Politecnico di Milano. Facoltà di Ingegneria Industriale.

Corso di Analisi e Geometria 2.

(Docente: Federico Lastaria).

Giugno 2011

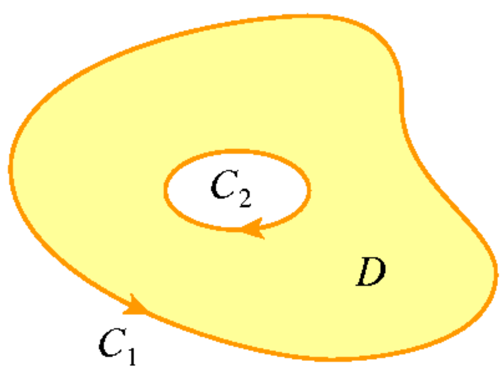
1 Formula di Gauss-Green

Teorema 1.1 (Formula di Gauss-Green nel piano)**.** *Sia D un dominio compatto del piano $\mathbb{R}^2$ il cui bordo ∂D sia costituito da curve lisce (a tratti). Siano $A(x,y)$ e $B(x,y)$ due funzioni qualunque di classe C^1, definite su un aperto che contiene D e ∂D, Allora*

$$\int_D \left(\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y}\right) dx\, dy = \int_{\partial D} Adx + Bdy \tag{1.1}$$

Qui si intende che la regione D ha la stessa orientazione canonica di $\mathbb{R}^2$ e il bordo ∂D è coerentemente orientato con l'orientazione indotta.

In termini informali: l'orientazione sul bordo ∂D è fissata in modo tale che, percorrendo il bordo nel verso positivo, la regione D si trovi sulla sinistra:



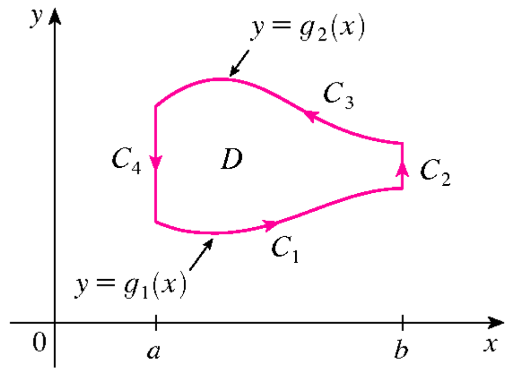
Dimostrazione.

Passo 1: D normale rispetto all'asse x.

Supponiamo che $D \subset \mathbb{R}^2$ sia una regione normale rispetto all'asse delle x, ossia del tipo:

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \le x \le b, \quad g_1(x) \le y \le g_2(x)\}$$

dove $g_1(x)$ e $g_2(x)$ sono funzioni di classe C^1 su $[a,b]$:



Sia $A(x, y)$ una qualinque funzione di classe C^1 su un aperto del piano contenente D e il suo bordo. Dimostriamo che

$$\int_D \frac{\partial A}{\partial y}\, dx\, dy = -\int_{\partial D} A dx \tag{1.2}$$

Per il teorema di Fubini (riduzione di un integrale doppio a due integrali semplici iterati), si ha:

$$\int_D \frac{\partial A}{\partial y}\, dx\, dy = \int_a^b dx \Big(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \partial_y A(x, y) dx \Big) \tag{1.3}$$

$$= \int_a^b \Big(A(x, g_2(x)) - A(x, g_1(x)) \Big)\, dx \tag{1.4}$$

Nell'ultimo passaggio abbiamo utilizzato il teorema fondamentale del calcolo integrale. Calcoliamo ora l'integrale $\int_{\partial D} A dx$. Il bordo ∂D è costituito dai quattro archi $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3, \mathcal{C}_4$. I due tratti verticali non danno contributo all'integrale di $A\, dx$, perché su di essi $dx = 0$. Tenendo conto dell'orientazione fissata sul bordo, si deve orientare l'arco $\mathcal{C}_1$ (che è il grafico di $g_1(x)$) secondo le x crescenti e l'arco $\mathcal{C}_2$ (il grafico di $g_2(x)$) secondo le x decrescenti. Dunque

$$\int_{\partial D} A dx = \int_a^b \Big(-A(x, g_2(x)) + A(x, g_1(x)) \Big)\, dx \tag{1.5}$$

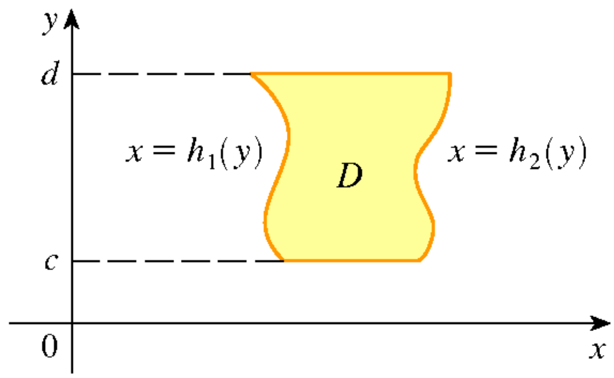
Si vede allora che si ottiene l'opposto dell'integrale 1.4. Dunque la 1.2 è provata.

Passo 2: D normale rispetto all'asse y.

Supponiamo ora che D sia una regione normale rispetto all'asse y,

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid c \le y \le d, \quad \gamma(y) \le x \le \delta(y)\}$$

ossia del tipo:



Sia $B(x, y)$ una qualunque funzione di classe C^1 (definita su un aperto contenente D e il suo bordo). Con una argomentazione del tutto simile a quella appena svolta, si ricava

$$\int_D \frac{\partial B}{\partial x}\, dx\, dy = \int_{\partial D} B dy \tag{1.6}$$

(Si noti che in questo caso non compare un segno meno a secondo membro).

Passo 3: D normale rispetto a entrambi gli assi.

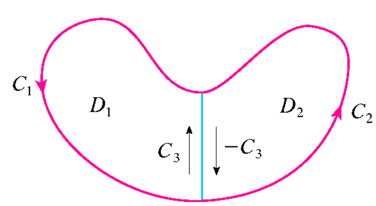
Se la regione D è normale rispetto a entrambi gli assi e $A(x, y), B(x, y)$ sono funzioni qualunque definite su un aperto contenente D, allora valgono simultaneamente le due formule (1.2) e (1.6).

$$\int_D \left(\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y}\right) dx\, dy = \int_{\partial D} A dx + B dy \tag{1.7}$$

Questa formula non è altro che la formula di Green (1.1) nel caso di regioni normali rispetto a entrambi gli assi.

Passo 4, Caso 'generale': D unione finita di regioni semplici.

Possiamo ora dimostrare la formula di Green per regioni D che siano unione finita di regioni semplici. Ad esempio, supponiamo che la regione D sia la seguente



Questa regione D è unione $D = D_1 \cup D_2$, dove D_1 e D_2 sono regioni semplici. Il bordo di D_1 è $\mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_3$, il bordo di D_2 è $\mathcal{C}_2 + (-\mathcal{C}_3)$, mentre il bordo di D è $\mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2$. Applicando il teorema di Green (1.7) separatamente a D_1 e D_2, si ha:

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{C}_1+\mathcal{C}_3} A(x,y)dx + B(x,y)dy &= \int_{D_1} (\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y})\, dx\, dy \\ \int_{\mathcal{C}_2+(-\mathcal{C}_3)} A(x,y)dx + B(x,y)dy &= \int_{D_2} (\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y})\, dx\, dy\end{aligned}$$

Ora sommiamo membro a membro. A primo membro, i due integrali $\int_{\mathcal{C}_3}$ e $\int_{-\mathcal{C}_3}$ si cancellano e resta

$$\int_{\mathcal{C}_1+(\mathcal{C}_2)} A(x,y)dx + B(x,y)dy$$

ossia

$$\int_{\partial D} A(x,y)dx + B(x,y)dy$$

A secondo membro, poiché $D = D_1 \cup D_2$, la somma $\int_{D_1} + \int_{D_2}$ è uguale all'integrale

$$\int_D (\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y})\, dx\, dy$$

Dunque si è dimostrato che vale la formula di Green:

$$\int_{\partial D} A(x,y)dx + B(x,y)dy = \int_D (\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y})\, dx\, dy$$

1.0.1 Formule per l'area

Un'immediata conseguenza della formula di Gauss-Green è il seguente teorema:

Teorema 1.2 (Formule per l'area.)**.** *L'area della regione D, il cui bordo orientato è ∂D, è data dai seguenti integrali curvilinei:*

$$\begin{aligned}\textit{area di } D &= \int_{\partial D} -y\, dx &(1.8)\\ &= \int_{\partial D} x\, dy &(1.9)\\ &= \frac{1}{2}\int_{\partial D} -y\, dx + x\, dy &(1.10)\end{aligned}$$

Dimostrazione. Si applichi la formula di Gauss-Green alla forma differenziale $y\, dx$ (cioè alla 1-forma $A(x,y)dx + B(x,y)dy$, con $A(x,y) = -y$ e $B(x,y) = 0$). Si ha

$$\int_D 1\, dx\, dy = \int_{\partial D} -y dx \tag{1.11}$$

Ma l'integrale a primo membro è per definizione l'area della regione piana D:

$$\int_D 1\, dx\, dy = \text{area di } D$$

In questo modo abbiamo dimostrato l'uguaglianza 1.8. L'uguaglianza 1.9

$$\text{area di } D \quad = \quad \int_{\partial D} x\,dy \tag{1.12}$$

si dimostra nello stesso modo. Infine, sommando membro a membro le due uguaglianze

$$\text{area di } D = \int_{\partial D} -y\,dx \qquad\qquad \text{area di } D = \int_{\partial D} x\,dy,$$

si ottiene la 1.10. □

Esercizio 1.3. *Usando il risultato precedente, calcolare l'area della regione di piano racchiusa dall'ellisse* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Soluzione Una parametrizzazione dell'ellisse è : $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, $0 \le t \le 2\pi$. Per il teorema di Green, l'area della regione racchiusa dall'ellisse è

$$\frac{1}{2}\int_C xdy - ydx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} ab(\cos^2 t + \sin^2 t)dt = \pi ab$$

Oppure:

$$\int_C xdy = \int_0^{2\pi} (a\cos t)(b\cos t)dt = ab\int_0^{2\pi} (\cos t)^2 dt = \pi ab$$