

Osservabili (variabili dinamiche)

In meccanica classica, se conosco lo stato del sistema (\bar{p}, \bar{q}) , allora posso predire con certezza il risultato di una misura di un'osservabile $f(\bar{p}, \bar{q})$.

In meccanica quantistica, non lo stato del sistema, posso predire solo la probabilità di misurare un certo valore per l'osservabile.

Dato una VARIABILE DINAMICA (OSSERVABILE) essa deve essere descritta (in MQ) da un oggetto matematico che include sia i possibili risultati di una misura di tale osservabile (autovalori), sia gli stati corrispondenti ai singoli risultati (autostati) (cioè gli stati in cui ha prob. 1 di rimisurare il risultato corrispondente)

Stati \longleftrightarrow vettori in \mathcal{H}

Osservabili \longleftrightarrow OPERATORI in \mathcal{H}
(autoaggiunti)

Operatori X e P in $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} \langle X \rangle_{\psi} &= \int_{\mathbb{R}} x |\psi(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}} \psi^*(x) \cdot \underbrace{(x \psi(x))}_{(\hat{X}\psi)(x)} dx \\ &= (\psi, \hat{X}\psi) \quad \hat{X}: \psi(x) \mapsto x\psi(x) \end{aligned}$$

$$\langle P \rangle_{\psi} = \int_{\mathbb{R}} p |\tilde{\psi}(p)|^2 dp \quad \tilde{\psi}(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int dx e^{-ipx/\hbar} \psi(x)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} dp p \int_{\mathbb{R}} \frac{dx'}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{ipx'/\hbar} \psi(x')^* \int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{-ipx/\hbar} \psi(x) =$$

$$\frac{1}{2\pi\hbar} \int_{\mathbb{R}} dp \int_{\mathbb{R}} dx \int_{\mathbb{R}} dx' \psi(x')^* e^{ipx'/\hbar} \psi(x) \overset{pe^{-ipx/\hbar}}{\downarrow} i\hbar \frac{d}{dx} e^{-ipx/\hbar}$$

integrazione
in parti \rightarrow

$$= \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{\mathbb{R}} dx \int_{\mathbb{R}} dx' \int_{\mathbb{R}} dp \psi(x')^* e^{ipx'/\hbar} \left(-i\hbar \frac{d}{dx} \psi(x) \right) e^{-ipx/\hbar}$$

$$= \int_{\mathbb{R}} dx \int_{\mathbb{R}} dx' \psi(x')^* \left(i\hbar \frac{d}{dx} \psi(x) \right) \underbrace{\int_{\mathbb{R}} \frac{dp}{2\pi\hbar} e^{ip(x'-x)/\hbar}}_{\delta(x-x')}$$

$$= \int_{\mathbb{R}} dx \psi(x)^* \left(-i\hbar \frac{d}{dx} \psi(x) \right) = \int_{\mathbb{R}} dx \psi(x)^* \hat{P} \psi(x)$$

$$\Downarrow$$

$$\langle p \rangle_\psi = (\psi, \hat{P} \psi) \quad \hat{P} = -i\hbar \frac{d}{dx}$$

Dato un'osservabile A (op. autoadj. in $L^2(\mathbb{R})$),
il suo valore medio è

$$\langle A \rangle_\psi = (\psi, \hat{A} \psi)$$

\hat{X} e \hat{P} sono
operatori
autoaggiunti

Osservabile classica è una funz. di \bar{p} e \bar{q}
ma $f(x, p)$

Domanda: in meccanica quant. $f \rightarrow f(\hat{X}, \hat{P})$?

Sì, ma con attenzione.

↳ Es. se l'osserv. è $f(x, p) = xp$, l'operatore
associato è $\hat{X}\hat{P}$ o $\hat{P}\hat{X}$?

(ambiguità nell'associare un operatore
a una variabile dinamica classica)

Il problema è che \hat{X} e \hat{P} NON commutano:

$$[\hat{X}, \hat{P}] \cdot \psi = \hat{X}\hat{P}\psi - \hat{P}\hat{X}\psi =$$

$$= \hat{X} \left(-i\hbar \frac{d\psi}{dx} \right) - \hat{P} (x\psi(x))$$

$$= -i\hbar x\psi'(x) + i\hbar \frac{d}{dx} (x\psi(x)) =$$

$$= -i\hbar x\psi' + i\hbar\psi + i\hbar x\psi' = i\hbar \cdot \psi$$

$$\Rightarrow [\hat{X}, \hat{P}] = i\hbar \mathbb{1} \quad (1 \text{ dim})$$

In 3d $\psi(\bar{x}) \in L^2(\mathbb{R}^3)$ $\tilde{\psi}(\bar{p}) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \int d^3x e^{-i\bar{p}\cdot\bar{x}/\hbar} \psi(\bar{x})$

Abbiamo tre op. in tre coord. $\bar{x}(x, y, z) \leftrightarrow \hat{X} = (\hat{X}_1, \hat{X}_2, \hat{X}_3)$

$\hat{X}_i \psi(x) = \bar{x}_i \psi(\bar{x})$ $[\hat{X}_i, \hat{P}_j] = i\hbar \delta_{ij} \mathbb{1}$ (*)

$\hat{P}_i \psi(x) = -i\hbar \nabla_i \psi$ $[\hat{X}_i, \hat{X}_j] = 0 = [\hat{P}_i, \hat{P}_j]$

(*) : Analogia con le Parentesi di Poisson $(x_i \leftrightarrow q_i)$

$\{x_i, p_j\} = \delta_{ij}$ $\{x_i, x_j\} = 0 = \{p_i, p_j\}$

Passare da mecc. classica a TQ : \bar{x}, \bar{p} sostituiti da operatori, P.P. sostituiti da $\frac{1}{i\hbar} [,]$.

In meccanica classica

$\delta x = \epsilon \{x, G\}$

← generatore di trasf.

Se ora uso $G = P$, ottengo

$\delta x = \epsilon \{x, p\} = \epsilon \Rightarrow x' = x + \epsilon$

$\Rightarrow p$ è il generatore delle TRASLAZIONI

\hat{P} in meccanica quantistica è ancora il generatore di traslazioni infinitesime:

$\psi(x + \epsilon)$ è la traslazione di ψ sotto traslazioni

$\psi(x + \epsilon) = \psi(x) + \underbrace{\epsilon \psi'(x)}$

$\delta\psi = \frac{i\epsilon}{\hbar} \hat{P}\psi$

Facciamo la stessa cosa con \hat{M}_i (momento angolare)

otteniamo da la variaz. di ψ sotto rotot. e $\delta\psi = \frac{i\epsilon}{\hbar} \hat{M}_i \psi$
attorno ad x_i

Esempio di osservabili senza contributi :

1) Momento angolare

$$M_i = \sum_{kj} \epsilon_{ijk} x_j p_k \quad \longleftrightarrow \quad \hat{M}_i = \sum_{kj} \epsilon_{ijk} \hat{X}_j \hat{P}_k$$

in questi prodotti $j \neq k \Rightarrow [\hat{X}_i, \hat{P}_k] = 0$ commutano

2) Sistemi meccanici con V dip. da \bar{x} , mes. puntuali

$$H = \frac{\bar{p}^2}{2m} + V(\bar{x}) \quad \longleftrightarrow \quad \hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x})$$

$$\hat{p}^2 = \hat{p}_1^2 + \hat{p}_2^2 + \hat{p}_3^2$$

↓

Eq. di Schrödinger diventa

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\bar{x}, t) = \hat{H} \psi(\bar{x}, t)$$

ci dice che \hat{H} è il generatore di traslazioni temporali

$$\hat{p} = -i\hbar \bar{\nabla} \quad \Rightarrow \quad \hat{p}^2 = -\hbar^2 \nabla^2$$

$$\hat{H} \psi = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\bar{x}) \right) \psi$$

$\hat{H}, \hat{p}, \hat{M}$ generano le stesse transf. che generano in meccanica classica