I \, e^{-S^{(2)}_{I}/\hbar} \int \mathcal{D}'y_{II} \, e^{-S^{(2)}_{II}/\hbar}$$

Possiamo fare la stessa cosa per l'oscillatore armonico

$$\int_{I+II} \mathcal{D}'y \, e^{-S^{(2)}_{o.a.}/\hbar} = \int \mathcal{D}'y \, e^{-S^{(2)}_{o.a.\,I}/\hbar} \, e^{-S^{(2)\,o.a.}_{II}/\hbar} = \dots$$

Tornando al nostro P.I.

$$\int_{I+II} \mathcal{D}'y \, e^{-S^{(2)}/\hbar} = \underbrace{\frac{\int dt_* \int \mathcal{D}y'_I \, e^{-S^{(2)}_{I}/\hbar} \int \mathcal{D}y'_{II} \, e^{-S^{(2)}_{II}/\hbar}}{\int dt_* \int \mathcal{D}y'_I \, e^{-S^{(2)}_{o.a.\,I}/\hbar} \int \mathcal{D}y'_{II} \, e^{-S^{(2)}_{o.a.\,II}/\hbar}}}_{R \cdot R} \cdot \int_{I+II} \mathcal{D}y \, e^{-S^{(2)}_{o.a.}/\hbar}$$

$$= \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/2} e^{-\beta\omega/2} R^2 \quad \rightsquigarrow \quad \text{si estende facilm. a } N \text{ ist./anti-ist.}$$