Eq. di Sch. per sistemi unidimensionali.

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(x,t) = \Big(\overbrace{-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V}^{\hat{H}}\Big)\Psi(x,t)$$

Soluz. part.: $\Psi(x,t) = \psi(x)\,\varphi(t)$

$$\varphi(t) = e^{-iEt/\hbar}$$

$$\hat{H}\psi(x) = E\,\psi(x)$$ $\leftarrow$ eq. autovalori per Hamiltoniana $\hat{H}$

$E \geq V_{min}$

Soluz. gen.: $\Psi(x,t) = \sum_E a_E\, \psi_E(x)\, e^{-iEt/\hbar}$

$$\hat{H}\psi_E(x) = E\,\psi_E(x)$$

↳ Soluzioni da cercare nel senso delle distribuzioni. In particolare, si cercano funzioni continue e derivabili. Se V ha al più discontinuità finite, allora anche la derivata prima ψ'_E dev'essere continua:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\psi''_E + V(x)\,\psi_E = E\psi_E$$

$$\Updownarrow$$

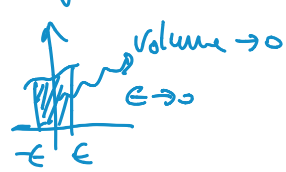
$$\psi''_E(x) = \frac{2m}{\hbar^2}\big(V(x) - E\big)\psi_E(x)$$

Integriamo questa eq. in un intervallo $[-\epsilon, \epsilon]$

$$\int_{-\epsilon}^{\epsilon}\psi''_E(x)\,dx = \frac{2m}{\hbar^2}\int_{-\epsilon}^{\epsilon}\underbrace{V(x)}_{(*)}\psi_E(x)\,dx - \underbrace{\frac{2mE}{\hbar^2}}_{\downarrow\, 0}\int_{-\epsilon}^{\epsilon}\psi_E(x)\,dx \qquad \epsilon \to 0$$

$$\| \qquad\qquad\qquad \text{↳ funz. continua}$$

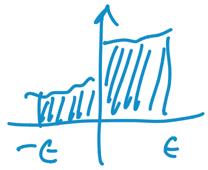
$$\psi'_E(\epsilon) - \psi'_E(-\epsilon)$$



(*) Se V è continuo in $x=0$, allora $\int_{-\epsilon}^{\epsilon} V\psi \to 0$ e ψ'_E è CONTINUA

Se V è disc.ua in $x=0$ con disc. finita, allora

$$\int_{-\epsilon}^{\epsilon} V\psi\,dx$$



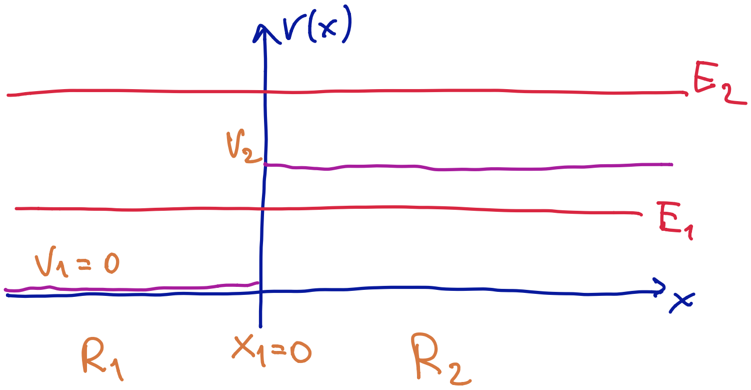
$\rightarrow 0$ per $\epsilon \to 0$ $\Rightarrow$ ψ_E' è CONTINUA

Invece, se V ha disc. infinita, allora

$$\int_{-\epsilon}^{\epsilon} V\psi\,dx$$ non tende necessariam. a zero per $\epsilon \to 0$

$\Rightarrow$ in questo caso non dobbiamo richiedere che ψ_E' sia continua in $x=0$.

GRADINO DI POTENZIALE



Un solo pto di discontinuità x_j $(j=1)$.

$\Rightarrow$ due regioni R_j $(j=1,2)$ in cui risolvere l'eq. di Sch.

$$\psi'' + \frac{2m}{\hbar^2}(E - V_j)\psi = 0 \qquad j=1,2$$

R_1) $x \leq 0$ $\qquad \psi_1'' + \frac{2mE}{\hbar^2}\psi_1 = 0 \qquad p_1 = \sqrt{2mE}$

$$\psi_1(x) = c_1^+ e^{ip_1 x/\hbar} + c_1^- e^{-ip_1 x/\hbar}$$

$$\psi_1'(x) = \frac{ip_1}{\hbar} c_1^+ e^{ip_1 x/\hbar} - \frac{ip_1}{\hbar} c_1^- e^{-ip_1 x/\hbar}$$

$R_2)$ $\quad x \geq 0 \qquad \psi_2'' + \frac{2m}{\hbar^2}(E - V_2)\,\psi_2 = 0 \qquad p_2 = \sqrt{2m(E-V_2)}$

$$\psi_2(x) = c_2^+ \, e^{i p_2 x/\hbar} + c_2^- \, e^{-i p_2 x/\hbar}$$

$$\psi_2'(x) = \frac{i p_2}{\hbar} c_2^+ \, e^{i p_2 x/\hbar} - \frac{i p_2}{\hbar} c_2^- \, e^{-i p_2 x/\hbar}$$

Condiz. di raccordo

$$\begin{cases} \psi_1(0) = \psi_2(0) \\ \psi_1'(0) = \psi_2'(0) \end{cases} \qquad \begin{cases} c_1^+ + c_1^- = c_2^+ + c_2^- \\ p_1(c_1^+ - c_1^-) = p_2(c_2^+ - c_2^-) \end{cases}$$

Sist. lineare

Condiz. di limitatezza ?

$E = E_2 > V_2 \rightsquigarrow p_1$ e $p_2 \in \mathbb{R}$, ψ_1 e ψ_2 sono oscillanti e quindi polinomialm. lim. a $+\infty$ e $-\infty$ $\to$ non ci sono condiz. da imporre

$E = E_1$ con $0 < E_1 < V_2 \rightsquigarrow p_1 \in \mathbb{R}$, ma $p_2 = i\sqrt{2m|E-V_2|} \in i\mathbb{R}$

$\equiv i q_2 \qquad q_2 \in \mathbb{R}$

$$\to \psi_2(x) = c_2^+ \, e^{-q_2 x/\hbar} + \underline{c_2^- \, e^{q_2 x/\hbar}}$$

questa non è pol. lim. a $+\infty$
$\Rightarrow$ bisogna imporre $c_2^- = 0$

Consideriamo prima $E = E_2 > V_2$: $(p_1, p_2 \in \mathbb{R})$

$$\begin{cases} c_1^+ + c_1^- = c_2^+ + c_2^- \\ p_1(c_1^+ - c_1^-) = p_2(c_2^+ - c_2^-) \end{cases}$$

Sist. lineare di due eq. in 4 incognite $\rightsquigarrow$ la soluz. ci permette di ricavare due di esse in funz. delle altre due (2 param. liberi)

soluz. gen. dell'eq. diff. lin. del 2° ord. in ψ $\longleftarrow$

Noi sappiamo che se ψ è soluz., allora anche ψ^* è soluz. e se ψ è complessa allora ψ^* e ψ sono due soluz. indipendenti $\Rightarrow$ ogni altra soluz. è una comb. lin. di ψ e ψ^*

$\Rightarrow$ ci basta trovare una soluz. particolare di $\psi'' + \frac{2m}{\hbar^2}(E-V(x))\psi = 0$ e poi prendere il suo complesso coniugato.

$\downarrow$

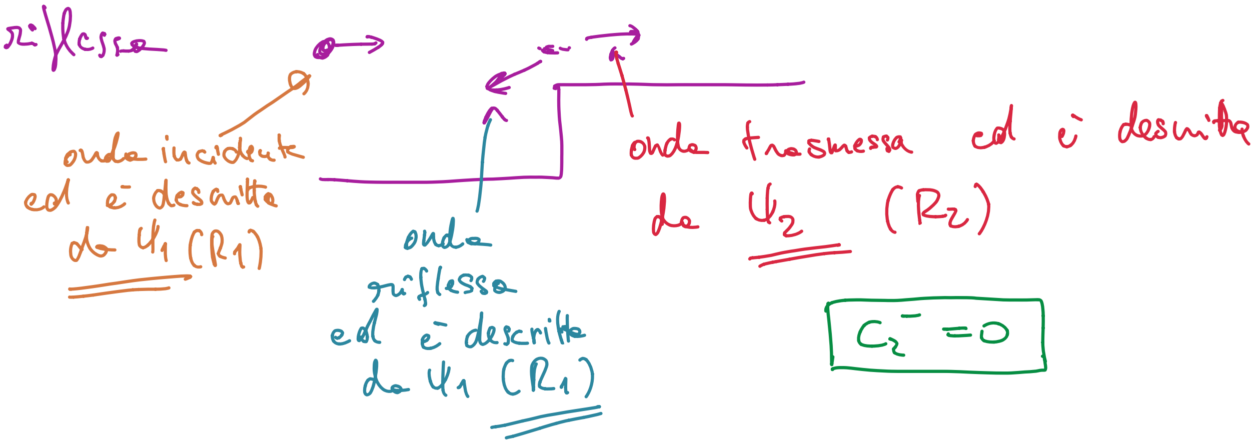
Cerchiamo una soluz. particolare con $c_2^- = 0$

$$\begin{cases} \psi_1 = c_1^+ e^{ip_1 x/\hbar} + c_1^- e^{-ip_1 x/\hbar} \\ \psi_2 = c_2^+ e^{ip_2 x/\hbar} + c_2^- e^{-ip_2 x/\hbar} \end{cases}$$

$\leftarrow$ onda che va verso destra + onda che va verso sinistra

$\hookrightarrow$ comb. di onde piane

Vogliamo interpretare la soluz. particolare come descrivente un processo di urti in cui una particella arriva da sinistra urta con il gradino di potenziale e avrà una certa prob. di essere trasmessa e una di essere riflessa



$\boxed{c_2^- = 0}$

Quindi, risolviamo il sist. lin. con $c_2^- = 0$:

$$\begin{cases} c_1^+ + c_1^- = c_2^+ \\ p_1(c_1^+ - c_1^-) = p_2\, c_2^+ \end{cases}$$

risolvendolo nelle incognite c_1^- e c_2^+

$$\begin{cases} p_2 (c_1^+ + c_1^-) - p_1 (c_1^+ - c_1^-) = 0 \\ p_1 c_1^+ + p_1 c_1^+ = (p_1 + p_2) c_2^+ \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_1^- = \dfrac{p_1 - p_2}{p_1 + p_2} c_1^+ \\ \\ c_2^+ = \dfrac{2 p_1}{p_1 + p_2} c_1^+ \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$E > V_2$:

$$\psi_E(x) = c_1^+ \begin{cases} e^{i p_1 x/\hbar} + \dfrac{p_1 - p_2}{p_1 + p_2} e^{-i p_1 x/\hbar} & x < 0 \\ \\ \dfrac{2 p_1}{p_1 + p_2} e^{i p_2 x/\hbar} & x \geq 0 \end{cases} \qquad (\star)$$

Possiamo fissare la normalizzazione, scegliendo $c_1^+ = 1$

$\rightsquigarrow$ soluz. particolare a valori complessi $\Rightarrow$ ψ_E^* è un'altra soluz. partic. indip.

$\Rightarrow$ Soluz. gen. per $E > V_2$ è

$$\alpha \psi_E(x) + \beta \psi_E^*(x)$$

Prendiamo soluz. particolare $\psi_E(x)$ in $(\star)$; la soluz. (stazionaria) dell'eq. di Sch. (dip. dal tempo) è:

$$\psi_E(x,t) = e^{-iEt/\hbar} \psi_E(x) = \begin{cases} \underbrace{e^{i(-Et + p_1 x)/\hbar}}_{\text{incid.}} + \underbrace{\dfrac{p_1 - p_2}{p_1 + p_2} e^{-i(Et + p_1 x)/\hbar}}_{\text{riflessa}} & x \in R_1 \\ \\ \underbrace{\dfrac{2 p_1}{p_1 + p_2} e^{i(-Et + p_2 x)/\hbar}}_{\text{trasm.}} & x \in R_2 \end{cases}$$

Densità di corrente di probabilità

$$\bar{J}(\bar{x},t) = \frac{\hbar}{2mi}\left(\psi^* \bar{\nabla}\psi - \psi\bar{\nabla}\psi^*\right) \quad \text{in } 3d$$

in 1d

$$J(x,t) = \frac{\hbar}{2mi}\left(\psi^*\psi' - \underbrace{\psi(\psi')^*}_{(\psi^*\psi')^*}\right)$$

$$\psi_E^* = \begin{cases} (c_1^+)^* e^{-ip_1x/\hbar} + (c_1^-)^* e^{ip_1x/\hbar} \\ (c_2^+)^* e^{-ip_2x/\hbar} \end{cases}$$

$$\psi_E' = \begin{cases} \frac{ip_1}{\hbar}\left(c_1^+ e^{ip_1x/\hbar} - c_1^- e^{-ip_1x/\hbar}\right) \\ \frac{ip_2}{\hbar} c_2^+ e^{ip_2x/\hbar} \end{cases}$$

soluz. stazionarie

$$J(x, \cancel{t}) = \begin{cases} \cdots \\ |c_2^+|^2 \frac{\cancel{\hbar}}{\cancel{2}m\cancel{i}}\left(\overbrace{\frac{\cancel{i}p_2}{\cancel{\hbar}} - \left(-\frac{\cancel{i}p_2}{\cancel{\hbar}}\right)}^{\cancel{2}p_2}\right) \end{cases}$$

J_I incid. — rifl. J_R

$$= \begin{cases} \frac{p_1}{m}|c_1^+|^2 - \frac{p_1}{m}|c_1^-|^2 \\ \frac{p_2}{m}|c_2^+|^2 & x \in R_2 \end{cases}$$

J_T trasm.

Data la corrente, possiamo definire dei coeff. di RIFL. e TRASM.

Coeff. di RIFLESSIONE: $R = \left|\frac{J_R}{J_I}\right| = \frac{|c_1^-|^2}{|c_1^+|^2} = \left(\frac{p_1-p_2}{p_1+p_2}\right)^2$ $\quad R+T=1$

Coeff. di TRASMISSIONE: $T = \left|\frac{J_T}{J_I}\right| = \frac{p_2|c_2^+|^2}{p_1|c_1^+|^2} = \frac{4p_1p_2}{(p_1+p_2)^2}$

Consideriamo $E = E_1$, cioè $0 < E < V_2$

In questo caso DOBBIAMO PORRE $C_2^- = 0$ per avere una soluzione accettabile, (cioè polinom. lim. a $\pm\infty$).

$p_2 = i q_2 \qquad q_2 \in \mathbb{R}$

$$\psi_E(x) = \begin{cases} e^{i p_1 x/\hbar} + \dfrac{p_1 - i q_2}{p_1 + i q_2} e^{-i p_1 x/\hbar} & x \in R_1 \\ \dfrac{2 p_1}{p_1 + i q_2} e^{-q_2 x/\hbar} & x \in R_2 \end{cases}$$

$\psi_E^* \psi_E' - \psi_E \psi_E'^* = 0$ $\qquad$ ($c_1^+ = 1$ per normaliz.)

[Prendiamo ψ_E^*, è ancora soluz. accettabile. Posso trovare una famiglia di soluz. prendendo comb. lin. di ψ_E e ψ_E^*?
No! Perchè in questo caso ψ_E e ψ_E^* sono dipendenti lin.
$\rightsquigarrow (p_1 + i p_2)\psi_E = (p_1 - i p_2)\psi_E^* \Rightarrow$ quindi c'è un'unica soluz. accettab. a meno di normalizzazione.]

$$J(x,t) = \begin{cases} \dfrac{p_1}{m} |c_1^+|^2 - \dfrac{p_1}{m} |c_1^-|^2 & x \in R_1 \\ 0 & x \in R_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad R = \frac{|c_1^-|^2}{|c_1^+|^2} = 1 \qquad T = 0$$

Cosa succede per $E < 0$?

$p_1 = i q_1 \qquad p_2 = i q_2$

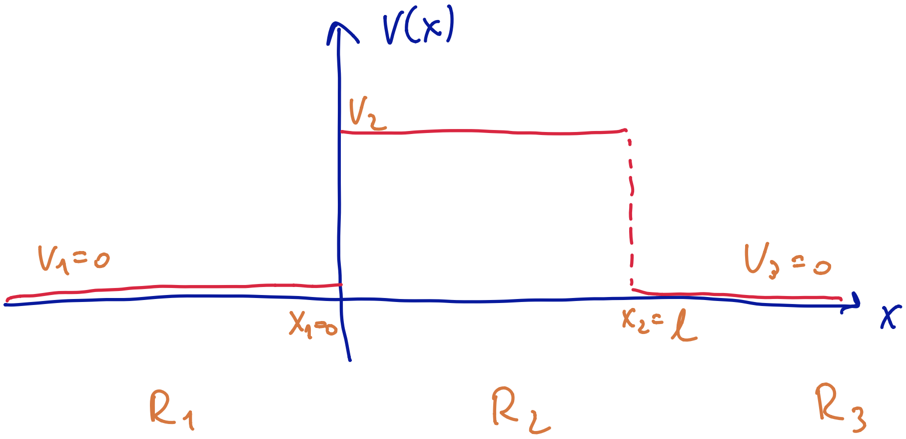
Abbiamo due condiz. di accettabilità: $c_1^+ = 0 \quad c_2^- = 0$

$$\psi = \begin{cases} c_1^- e^{q_1 x/\hbar} \\ c_2^+ e^{-q_2 x/\hbar} \end{cases}$$

Condiz. race: $\begin{cases} c_1^- = c_2^+ \\ q_1 c_1^- = -q_2 c_2^+ \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} c_1^- = 0 \\ c_2^+ = 0 \end{matrix}$

cioè $\psi = 0$.

BARRIERA DI POTENZIALE



Caso $E > V_2$:

- ψ_E è oscillante in tutte le regioni R_j $(j=1,2,3)$
  $\Rightarrow$ limitata a $\pm\infty$.

- C_j^+ e C_j^- per ogni $\psi_E^{(j)}$ $\rightarrow$ 6 parametri

- 4 condiz. di raccordo (2 pti di discont.)

$$p_1 = p_3 = \sqrt{2mE}$$

$$p_2 = \sqrt{2m(E-V_2)}$$

$$\psi_E(x) = \begin{cases} c_1^+ \, e^{ip_1 x/\hbar} + c_1^- \, e^{-ip_1 x/\hbar} & x \in R_1 \\ c_2^+ \, e^{ip_2 x/\hbar} + c_2^- \, e^{-ip_2 x/\hbar} & x \in R_2 \\ c_3^+ \, e^{ip_3 x/\hbar} + \cancel{c_3^- \, e^{-ip_3 x/\hbar}} & x \in R_3 \end{cases}$$

Scegliamo soluz. particolare con $C_3^- = 0$
($\rightsquigarrow$ particella che arriva da sinistra)

4 condiz. di raccordo:

$$\begin{cases} c_1^+ + c_1^- = c_2^+ + c_2^- & \psi_E^{(1)}(0) = \psi_E^{(2)}(0) \\ p_1(c_1^+ - c_1^-) = p_2(c_2^+ - c_2^-) & \psi_E^{(1)\prime}(0) = \psi_E^{(2)\prime}(0) \\ c_2^+ e^{ip_2 l/\hbar} + c_2^- e^{-ip_2 l/\hbar} = c_3^+ e^{ip_1 l/\hbar} & \psi_E^{(2)}(l) = \psi_E^{(3)}(l) \\ p_2 c_2^+ e^{ip_2 l/\hbar} - p_2 c_2^- e^{-ip_2 l/\hbar} = p_1 c_3^+ e^{ip_1 l/\hbar} & \psi_E^{(2)\prime}(l) = \psi_E^{(3)\prime}(l) \end{cases}$$

$\downarrow$ 4 eq. in 5 parametri

Soluz.

$$c_2^+ = \frac{1}{2} c_3^+ e^{i(p_1-p_2)l/\hbar}\left(1 + \frac{p_1}{p_2}\right)$$

$$c_2^- = \frac{1}{2} c_3^+ e^{i(p_1+p_2)l/\hbar}\left(1 - \frac{p_1}{p_2}\right)$$

$$c_1^+ = c_3^+ e^{ip_1 l/\hbar}\left\{\cos\left(\frac{p_2 l}{\hbar}\right) - i\,\frac{p_1^2 + p_2^2}{2p_1p_2}\,\text{sen}\left(\frac{p_2 l}{\hbar}\right)\right\}$$

$$c_1^- = c_3^+ e^{ip_1 l/\hbar}\, i\,\frac{p_1^2 - p_2^2}{2p_1p_2}\,\text{sen}\left(\frac{p_2 l}{\hbar}\right)$$

(ψ_E^* è indip. da ψ_E $\Rightarrow$ soluz. gen. è $\alpha\psi_E + \beta\psi_E^*$)