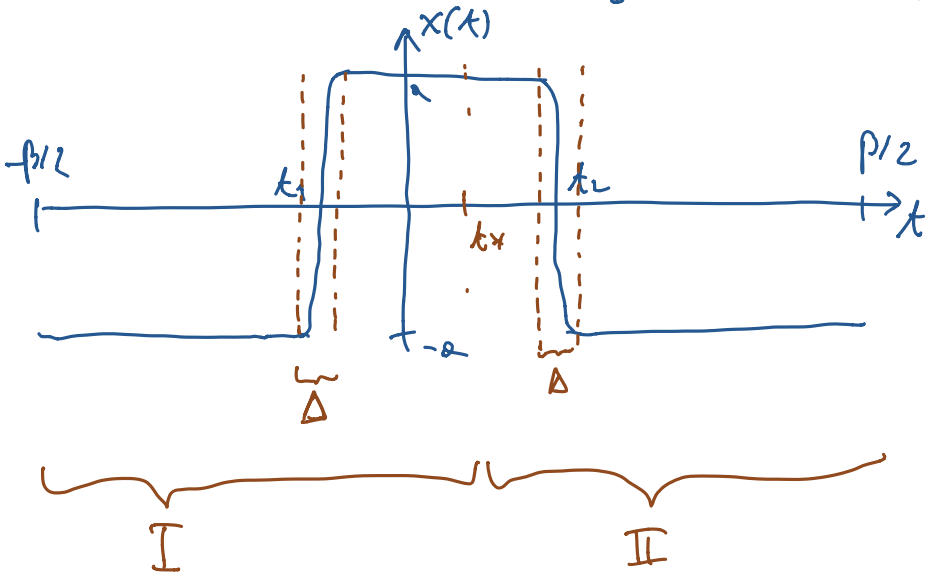


Consideriamo il caso $n_I = 1$ e $n_A = 1$



$$|t_2 - t_1| \gg \Delta$$

$$t_i^\pm \equiv t_i \pm \Delta$$

$$x_i^\pm = x(t_i \pm \Delta)$$

$$K(-a, a; \beta/2, -\beta/2) = \int dx_1^- dx_1^+ dx_2^- dx_2^+ .$$

$$\cdot K_{\textcircled{1}}(-a, -x_2^+; \beta/2, t_2^+) \cdot K(x_2^+, x_2^-; t_2^+, t_2^-)$$

$$\cdot K_{\textcircled{2}}(x_2^-, x_1^+; t_2^-, t_1^+) \cdot K(x_1^+, x_1^-; t_1^+, t_1^-)$$

$$\cdot K_{\textcircled{3}}(x_1^-, -a; t_1^-, -\beta/2)$$

Assunzione $|t_2 - t_1| \gg 1/\omega$ $\Delta \gg 1/\omega$

\Rightarrow ①, ②, ③ possono essere approssimate (espansione in \hbar)
da K dell'oscillatore armonico

(in effetti notiamo che in questi intervalli temporali
la fun. $x(t)$ è sempre vicina a un minimo
del potenziale)

Il K dell'osc. armonico, per separazione temporale $(t_f - t_i)$ grande,
è dominato dal ground state

$$\langle x_f | e^{-T\hbar^{-1}H} | x_i \rangle = \sum_n \psi_n(x_f) \psi_n(x_i)^* e^{-TE_n/\hbar} \quad E_n^{0.a.} > 0$$

$$\mu \quad T \text{ grande } (T \gg \frac{\hbar}{E_1 - E_0}) \quad \downarrow \quad \approx \psi_0(x_f) \psi_0(x_i)^* e^{-TE_0/\hbar} \cdot (1 + O(e^{-T(E_1 - E_0)/\hbar}))$$

$$\textcircled{2} : K(x_2^-, x_1^+; t_2^-, t_1^+) = \langle x_2^- | e^{-H^{0,a}(t_2^- - t_1^+)/\hbar} | x_1^+ \rangle \approx$$

$$\approx e^{-\frac{\omega}{2}(t_2^- - t_1^+)} \psi_{0,+}^*(x_2^-) \psi_{0,+}(x_1^+)$$

↑ o.e. attorno al min. +a
($\psi_{0,+}$ è Gaussiana centrata in $x=+a$)

Possiamo approssimare analiticamente $\textcircled{1}, \textcircled{3}$

$$K(-a_1 - a; \beta/2_1 - \beta/2) \approx \int dx_1^- dx_1^+ \int dx_2^- dx_2^+ |\psi_{0,-}(-a)|^2 e^{-\omega\beta/2}$$

$$\psi_{0,-}(x_2^+) \psi_{0,+}^*(x_2^-) \psi_{0,+}(x_1^+) \psi_{0,-}^*(x_1^-)$$

$$e^{\frac{\omega}{2}[(t_2^+ - t_2^-) + (t_1^+ - t_1^-)]}$$

$$K(x_2^+, x_2^-; t_2^+, t_2^-) \cdot K(x_1^+, x_1^-; t_1^+, t_1^-)$$

$$= \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/2} e^{-\omega\beta/2} R^2$$

$$R = \int dx^- dx^+ e^{\frac{\omega}{2}(t^+ - t^-)} \psi_{0,+}(x^+) \psi_{0,-}^*(x^-) K(x^+, x^-; t^+, t^-)$$

↓
si calcola considerando le soluzioni a 1 istante.

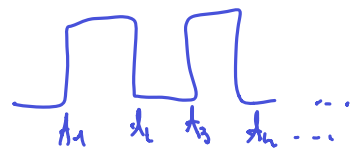
$$K(\pm a, -a; \beta/2, -\beta/2) = \sum_{\substack{x_{\min} \text{ di } S \\ \text{con condiz. al bordo} \\ x(\beta/2) = \pm a \\ x(-\beta/2) = -a}} e^{-S(x_{\min})} \int D'y e^{-S^{(2)}/\hbar}$$

$$e^{-S(x_{\min})/\hbar} = e^{-N S_{I/\hbar}} = (e^{-S_{I/\hbar}})^N \quad N = n_I + n_A$$

$$\int D'y e^{-S^{(2)}/\hbar} = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{N/2} e^{-\beta\omega/2} R^N$$

Devo integrare sugli zero-modi (per 1 ist. $\int dt_0$);

$$\int_{-\beta/2}^{\beta/2} dt_N \int_{-\beta/2}^{t_N} dt_{N-1} \dots \int_{-\beta/2}^{t_2} dt_1$$



$$\int D'y e^{-S^{(2)}/\hbar} = \int_{-\beta/2}^{\beta/2} dt_N \int_{-\beta/2}^{t_N} dt_{N-1} \dots \int_{-\beta/2}^{t_2} dt_1 \int D'y e^{-S^{(2)}/\hbar} =$$

$$= \frac{\beta^N}{N!} \int D'y e^{-S^{(2)}/\hbar}$$

$\Rightarrow N \text{ \u00e8 pari}$

$$\langle -a | e^{-\beta H/\hbar} | -a \rangle = \sum_{- \dots \dots} \dots \approx \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{N/2} e^{-\beta\omega/2} \sum_{N \text{ pari}} \frac{(\text{Re } e^{-S_I/\hbar} \beta)^N}{N!} \quad (*)$$

$$\langle +a | e^{-\beta H/\hbar} | -a \rangle = \sum_{\dots \dots} \dots \approx \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{N/2} e^{-\beta\omega/2} \sum_{N \text{ dispari}} \frac{(\text{Re } e^{-S_I/\hbar} \beta)^N}{N!}$$

↓

$$\langle \pm a | e^{-\beta H/\hbar} | -a \rangle \approx \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar} \right)^{1/2} e^{-\beta\omega/2} \frac{1}{2} \left(e^{Re^{-S_I/\hbar}\beta} + e^{-Re^{-S_I/\hbar}\beta} \right)$$

Ricordiamo

$$= \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar} \right)^{1/2} \frac{1}{2} \left[e^{-\frac{\beta}{\hbar} \left(\frac{\hbar\omega}{2} + \hbar Re^{-S_I/\hbar} \right)} + e^{-\frac{\beta}{\hbar} \left(\frac{\hbar\omega}{2} - \hbar Re^{-S_I/\hbar} \right)} \right]$$

↑
 E_1

↑
 E_0

$$= \sum_n \psi_n^*(\pm a) \psi_n(-a) e^{-\beta E_n/\hbar}$$

Prendiamo limite $\beta \rightarrow \infty$

$$\psi_0^*(\pm a) \psi_0(-a) e^{-\beta E_0/\hbar} + \psi_1^*(\pm a) \psi_1(-a) e^{-\beta E_1/\hbar} + \dots$$

$$E_0 = \frac{\hbar\omega}{2} - \hbar Re^{-S_I/\hbar}$$

$$E_1 = \frac{\hbar\omega}{2} + \hbar Re^{-S_I/\hbar}$$

$$\psi_0^*(\pm a) \psi_0(-a) = \frac{1}{2} \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar} \right)^{1/2} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \psi_0^{o.a.}(0) \right)^2$$

$$\psi_1^*(\pm a) \psi_1(-a) = \mp \frac{1}{2} \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar} \right)^{1/2} = \mp \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \psi_0^{o.a.}(0) \right)^2$$

$$\psi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\psi_0^{o.a.}(x+a) + \psi_0^{o.a.}(x-a) \right] \leftrightarrow E_0$$

$$\psi_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\psi_0^{o.a.}(x+a) - \psi_0^{o.a.}(x-a) \right] \leftrightarrow E_1$$

$$E_1 - E_0 = 2\hbar R e^{-S_I/\hbar} = 2\hbar R e^{-2/\lambda} =$$

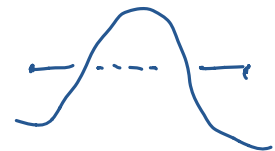
$$= 2\hbar \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/2} \tilde{v} e^{-2/\lambda} = 2\hbar \left(\frac{12}{\pi\lambda}\right)^{1/2} e^{-2/\lambda}$$

- Istantoni sono un elemento essenziale nelle correzioni non-perturbative! In particolare, il peso della corr. non-pert. è $e^{-S[\text{inst.}]/\hbar}$ (importante conoscere il dettaglio delle soluz. ist.)

INSTANTONI & EFFETTO TUNNEL

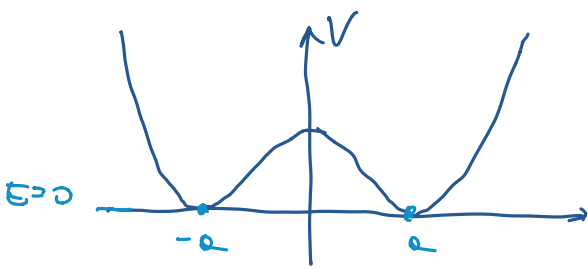
Effetto tunnel è proibito in meccanica classica, ma permesso in meccanica quantistica.

Non c'è nessuna soluzione (Minkowskiana)



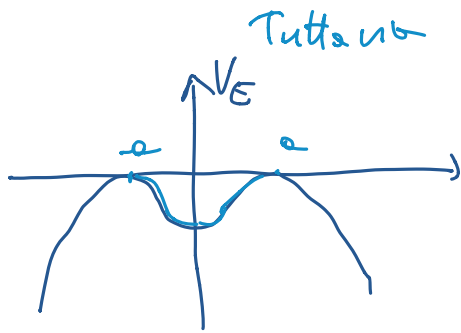
classica che approssima una transizione di tipo tunneling (e che quindi dovrebbe l'ampiezza di transizione in approssim. semiclassica $\propto e^{iS[\text{Xca}]/\hbar}$ Minkowski)

Se consideriamo il P.I. Euclideo, le soluz. delle eq. del moto relative all'azione Euclidea (INSTANTONI) permettono una buona approssim. semiclassica per la transizione di tunneling.



transit. da $-a$ ad a

- classica. non è permessa (think.)
 \rightarrow non esistono traiettorie classiche da $-a$ ad a .



la soluz. istantanea da contributi dominanti al p.l. Euclideo.

\Rightarrow nel tempo Euclideo, il ground state corrisponde a MASSIMI di V_E

\Rightarrow ci sono soluz. valide da intepolano da $-a$ ad a .

$$f(t) = \langle -a | e^{-iHt/\hbar} | a \rangle = \int \mathcal{D}x e^{iS_E[x]/\hbar}$$

$t \rightarrow i\beta$

$$\tilde{f}(\beta) = \langle -a | e^{-\beta H/\hbar} | a \rangle = \int \mathcal{D}x e^{-S_E[x]/\hbar} \approx e^{-S_E[x_{ist.}]/\hbar} \cdot \det(\dots)$$

int. d. β

buona appross. per $f(t)$.

continuità analitica $\beta \rightarrow it$

- Istantanei permettono di calcolare ampiezza di transizione tunneling con approssimazione semiclassica.

~~1/6~~

3/6

8/6

10/6