

SISTEMI DINAMICI

- LEZIONE DEL 28 MAGGIO 2020

- PRIMA PARTE

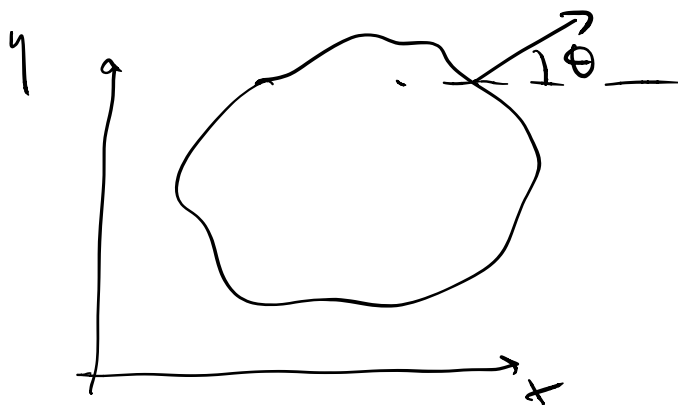
PIANO DELLE FASI

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y) \\ \dot{y} = Q(x, y) \end{cases}$$

Alcuni esempi e tecniche topologiche

Sia $\gamma: S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva chiusa

in un campo vettoriale $f = (P, Q)$



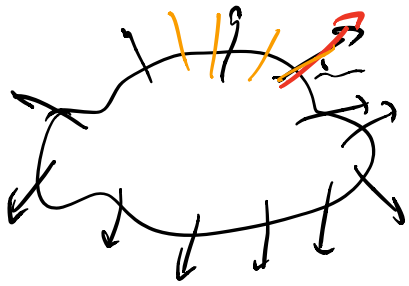
θ angolo tra
f e una delle x

$$\tan \theta = \frac{Q}{P}$$

Def Data una curva chiusa γ e un campo vettoriale, l'indice (di Poincaré)

$$I_\gamma(f) := \frac{\Delta\theta}{2\pi}$$

il numero intero di rotazioni che il vettore f compie mentre si muove lungo γ , fino a tornare al punto di partenza $\Delta\theta$ è il cambiamento netto dopo un giro



"il numero di giri di questo vettore"

$$\tan \theta = \frac{Q}{P} \quad \leftarrow \text{differenziale}$$

$$\sec^2 \theta \, d\theta = \frac{P \, dQ - Q \, dP}{P^2}$$

$$\tan \theta = \frac{Q}{P} \quad \rightarrow \quad \sec^2 \theta = 1 + \left(\frac{Q}{P}\right)^2$$

$$I_\gamma(f) = \frac{1}{2\pi} \oint_\gamma d\theta = \left| \frac{1}{2\pi} \oint_\gamma \frac{P \, dQ - Q \, dP}{P^2 + Q^2} \right|$$

Proprietà molto importante: se la funzione è continuamente lo zero γ , senza attraversare

un punto di equilibrio ($P^2 + Q^2 = 0$)

l'indice non cambia.

Allo stesso modo, se teniamo fissa f ,
ma variamo il campo vettoriale in maniera
continua, l'indice non cambia.

Il motivo è che l'indice è una
funzione continua, ma può prendere
solamente valori interi \Rightarrow quindi è
una costante.

Teorema A matrice non singolare, $\dot{x} = Ax = f(x)$

Sia γ una curva chiusa che racchiude
l'origine (orientata in senso orario)

Allora: $I_\gamma(f) = \text{sgn det } A$

Dim A non singolare, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tali

che $ad \neq 0$ o $bc \neq 0$. Partiamo A in
una delle due forme

$$\begin{pmatrix} \text{sgn } a & 0 \\ 0 & \text{sgn } d \end{pmatrix} \text{ o } \begin{pmatrix} 0 & \text{sgn } b \\ \text{sgn } c & 0 \end{pmatrix}$$

Scegliamo la curva, Portiamo f nel
cerchio unitario intorno all'origine

$$I_{\gamma}(f) = \frac{1}{2\pi} \oint_C \text{sgn } a \text{ sgn } b \frac{y dx - x dy}{y^2 + x^2}$$

$$\begin{pmatrix} P \rightarrow \text{sgn } a \cdot x \\ Q \rightarrow \text{sgn } b \cdot y \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\text{sgn } a \text{ sgn } b}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta}{r^2} d\theta =$$

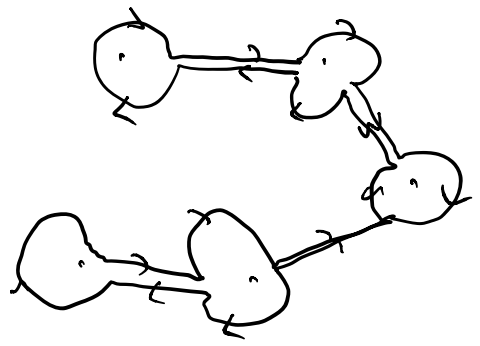
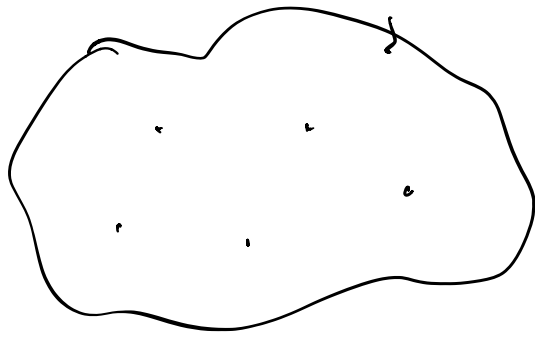
$$= \text{sgn } a \cdot \text{sgn } b = \text{sgn } \det A$$

$$(\text{sgn } a \text{ sgn } b)$$

Teorema Se la curva γ non contiene
punti critici $\rightarrow I_{\gamma}(f) = 0$.

Def Polinomio irriducibile f finito il
campo razionale \mathbb{Q} è una costante su f .
 \rightarrow il campo razionale punto nello stesso
di direzione \rightarrow l'indice τ zero per definizione

Non vale il viceversa! $I = 0$ non implica
che non ci siano punti di eq. dentro la curva



i contributi \rightleftharpoons si cancellano nel totale

Quindi $I_{\mathcal{D}}(f) = \sum_i I_{x_i}(f)$

x_i : punto di eq
i-esimo
(isolato)

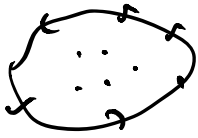
$I_{\mathcal{D}} = 0$ ~~non~~ non ci sono f°
di equilibrio

Teo Se γ è un'orbita periodica di
 f , allora $I_{\mathcal{D}}(f) = +1$

Dim segue dal fatto che se f è un'orbita
periodica, allora f è sempre tangente \square

Corollario: ogni orbita periodica
contiene almeno un punto di equilibrio

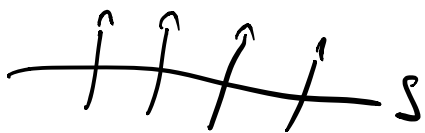




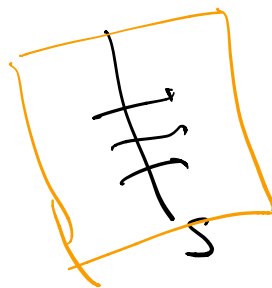
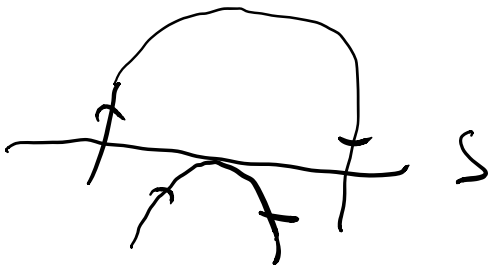
Teorema (Poincaré - Bendixon)

Sia φ_t un flusso su \mathbb{R}^2 , $D \subset \mathbb{R}^2$ un sottoinsieme chiuso, limitato e invariante in avanti. Allora $\forall x \in D$, l'insieme ω -limita $\omega(x)$ o contiene un punto di equilibrio o è una traiettoria periodica

Alcuni preliminari: diciamo che un arco S è una regione traversa al flusso φ_t se è traversa a $f(x) \forall x \in S$ ($f(x) \neq 0 \rightarrow \exists$ sempre una regione traversa)

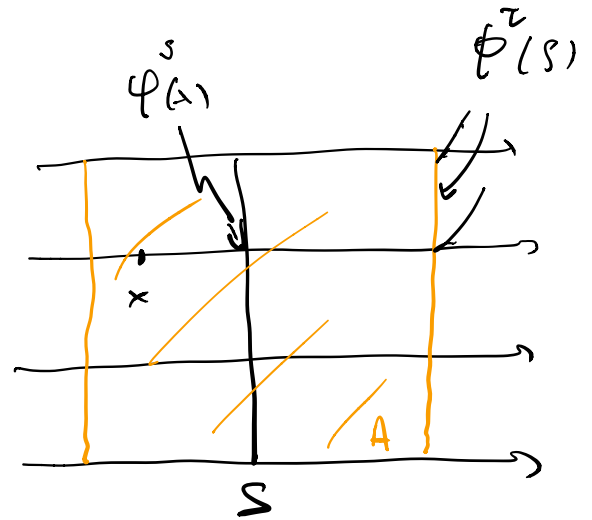


Le traiettorie tagliano S nello stesso verso



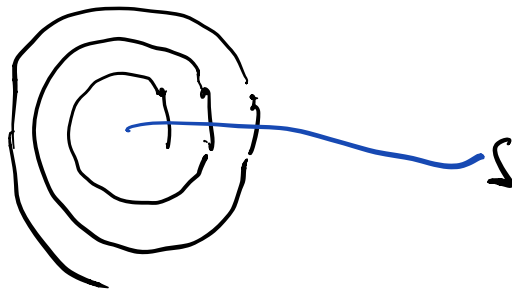
Per ε sufficientemente piccolo, costruiamo
 il intorno cilindrico

$$A = \bigcup_{|t| < \varepsilon} \phi^\sigma(S)$$



Lemma 1: Se ϕ^σ taglia una retta
 trovando le $t_1 < t_2 < \dots$, allora le
 intersezioni $\phi^{t_j}(x)$ sono successione monotona

Dim



segue dal fatto
 che le proiezioni
 non si intersecano

$$\{ \phi^{t_j} \}_{j=1}^{\infty} \quad t_1, t_2, \dots$$

$x_j \rightarrow$ successione di punti su S



Lemma 2 Se $y \in S$ e anche $y \in \omega(t)$
 Allora y è l'unica intersezione di

$\omega(t)$ con S .

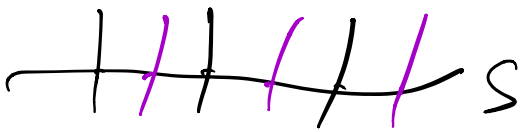
Dim Per ogni $y' \in \omega(t) \cap S$ ($y' \neq y$)

$$\{T_u\} \quad \{T'_u\} \quad : \quad \varphi_{(t)}^{T_u} \rightarrow y, \quad \varphi_{(t)}^{T'_u} \rightarrow y'$$

$\begin{matrix} \text{"} \\ x_u \end{matrix}$ $\begin{matrix} \text{"} \\ x'_u \end{matrix}$

Per valori piccoli di T tali che
 x_u e x'_u sono in un intorno cilindrico
di S

\rightarrow non è restrittivo supporre che tutti
i x_u e x'_u siano su S (eventualmente
modificando i valori $\{T_u\}$ e $\{T'_u\}$)



Da $\{T_u\}$ e $\{T'_u\}$
possiamo trovare
 $\{T''_u\}$ tale

che $\varphi_{(t)}^{T''_u}$ oscilla lungo S , in
contraddizione con Lemma 1.

Dim [P-B] Se $\omega(t)$ non contiene punti
di equilibrio, $y \in \omega(t)$, allora neanche
 $\omega(y) \subset \omega(t)$ contiene punti di equilibrio

Prendiamo $z \in \omega(y)$ e S sereno

Trovare che contiene z

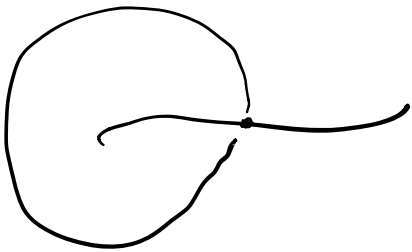
Prendiamo $\{T_n\}$, $\varphi^{T_n}(y) \rightarrow z$

(assumiamo che $\{\varphi^{T_n}(y)\}$ giacano in S)

Lemma 2 \rightarrow Tutti i $p \in \varphi^{T_n}(y)$ sono

in $\omega(x)$ e inoltre $z \in \omega(x)$ ($\omega(y) \subset \omega(x)$)

Tuttavia per il lemma 2 l'intersezione
di $\omega(x)$ con S è unica \Rightarrow tutti questi
punti coincidono con z e quindi
lo flowline di f



è periodica

Chiamando γ

$\rightarrow \gamma$ è contenuto in $\omega(x)$

Dimostrano che $\lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}(\varphi^t(x), \gamma) = 0$

γ , S trovare $y \in \omega(x)$

$\{T_n\}$ tali che $x_n := \varphi^{T_n}(y) \rightarrow y$

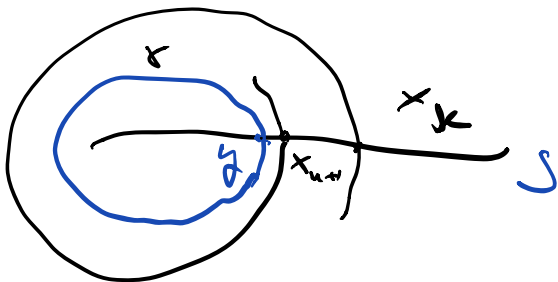
(come primo $x_n \in S$, e anche

$\varphi^T(x) \notin S$ quando $\tau_n < \tau < \tau_{n+1}$)

Per le grande : x_n è arbitrariamente vicino a $y \Rightarrow \tau_{n+1} - \tau_n$ è vicino al periodo T di f . ($\varphi^T(x_n)$ è vicino a y)

In questo intervallo la distanza $\varphi^T(x_n)$ e $\varphi^T(y)$ è limitata da costante $\times \text{dist}(y, x_n)$

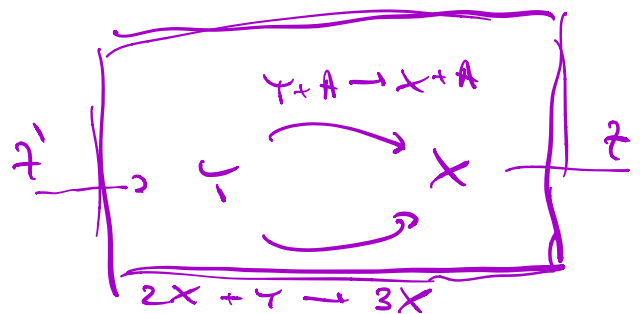
$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \text{dist}(\varphi^T(x_n), y) = 0$



Applications

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + ay + x^2y \\ \dot{y} = b - ay - x^2y \end{cases}$$

$a, b > 0$

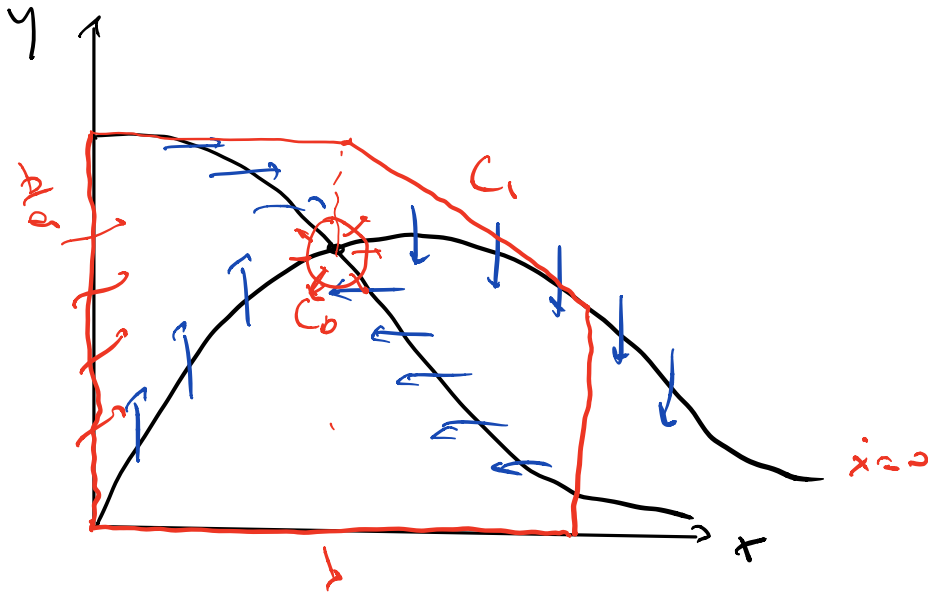


$$\dot{x} = 0 \rightarrow y = \frac{x}{a+x^2}$$

$$\dot{y} = 0 \rightarrow y = \frac{b}{a+x^2}$$

Pfo unico

$$(x^*, y^*) = \left(b, \frac{b}{a+b^2}\right)$$



$$D = C_1 \cup C_0$$

le fluss è entrante

su



$$x=0 \quad ; \quad \begin{cases} \dot{x} = ay \\ \dot{y} = b - ay \end{cases}$$

> 0 verso destra

> 0
per $y < \frac{b}{a}$ verso l'alto

Pfo di equilibrio

$$\begin{pmatrix} -1 + 2xy & a+x^2 \\ -2+y & -a-x^2 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} \frac{-a+b^2}{a+b^2} & a+b^2 \\ \frac{-2b^2}{a+b^2} & -a-b^2 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \det = a+b^2 > 0$$

$$\Gamma_2 = \frac{-a+b^2 - (a+b^2)^2}{a+b^2}$$

$$r_2 > 0 \quad \text{per} \quad 0 \leq e < \frac{1}{2} \left(-1 - 2b^2 + \sqrt{1 + 2b^2} \right)$$

→ per questi valori: fuoco o nodo
instabile

$D = C_0 \cup C_1 \rightarrow$ invariante in $\omega = \dot{\phi}$ e
punto di pt. di eq.

\Rightarrow P.B \rightarrow orbita periodica