SISTEMI DINAMICI

- LEZIONE DEL 27 MAGGIO 2020
- PRIMA PARTE

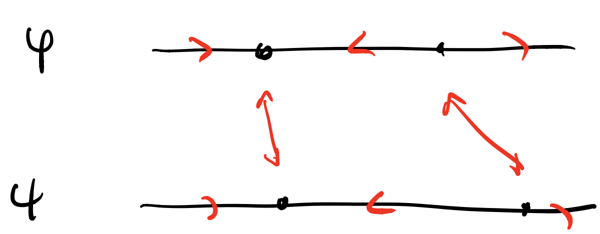
Quando due sistemi dinamici descrivono lo stesso fenomeno naturale?

$\varphi_t : A \to A$, $\psi_t : B \to B$ sono topologicamente coniugati se $\exists\ h : A \to B$

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\varphi_t} & A \\ h \downarrow & & \downarrow h \\ B & \xrightarrow{\psi_t} & B \end{array}$$

h omeomorfismo

Flussi 1-dim



$\varphi_t : A \to A$

$\psi_t : B \to B$

diffeomorfi

h diffeo

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\varphi_t} & A \\ h \downarrow & & \downarrow h \\ B & \xrightarrow{\psi_t} & B \end{array}$$

Teorema (Coniugazione lineare)

Consideriamo i flussi φ_t, ψ_t di due sistemi lineari $\dot{x} = Ax$, $\dot{y} = By$. Allora φ_t e ψ_t sono diffeomorfi $\Leftrightarrow$ A è simile a B.

Dim Assumiamo A & B simili $\Rightarrow \exists H$ non singolare tale che $HA = BH$

Poniamo $h(x) = Hx$

$$h(\varphi_t(x)) = He^{tA}x \underset{\substack{\uparrow \\ \text{exp matrice}}}{=} e^{tHAH^{-1}}Hx =$$

$$= e^{tB}h(x) = \psi_t(h(x))$$

Supponiamo di avere un diffeo g tale che

$$g(\varphi_t(x)) = \psi_t(g(x)) \Leftarrow$$

L'origine è pto fisso di φ. Poniamo $g(0) = c$. Allora $g(\varphi_t(0)) = c = \psi_t(c)$ quindi c è un punto fisso di ψ.

Definiamo $h(x) = g(x) - c$ $\quad (h(0) = 0)$

$$h(\varphi_T(x)) = \psi_T(g(x)) - c =$$

$\uparrow \psi_T(y) = e^{TB} y$

$$= \psi_T(h(x) + c) - c$$

$\psi_T(c) = c$

$$= \psi_T(h(x))$$

Per finire definiamo $H = Dh(0)$

Deriviamo l'eq. precedente rispetto ad x

e poniamo $x = 0$

$$\left[\frac{d}{dx} \left(H e^{TA} x \right) = \frac{d}{dt} \left(e^{TB} H x \right) \right] \Big|_{x=0}$$

$$\frac{d}{dx} \left(h(\varphi_T(x)) = \psi_T(h(x)) \right) \Big|_{x=0}$$

$$\to H e^{TA} = e^{TB} H$$

(se deriviamo rispetto a T e poi poniamo $T = 0$) implica $HA = BH$ ∎

Concludiamo con un risultato fondamentale che rende precisa l'intuizione che il comportamento di un sistema non-lineare vicino ad un punto iperbolico è equivalente a quello della sua linearizzazione.

<u>Teorema</u> (Hartman - Grossman)

Sia x^* un punto di equilibrio <u>iperbolico</u> di un campo vettoriale $f(x)$ (C^1) con flusso $\varphi_t(x)$. Allora $\exists$ un intorno N di x^* tale che φ è topologicamente coniugato alla sua linearizzazione su N.

<u>Dim</u> [Sketch]

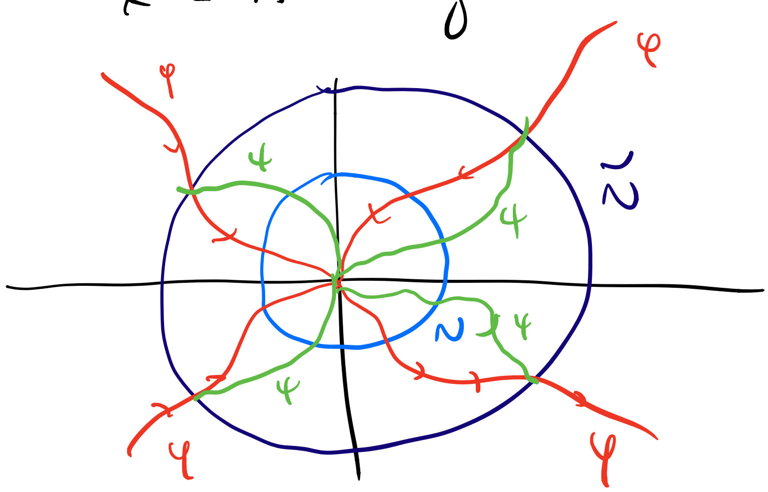
Prendiamo $\dot{x} = Ax + g(x)$

Eq lineare $\psi_t(x) = e^{tA} x$

Ritultato locale : modifichiamo l' eq. diff

$$\tilde{g}(x) = \begin{cases} g(x) & \text{in un intorno } \tilde{N} \text{ di } 0 \\ 0 & \text{fuori da } \tilde{N} \end{cases} \quad (N \subset \tilde{N})$$

$$\dot{x} = Ax + \tilde{g}(x)$$



Vogliamo dimostrare che $\exists$ h omeomorfismo

$$\varphi_\tau(h(x)) = h(\varphi_\tau(x))$$

$$\Rightarrow \quad h(x) = e^{-\tau A} \circ h \circ \varphi_\tau(x)$$

Supponiamo di avere H_1 che soddisfa questa relazione per $\tau = 1$

$$H_1(x) = e^{-A} H_1(\varphi_1(x))$$

supponiamo di poter dimostrare che H_1 è unico. Poniamo $H_\tau(x) = e^{-\tau A} \circ H_1 \circ \varphi_\tau(x)$

Per calcolo diretto:

$$e^{-A} \circ H_\tau \circ \varphi_1(x) = e^{-A} \circ e^{-\tau A} \circ H_1 \circ \varphi_\tau \circ \varphi_1(x)$$

$$= e^{-\tau A} \circ e^{-A} \circ H_1 \circ \varphi_1 \circ \varphi_\tau(x)$$

proprietà gruppali $\quad H_1 = e^{-A}(H_1(\varphi_1(x)))$

$$= e^{-\tau A} \circ H_1 \circ \varphi_\tau(x) = H_\tau$$

Quindi H_τ soddisfa lo stesso relazione di H_1

$$H_1 = e^{-\tau A} \circ H_1 \circ \varphi_\tau(x) \quad \text{anche per } \tau \neq 1$$

$\Downarrow$

$H_1 = H_\tau$

Il problema è trovare H_1.

Poniamo $H_1^{(0)}(x) = x$ e definiamo

$$H_1^{(i+1)}(x) = e^{-A} \circ H_1^{(i)} \circ \varphi_1(x)$$

$i = 0, 1, \ldots$

dimostrare che questa iterazione converge $\blacksquare$

SISTEMI DINAMICI

– LEZIONE DEL 27 MAGGIO 2020

– SECONDA PARTE

Abbiamo visto che per sistemi lineari gli spazi E^s, E^u sono invarianti

$\longrightarrow$ generalizzazione per sistemi non-lineari iperbolici $\longrightarrow$ varietà invarianti

Sia Λ un insieme invariante

$$W^s(\Lambda) = \{ x \notin \Lambda \ : \ \varphi_t(x) \xrightarrow[t \to +\infty]{} \Lambda \}$$

insieme stabile (o bacino di attrazione)

$$W^u(\Lambda) = \{ x \notin \Lambda : \varphi_t(x) \xrightarrow[t \to -\infty]{} \Lambda \}$$

insieme instabile (o bacino di repulsione)

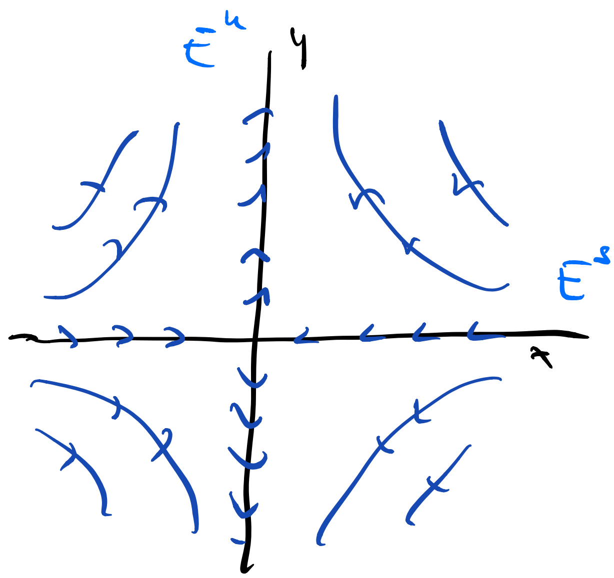
In particolare $W^s(\Lambda)$, $W^u(\Lambda)$ sono insiemi invarianti: se $z \in W^s(\Lambda)$, per definizione $\varphi_s(z)$ ha la proprietà che $\forall s \in \mathbb{R}$

$\varphi_t(\varphi_s(z)) = \varphi_{s+t}(z) \longrightarrow \Lambda$, per $t \to \infty$

$\Rightarrow \varphi_s(z) \in W^s(\Lambda)$

<u>Esempio</u> Consideriamo

$$\begin{cases} \dot{x} = -x \\ \dot{y} = y + x^2 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \dot{x} = -x \\ \dot{y} = y \end{cases}$$



Sistema lineare ha autovalori ± 1

asse x : E^s sottospazio stabile

asse y : E^u sottospazio instabile

Troviamo W^s e W^u nel sistema non-lineare

$$\begin{cases} \dot{x} = -x \\ \dot{y} = y + x^2 \end{cases}$$

W^u è ancora l'asse y: se $x_0 = 0$

allora $\dot{x} = -x$ è risolto da $x(t) = x_0 e^{-t} = 0$

$\dot{y} = y + x^2 = y$ è risolto da $y(t) = y_0 e^{t}$

Quindi $y(t) \xrightarrow[\text{per } t \to -\infty]{} 0$

Cerchiamo W^s. Supponiamo di prendere dati iniziali $(x_0, y_0) \in W^s$

$\dot{x} = x \quad \rightarrow \quad x(t) = x_0 e^{-t}$

$\dot{y} = y + x^2 = y + x_0^2 e^{-2t}$

Trucco: $\dfrac{d}{dt}\left(e^{-t} y(t)\right) = e^{-t}\dot{y} - y e^{-t}$

$= e^{-t}(\dot{y} - y) = x_0^2 e^{-3t}$

Quindi (integrando)

$$e^{-t} y(t) = y_0 + \int_0^t x_0^2 e^{-3\tau} \, d\tau$$

$$= y_0 + \frac{x_0^2}{3}\left(1 - e^{-3T}\right) =$$

$$= \left(y_0 + \frac{x_0^2}{3}\right) - \frac{x_0^2}{3} e^{-3T}$$

Vediamo che prendendo

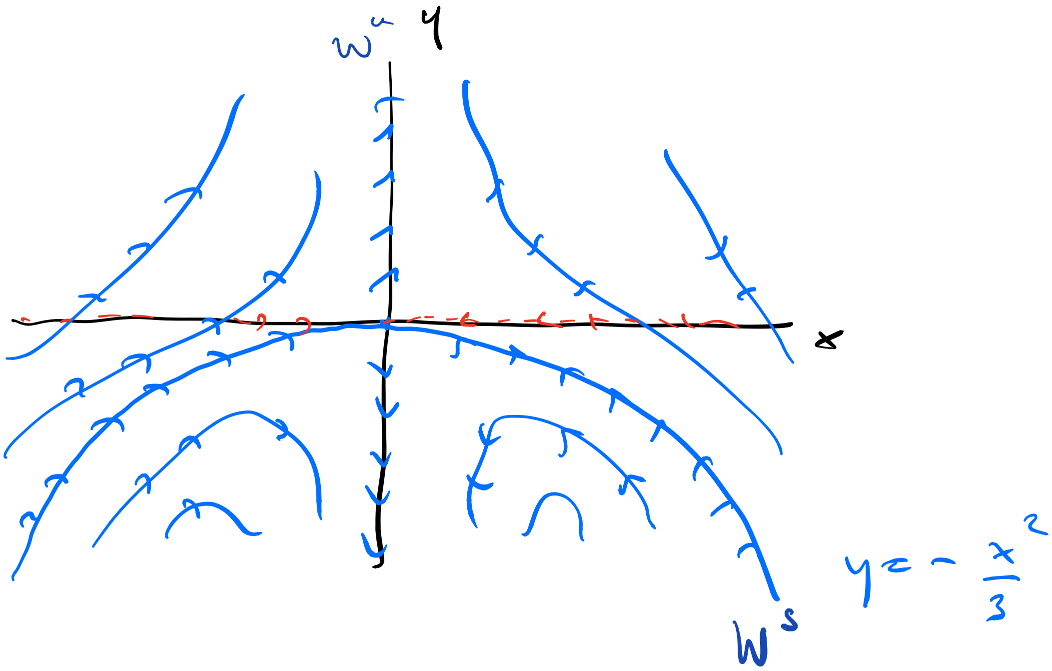
$$W^s = \left\{ (x,y) \;\middle|\; y = -\frac{x^2}{3} \right\}$$

abbiamo $y_0 + \frac{x_0^2}{3} = 0$ per il dato iniziale

e la soluzione

$$(x,y) = \left(x_0 e^{-T}, -\frac{x_0^2}{3} e^{-2T} \right)$$ rimane

su W^s e tende a $(0,0)$ per $T \to +\infty$

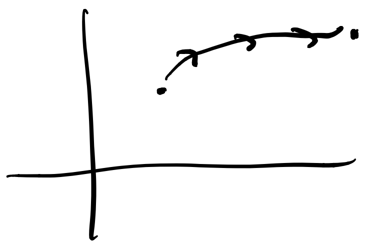


E^s è tangente a W^s

Def Un orbita Γ si dice eteroclina

se ogni $x \in \Gamma$ tende asintoticamente il avanti ad un insieme invariante B

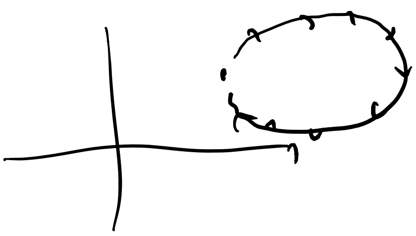
e asintoticamente indietro ad un insieme invariante A, cioè $\Gamma \subset W^u(A) \cap W^s(B)$



Ad esempio nel piano connette due punti sella

<u>Def</u> Γ si dice omoclino se

$$\Gamma \subset W^u(A) \cap W^s(A)$$



<u>Esempio</u> Orbite omocline sono tipiche dei sistemi hamiltoniani

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x^3 + x \end{cases} \qquad H(x,y) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + \frac{1}{4}$$

Equilibri: $(0,0)$ $\quad$ $(+1,0)$ $\quad$ $(-1,0)$

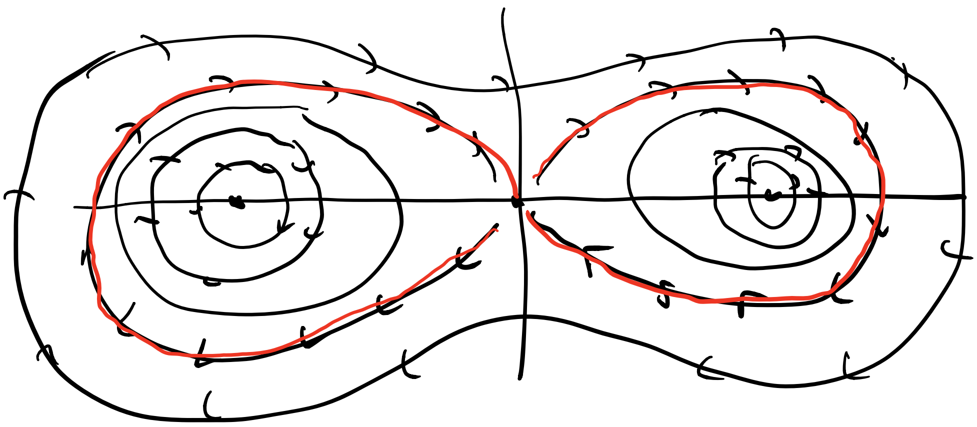
$H = \frac{1}{4}$ $\quad$ $H=0$ $\quad$ $H=0$

Linearizziamo

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-3x^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$(0,0)$: autovalori $\pm 1 \longrightarrow$ sella

$(\pm 1, 0)$: autovalori $\pm\sqrt{2}\,i \longrightarrow$ centro



$H(x,y) = \text{cost.}$

le omocline tendono a $(0,0)$ per $t \to \pm\infty$

Sotto determinate condizioni gli insiemi invarianti sono varietà differenziabili.

f campo vettoriale (C^1), x^* pto iperbolico

$A = Df(x^*)$. Cambiando variabile

$x \longrightarrow x + x^*$

$$\dot{x} = Ax + g(x)$$

$$\left(g(x) = f(x + x^*) - Ax, \quad g(0) = 0, \ Dg(0) = 0 \right)$$

<u>Teorema</u> (della varietà stabile locale)

Sia A iperbolica. $g \in C^k$ $(k \geq 1)$, U intorno di 0 punto fisso.

(supponiamo $g(x) = o(x)$ per $x \to 0$)

Siano E^s, E^u sottospazi stabile e instabile di A. Allora $\exists$ intorno $\tilde{U} \subset U$ t.c.

$$W^{(s)}_{(loc)}(0) = \{x \in W^s(0) : \varphi_t(x) \in \tilde{U} \quad t \geq 0\}$$

è una varietà differenziabile (è un grafico di Lipschitz) C^k, tangente a E^s in 0, $T_0 W^s_{loc}(0) = E^s$

[dim 2D Hirsch Smale, Devaney]

Problema : $W^s(x^*) = \bigcup_{t \geq 0} \varphi_{-t}(W^s_{loc}(x^*))$

$\hookrightarrow$ varietà stabile globale

quale è la sua struttura