

ASPETTI TOPOLOGICI in QFT

Siamo interessati a QFT (in $d=1$) con uno SPAZIO DELLE CONFIGURAZIONI non-triviale.

$$\varphi: \mathbb{R} \longrightarrow N$$

$\uparrow$
sp. delle config.

(es. $\varphi = x^i$ descrivono coord della partícula, e parameter per lo sp delle config.)

In particolare vogliamo

$$\pi^1(N) \neq 0$$

Vedremo che gli INSTANTONI giocano un ruolo anche in questo contesto.

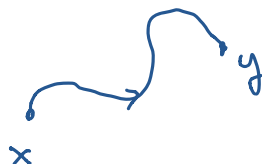
TOPOLOGIA E OMOTOPIA

Def. CAMMINO. Sia N uno sp. topologico e siano $x, y \in N$.

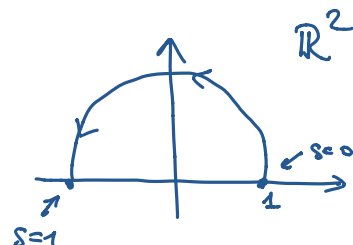
Allora un CAMMINO in N da x a y è

una FUNZIONE CONTINUA $\alpha: I \rightarrow N$ dove $I = [0, 1]$

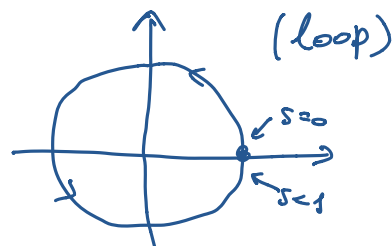
t.c. $\alpha(0) = x$ e $\alpha(1) = y$.



Es. $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ $\alpha(s) = (\cos \pi s, \sin \pi s)$



Es. $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ $\alpha(s) = (\cos 2\pi s, \sin 2\pi s)$



Def. OMOTOPIA di cammini. Sia $\alpha: I \rightarrow N$ $\beta: I \rightarrow N$ due cammini da $x \in N$ a $y \in N$.

α e β si dicono OMOTOPICI se $\exists$ una funt. CONTINUA

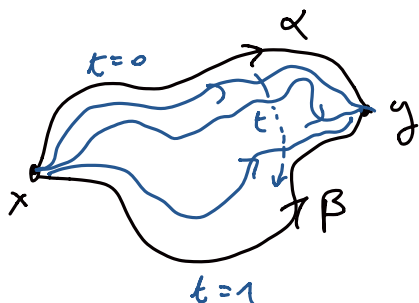
$H: I \times I \rightarrow N$ t.c.

$$H(s, 0) = \alpha(s)$$

$$H(0, t) = x$$

$$H(s, 1) = \beta(s)$$

$$H(1, t) = y$$



Siccome posso def. un cammino

$$\forall t \quad \alpha_t(s) \equiv H(s, t)$$

α_t mi dà una famiglia a un parametro (t) di cammini

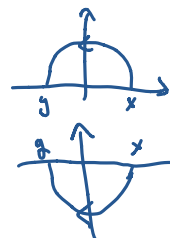
H è chiamata OMOTOPIA da α a β .

Scriviamo $\alpha \sim \beta$ se α e β sono omotopi.

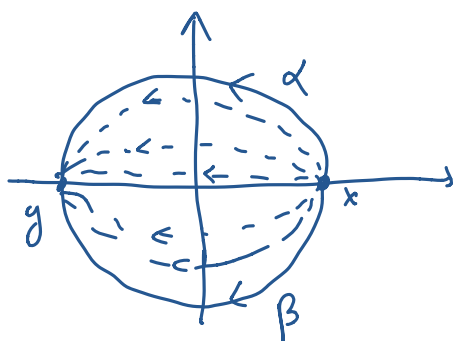
Es. $\alpha: I \rightarrow D^2$ $\alpha(s) = (\cos \pi s, \sin \pi s)$

$\beta: I \rightarrow D^2$ $\beta(s) = (\cos \pi s, -\sin \pi s)$

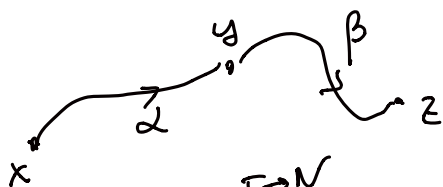
$\uparrow$
disco ($R > 1$)



$H: I \times I \rightarrow D^2$ $H(s,t) = (\cos \pi s, (1-2t) \sin \pi s) \equiv \alpha_t(s)$



Def. Dati due cammini $\alpha: I \rightarrow N$ e $\beta: I \rightarrow N$
 $\alpha(0)=x$ $\alpha(1)=y$ $\beta(0)=y$ $\beta(1)=z$



allora $\alpha * \beta: I \rightarrow N$ è il cammino da x a z def. da

$$\alpha * \beta(s) = \begin{cases} \alpha(2s) & 0 \leq s < 1/2 \\ \beta(2s-1) & 1/2 \leq s \leq 1 \end{cases}$$

$s \in [0,1]$

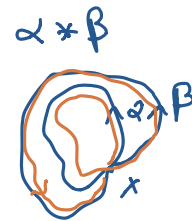
Def. Dato cammino $\alpha: I \rightarrow N$, $\alpha^{-1}: I \rightarrow N$ è

il cammino def. da $\alpha^{-1}(s) = \alpha(1-s)$



Def. Loop. Un cammino chiuso o loop, con base x è un cammino in N da x a x , che è una funt. continua $\alpha: I \rightarrow N$ t.c. $\alpha(0) = \alpha(1) = x$.

Prop. α, β, γ siano loop con pto base x , allora



$$1) (\alpha * \beta) * \gamma \sim \alpha * (\beta * \gamma)$$

$$2) \alpha \sim \gamma, \beta \sim \delta \Rightarrow \alpha * \beta \sim \gamma * \delta$$

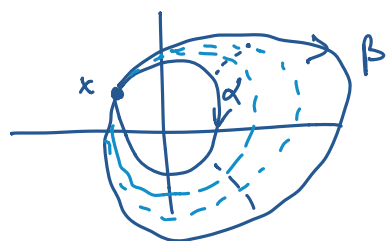
$$3) e_x * \alpha \sim \alpha \sim \alpha * e_x \quad \text{dove } e_x \text{ è il loop cost.} \\ e_x(s) = x$$

$$4) \alpha \sim \beta \Rightarrow \alpha^{-1} \sim \beta^{-1}$$

$$5) \alpha * \alpha^{-1} \sim e_x \sim \alpha^{-1} * \alpha$$

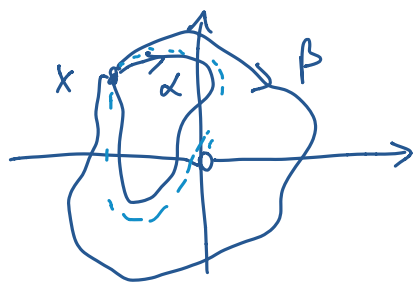


In $\mathbb{R}^2$ ogni loop è deformabile in un'altro loop.



$$\alpha \sim \beta$$

Invece in $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ questo non è vero



$$\alpha \not\sim \beta$$

Def. GRUPPO FONDAMENTALE. Il gr. fond. di uno sp. topol. N con pto base x è

$$\pi_1(N, x) = \left\{ \alpha : I \rightarrow N \text{ con } \alpha \text{ loop con pto base } x \right\} / \sim$$

"Essere omotopi" è una relaz. di equivalenza $\rightarrow$ posso costruire delle classi di equivalenza. Gli elem. di $\pi_1(N, x)$ sono tali classi.

Teorema. $\pi_1(N, x)$ è un GRUPPO.

Dim. Cioè ci dovesse una legge di composizione:

dati $[\alpha]$ e $[\beta]$, $[\alpha] \cdot [\beta] = [\alpha * \beta]$, Ac.

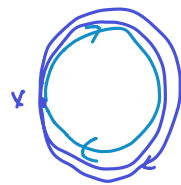
- 1) $\exists$ identità $[e_x]$: $[e_x] \cdot [\alpha] = [e_x * \alpha] = [\alpha]$
- 2) $\exists$ inverso $[\alpha]^{-1} = [\alpha^{-1}]$: $[\alpha^{-1}] \cdot [\alpha] = [\alpha^{-1} * \alpha] = [e_x]$
- 3) Associatività: $([\alpha] \cdot [\beta]) \cdot [\gamma] = [\alpha] \cdot ([\beta] \cdot [\gamma])$ //

Es. 1) $N = \mathbb{R}^n \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad \pi_1(\mathbb{R}^n, x) = \{1\}$ (gruppo triviale)

2) $\pi_1(D^m, x) = \{1\} \quad \forall x \in D^m$

3) $N = S^1 \quad \pi_1(S^1, x) \cong \mathbb{Z}$ ($\mathbb{Z}$ visto come gruppo additivo)

è lo spazio
delle configurazioni
del pendolo



$\forall n \in \mathbb{Z}$ c'è una classe in $\pi_1(S^1, x)$
i cui rappresentanti girano
 n volte attorno a S^1

$$[n] \ni \alpha(s) = e^{2\pi i n s}$$

$$[n] \cdot [m] = [e^{2\pi i n s}] \cdot [e^{2\pi i m s}] = [e^{2\pi i (n+m)s}]$$

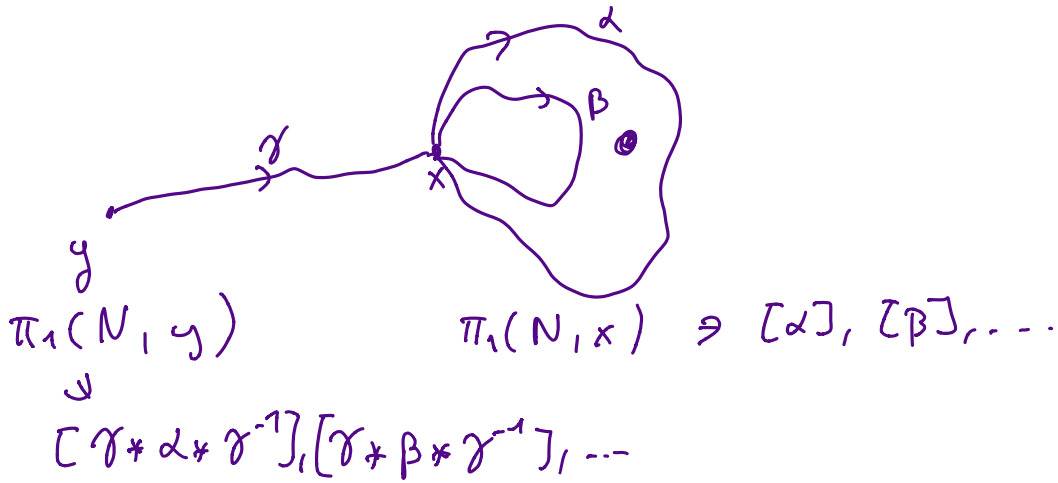
$\updownarrow \cong$

$[n+m]$

4) $\pi_1(S^m, x) = \{1\}$

$\uparrow$
sfera
 n -dim

Se N è connesso (in archi)



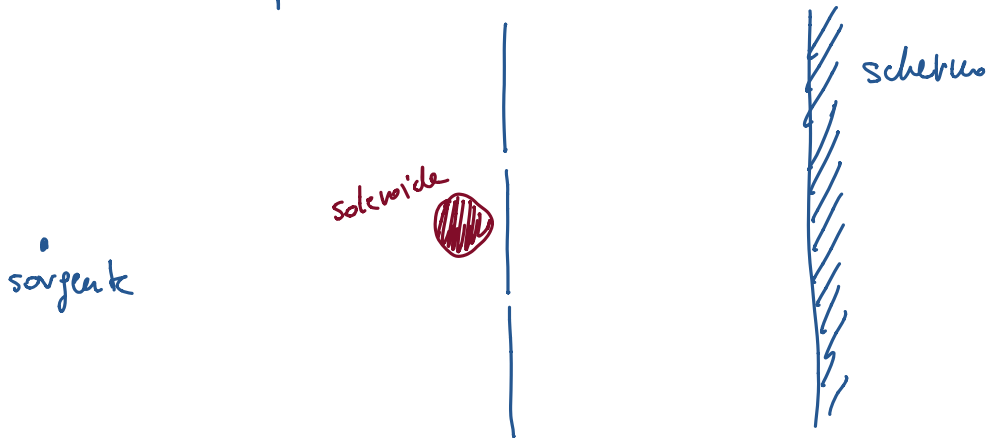
$$\rightarrow \pi_1(N, x) \cong \pi_1(N, y) \\ \forall x, y \in N$$

Il gruppo fondam. di N , detto $\pi_1(N)$ può essere determinato prendendo un p'fissi mo pt come pt base.

Def. N è detto **SEMPLICEMENTE CONNESSO** se $\pi_1(N) = \{1\}$

Effetto di AHARONOV - BOHM

Fatto sperimentale:



Esp. frangimento: osservo delle frange d'interferenza sullo schermo
Solenoida lungo l'asse z di lunghezza infinita e completam. impenetrabile
 $\rightarrow B=0$ fuori dal solenoide

Si osserva che le frange d'interferenza cambiano posizione
il campo magnetico B dentro il solenoide; inoltre le
fig. d'interferenza si ripetono quando il flusso del campo mag.
 Φ_B è shifted di $\frac{2\pi\hbar c}{e}$.

Lo spazio delle config. della particella e^-

$$N = \mathbb{R}^3 \setminus \{\text{cilindro}\} \rightarrow \pi_1(N) \cong \mathbb{Z}$$

Consideriamo il potenziale vettore

$$A = \theta \frac{\hbar c}{2\pi e} d\varphi \Rightarrow B = dA = 0$$

parametro
orbitario

coordinate
azimutali
cilindriche



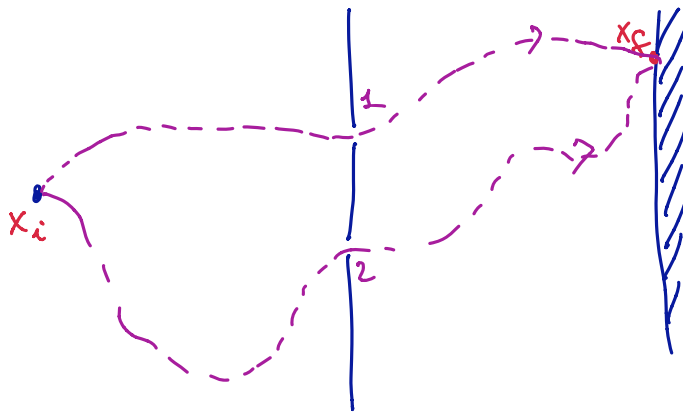
$$\oint_{S^1} A = \int_0^{2\pi} \theta \frac{\hbar c}{2\pi e} d\varphi = \theta \frac{\hbar c}{e}$$



$$\oint_{S^1} A = \int_D B = \Phi_B$$

$$\Rightarrow \theta = \frac{e}{\hbar c} \Phi_B$$

Pertanto del caso senza solenoidi



$$K(x_f, x_i; T, 0) = \int Dx e^{iS[x]/\hbar}$$

{ tutte le traiettorie con $x(0)=x_i$ e $x(T)=x_f$ }

$$= \int Dx e^{iS[x]/\hbar}$$

{ traiettorie che
passano per fund. 1 }

(funzione 2 è chiusa)

$$K_1(x_f, x_i; T, 0)$$

$$+ \int Dx e^{iS[x]/\hbar}$$

{ traiettorie che
passano per fund. 2 }

(funzione 1 è chiusa)

$$K_2(x_f, x_i; T, 0)$$