RIASSUNTO

[5.18.4]

Abbiamo riscalato i campi e parametri bare della Lagrangiana di QCD introducendo costanti di rinormalizzazione:

$$\psi^0 = Z_2^{1/2}\,\psi^R, \qquad A_\mu^0 = Z_3^{1/2}\,A_\mu^R,$$

$$m_0 = Z_m\,m_R, \qquad e_0 = Z_e\,e_R.$$

Definiamo poi $Z_1 \equiv Z_e Z_2 Z_3^{1/2}$ ← rinormalizza il vertice

L'identità di Ward-Takahashi impone $Z_1 = Z_2 \Rightarrow e_R = Z_3^{1/2} e_0$.

I controtermini $\delta_i \equiv Z_i - 1$ riassorbono le divergenze UV in un dato SCHEMA DI RINORMALIZZAZIONE.

Nello SCHEMA ON-SHELL, si impongono le condizioni

$$\boxed{\Pi(0)=0, \quad \Sigma(m_p)=0, \quad \Sigma'(m_p)=0, \quad \Gamma^\mu(0)=\gamma^\mu}$$

Da cui si ricavano i controtermini:

$$\delta_1^{MOM} = \delta_2^{MOM} = -\frac{\alpha}{4\pi}\left(\frac{2}{\varepsilon} - \gamma + \log 4\pi + 4 + \log\frac{\mu^2}{m^2} + \log\frac{m_\gamma^2}{m^2}\right)$$

$$\delta_3^{MOM} = -\frac{\alpha}{3\pi}\left(\frac{2}{\varepsilon} - \gamma + \log 4\pi + \log\frac{\mu^2}{m^2}\right)$$

Nello schema di sottrazione $\overline{MS}$, non si impongono condizioni di rinormalizzazione ma i controtermini vengono fissati RICHIEDENDO che cancellino i termini proporzionali a $\left(\frac{2}{\varepsilon}-\gamma+\log 4\pi\right)$:

$$\delta_1^{\overline{MS}} = \delta_2^{\overline{MS}} = -\frac{\alpha}{4\pi}\left(\frac{2}{\varepsilon}-\gamma+\log 4\pi\right)$$

$$\delta_3^{\overline{MS}} = -\frac{\alpha}{3\pi}\left(\frac{2}{\varepsilon}-\gamma+\log 4\pi\right)$$

- Le parti divergenti dei controtermini dipendono dal tipo di regolatore UV (Pauli-Villars, dim-reg, etc..) ma NON dipendono dallo schema. Le parti finite sí.
- La scala di rinormalizzazione μ non é fisica. Questa indipendenza genera il gruppo di rinormalizzazione. Nello schema on-shell la scala μ é fissata implicitamente, e.g. a $\mu = m_e$ o $\mu = 0$.

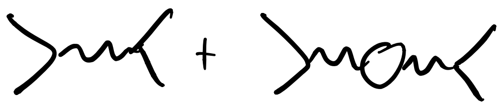
[S.23.1]

Nella funzione a 2 punti del fotone , la dipendenza ad alte energie è UNIVERSALE

$$\Pi^{\overline{MS}}(p^2 \gg \mu^2) = \frac{e^2}{12\pi^2}\left[\log\frac{\mu^2}{p^2} + \dots\right]$$

$$\Pi^{MOM}(p^2 \gg p_0^2) = \frac{e^2}{12\pi^2}\left[\log\frac{p_0^2}{p^2} + \dots\right]$$

← Noi avevamo scelto $p_0^2 = m^2$, ma in generale è arbitrario

L'indipendenza dalla scala di rinormalizzazione di ampiezze fisiche, come  ci fornisce la FUNZIONE BETA

$$\tilde{V}(p^2) = \frac{e(\mu)^2}{p^2}\left(1 - \frac{e^2}{12\pi^2}\log\frac{\mu^2}{p^2} + \dots\right)$$

$$\mu\frac{d\tilde{V}}{d\mu} \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad \mu\frac{de(\mu)}{d\mu} = \frac{e^3}{12\pi^2}$$

La soluzione con condizione al contorno $e(\mu_0)$ a μ_0 è:

$$e(\mu) = \frac{e(\mu_0)}{1 - \frac{e^2(\mu_0)}{12\pi^2}\log\frac{\mu}{\mu_0}}$$

Equazione del gruppo di rinormalizzazione per e.

FUNZIONE-β DAI CONTROTERMINI

[5.23.2]

Nota: in dim. reg. il $\log\mu^2$ è inseparabile dal polo $\frac{1}{\varepsilon}$, venendo da un'espansione del tipo:

$$\mu^\varepsilon\left(\frac{2}{\varepsilon}-\gamma+\log 4\pi-\log p^2+\dots\right)=\frac{2}{\varepsilon}-\gamma+\log 4\pi+\log\frac{\mu^2}{p^2}$$

$\Rightarrow$ Il coefficiente davanti a $\log\mu^2$ è lo stesso di $\frac{2}{\varepsilon}$.

Possiamo quindi ottenere la funzione $\beta^{(*)}$ estraendo solamente la parte divergente dell'ampiezza.

(*) Questo è valido solamente per il comportamento a grandi energie nel caso di schemi on-shell (MOM).

Formalmente, la Lagrangiana in d-dimensioni è

$$\mathcal{L}=-\frac{1}{4}Z_3F_{\mu\nu}^2+iZ_2\bar\psi\not{\partial}\psi-m_RZ_2Z_m\bar\psi\psi-\mu^{\frac{4-d}{2}}e_RZ_eZ_2Z_3^{1/2}\bar\psi\not{A}\psi$$

mentre i parametri della Lagrangiana bare sono indipendenti da μ. In particolare

$$0=\frac{de_0}{d\log\mu}=\mu\frac{d}{d\mu}\left[\mu^{\frac{\varepsilon}{2}}e_RZ_e\right]=\mu^{\frac{\varepsilon}{2}}e_RZ_e\left[\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\mu}{e_R}\frac{de}{d\mu}+\frac{\mu}{Z_e}\frac{dZ_e}{d\mu}\right]$$

Al leading order in e_R, $Z_e=1$ $\Rightarrow$ $\mu\frac{de}{d\mu}=\beta^{(0)}=-\frac{\varepsilon}{2}e_R$

All'ordine successivo: $Z_e = 1 + \frac{e_R^2}{16\pi^2}\left[\frac{4}{3\varepsilon} + \dots\right] \equiv 1 + \frac{b_1}{\varepsilon} e_R^2 + \dots$

termini finiti dipendenti dallo schema.

$$\Rightarrow \mu \frac{dZ_e}{d\mu} = \frac{2}{\varepsilon} b_1 e_R \overset{\beta^{(d)}}{\mu \frac{de}{d\mu}} =$$

$$= -\frac{2}{\varepsilon} b_1 e_R^2 \frac{\varepsilon}{2} = -b_1 e_R^2 = -\frac{e_R^2}{12\pi^2}$$

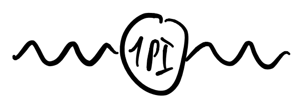
Usando questo risultato troviamo

$$\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\beta(e_R)}{e_R} - \frac{e_R^2}{12\pi^2} = 0 \Rightarrow \beta(e_R) = -\frac{e_R \varepsilon}{2} + \frac{e_R^3}{12\pi^2}$$

Ovvero nel limite $\varepsilon \to 0$: $\boxed{\beta(e_R) = \frac{e_R^3}{12\pi^2}}$

Possiamo quindi ottenere la funzione beta senza doverci riferire ad osservabili esplicite, come $\tilde{V}(p^2)$.

Dato che $Z_e = \frac{Z_1}{Z_2 Z_3^{1/2}} \underset{\text{Ward}}{=} Z_3^{-1/2}$ è chiaro che

$\beta(e_R)$ viene solamente da diagrammi: 

Analogamente, possiamo anche trovare l'equazione RG per la massa dell'elettrone:

$$0 = \mu \frac{d}{d\mu} m^0 = \mu \frac{d}{d\mu}\left(Z_m m_R \right) = Z_m m_R \left[\frac{\mu}{m_R}\frac{dm_R}{d\mu} + \frac{\mu}{Z_m}\frac{dZ_m}{d\mu} \right]$$

Definiamo la DIMENSIONE ANOMALA

$$\boxed{\gamma_m \equiv \frac{\mu}{m_R}\frac{dm_R}{d\mu}}$$

$$\Rightarrow \quad \gamma_m = - \frac{\mu}{Z_m}\frac{dZ_m}{d\mu} = - \frac{1}{Z_m}\frac{dZ_m}{de_R}\,\mu\frac{de_R}{d\mu}$$

A 1-loop $Z_m \equiv 1 + \delta_m = 1 - \frac{3e_R^2}{16\pi^2}\left(\frac{2}{\varepsilon} + \text{termini finiti}\right)$

mentre $\mu \frac{de}{d\mu} = \beta^{(0)} = -\frac{\varepsilon}{2} e_R + O(e_R^3)$

$$\Rightarrow \quad \gamma_m = - \frac{1}{1+\delta_m}\left(\frac{2}{e_R}\delta_m\right)\left(-\frac{\varepsilon}{2}e_R\right) = \delta_m \varepsilon + O(e_R^3)$$

$$\gamma_m = -\frac{3e_R^2}{8\pi^2} \qquad \Rightarrow \qquad \mu\frac{dm_R}{d\mu} = -\frac{3\alpha}{2\pi^2} m_R$$

Possiamo anche trovare le DIMENSIONI ANOMALE del campo del fotone e dell'elettrone:

$$\gamma_3 \equiv \frac{\mu}{Z_3}\frac{dZ_3}{d\mu} = \frac{1}{Z_3}\frac{dZ_3}{de_R}\beta^{(0)}(e_R) = -\delta_3 \varepsilon = \frac{e_R^2}{12\pi^2}$$

$$\gamma_2 = \frac{\mu}{Z_2}\frac{dZ_2}{d\mu} = -\delta_2 \varepsilon = \frac{e_R^2}{16\pi^2}$$

EQUAZIONE DI CALLAN-SYMANZIK [5.23.43]

Consideriamo una funzione di Green con n fotoni e m elettroni "bare":

$$G^{(0)}_{n,m} = \langle 0 | T\{ A^0_{\mu_1} \dots A^0_{\mu_n} \psi^0_1 \dots \psi^0_m \} | 0 \rangle$$

$\Rightarrow$ è indipendente da μ dato che μ non appare in $\mathcal{L}$, ma è divergente.

In termini della funzione di Green con campi rinormalizzati (che sarà invece finita)

$$G_{n,m} = \langle 0 | T\{ A_{\mu_1} \dots A_{\mu_n} \psi_1 \dots \psi_m \} | 0 \rangle$$

abbiamo:

$$G^{(0)}_{n,m} = Z_3^{\frac{n}{2}} Z_2^{\frac{m}{2}} G_{n,m}$$

$G_{n,m}$ può dipendere da μ sia esplicitamente che via i parametri e campi rinormalizzati:

$$0 = \mu \frac{d}{d\mu} G^{(0)}_{n,m} =$$

$$= Z_3^{\frac{n}{2}} Z_2^{\frac{m}{2}} \left[\mu \frac{\partial}{\partial\mu} + \frac{n}{2} \overbrace{\frac{\mu}{Z_3} \frac{dZ_3}{d\mu}}^{\gamma_3} + \frac{m}{2} \overbrace{\frac{\mu}{Z_2} \frac{dZ_2}{d\mu}}^{\gamma_2} + \overbrace{\mu \frac{de_R}{d\mu}}^{\beta_e} \frac{\partial}{\partial e_R} + \overbrace{\mu \frac{dm_R}{d\mu}}^{m_R \gamma_m} \frac{\partial}{\partial m_R} \right] G_{n,m}$$

Ovvero:

$$\boxed{\left(\mu\frac{\partial}{\partial\mu}+\frac{n}{2}\gamma_3+\frac{m}{2}\gamma_2+\beta_e\frac{\partial}{\partial e_R}+m_R\gamma_m\frac{\partial}{\partial m_R}\right)G_{n,m}=0}$$

Equazione di Callan-Symanzik

Se la funzione di Green ha anche un OPERATORE LOCALE $\mathcal{O}(x)$, tipo $\mathcal{O}(x)=\bar{\psi}(x)\psi(x)$ o $J^\mu(x)=\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)$, definiamo

$$\mu\frac{d}{d\mu}\mathcal{O}\equiv\gamma_{\mathcal{O}}\,\mathcal{O}$$

$\gamma_{\mathcal{O}}$: dimensione anomala di $\mathcal{O}(x)$

ed abbiamo:

$$\left(\mu\frac{\partial}{\partial\mu}+\frac{n}{2}\gamma_3+\frac{m}{2}\gamma_2+\beta_e\frac{\partial}{\partial e_R}+m_R\gamma_m\frac{\partial}{\partial m_R}+\gamma_{\mathcal{O}}\right)G=0$$

Per la teoria $\lambda\varphi^4$ (a massa nulla, per semplicità)

$$\left(\mu\frac{\partial}{\partial\mu}+\frac{n}{2}\gamma+\beta\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)G_n=0\,,\quad \text{dove}\quad \gamma\equiv\frac{\mu}{Z}\frac{dZ}{d\mu}$$

La soluzione è data da [vedi PS.12.3]

$$\tilde{G}_n(\{p_i\};\lambda,\mu) = \tilde{G}_n(\{p_i\};\bar{\lambda}(t),\mu_0)\, e^{\frac{n}{2}\int_0^t \gamma(\bar{\lambda}(t'))\,dt}$$

dove $t \equiv \log\frac{\mu_0}{\mu}$ e

$\bar{\lambda}(t)$ è la soluzione all'equazione di RG

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}\bar{\lambda}(t) = \beta(\bar{\lambda}) = \frac{3\bar{\lambda}^2}{16\pi^2} \\ \bar{\lambda}(0) = \lambda \end{cases} \Rightarrow \quad \bar{\lambda}(t) = \frac{\lambda}{1-\frac{3\lambda}{16\pi^2}t}$$

funzione - β

Il termine esponenziale della dimensione anomala può essere valutato semplicemente, se approssimiamo

$\gamma \simeq \text{const}$:

$$e^{\frac{n}{2}\int_0^t \gamma(\bar{\lambda}(t'))\,dt} \simeq e^{\frac{n}{2}t\gamma} = e^{\frac{n}{2}\log\frac{\mu_0}{\mu}\gamma} = \left(\frac{\mu_0}{\mu}\right)^{\frac{n}{2}\gamma}$$

$$\left(\mu\frac{\partial}{\partial\mu} + \frac{n}{2}\gamma\right)\left(\frac{\mu_0}{\mu}\right)^{\frac{n}{2}\gamma} = \left(-\frac{n}{2}\gamma + \frac{n}{2}\gamma\right)\left(\frac{\mu_0}{\mu}\right)^{\frac{n}{2}\gamma} = 0$$

DIMENSIONI ANOMALE [5.23.4.4]

La dimensione classica di un campo o un parametro indica la sua dimensione in energia, per esempio in $d=4$

$$[\varphi]=1\ ,\quad [m]=1,\quad [e]=0,\quad [A_\mu]=1,\quad [\psi]=\frac{3}{2}$$

Questo ci indica cosa succede sotto un riscalamento delle coordinate. Prendiamo la teoria φ^4:

$$S=\int d^4x\left[-\frac{1}{2}\varphi\left(\Box+m^2\right)\varphi+g\varphi^4\right]$$

L'azione classica è invariante sotto DILATAZIONI D

$$x^\mu\to\frac{1}{\lambda}x^\mu,\quad \partial_\mu\to\lambda\,\partial_\mu,\quad m\to\lambda^1 m,\quad g\to\lambda^0 g\ \text{ e }\ \varphi\to\lambda^1\varphi.$$

$$D:\ \left\{\begin{aligned}\varphi&\to\lambda^{d_0^\varphi}\varphi\\ g&\to\lambda^{d_0^g}g\\ m&\to\lambda^{d_0^m}m\end{aligned}\right\}$$

e d_0^x sono le DIMENSIONI CLASSICHE

Prendiamo una funzione di Green

$$G_n=\langle 0|T\{\varphi(x_1)\cdots\varphi(x_n)\}|0\rangle$$

A livello classico, può dipendere da oggetti in $\mathcal{L}$ a diverse potenze:

analisi dimensionale

$$G_n(x,g,m) \sim m^a g^b x_1^{c_1} \dots x_n^{c_n} \quad \text{e} \quad a - c_1 - \dots - c_n = n$$

$$\Rightarrow \quad G_n \to \lambda^n G_n$$

A livello quantistico, la teoria deve essere rinormalizzata e una dipendenza dalla scala di rinormalizzazione μ compare in G_n:

$$G_n(x,g,m) \sim m^a g^b x_1^{c_1} \dots x_n^{c_n} \mu^{-\gamma} \Rightarrow \left(\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \gamma\right) G_n = 0$$

Adesso: $\quad a - c_1 - \dots - c_n = n + \gamma$

Dato che μ non appare in S, non trasforma sotto dilatazioni D, quindi

$$G_n \to \lambda^{n+\gamma} G_n \quad \Leftarrow$$

A livello quantistico la dimensione di scaling di γ è cambiata.