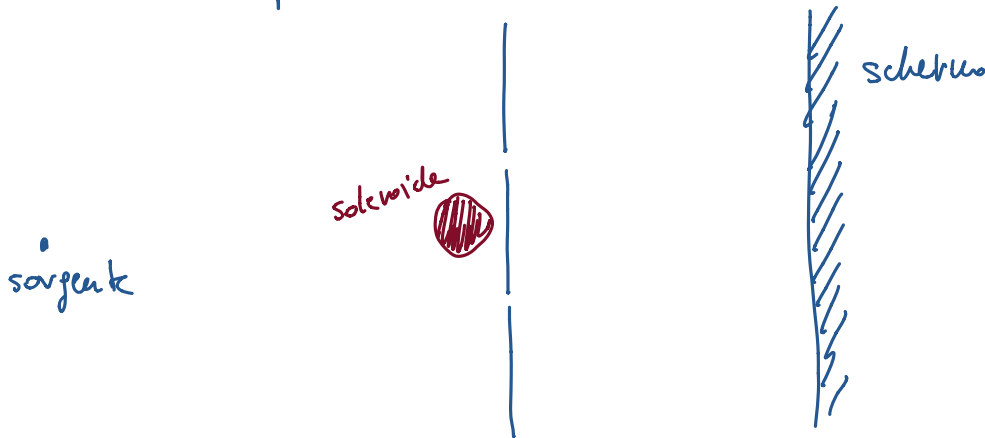


Effetto di AHARONOV - BOHM

Fatto sperimentale:



Esp. frangimento: osservo delle frange d'interferenza sullo schermo
 Solenoide lungo l'asse z di lunghezza infinita e completamente impenetrabile
 $\rightarrow B=0$ fuori dal solenoide

Si osserva che le frange d'interferenza cambiano posizione
 il campo magnetico B dentro il solenoide; inoltre le
 fig. d'interferenza si ripete uguale quando il flusso del campo mag.
 Φ_B è shiftato di $\frac{2\pi\hbar c}{e}$.

Lo spazio delle config. della particella e^-

$$N = \mathbb{R}^3 \setminus \{\text{cilindro}\} \rightarrow \pi_1(N) \cong \mathbb{Z}$$

Consideriamo il potenziale vettore

$$A = \theta \frac{\hbar c}{2\pi e} d\varphi \Rightarrow B = dA = 0$$

θ parametro arbitrario
 φ coordinate azimutale cilindrica



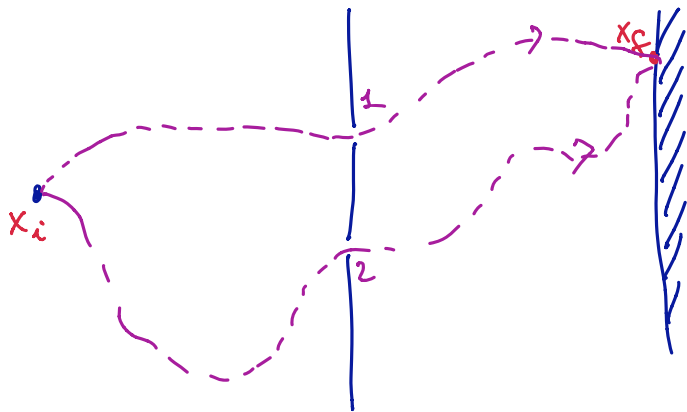
$$\oint_{S^1} A = \int_0^{2\pi} \theta \frac{\hbar c}{2\pi e} d\varphi = \theta \frac{\hbar c}{e}$$



$$\oint_{S^1} A = \int_D B = \Phi_B$$

$$\Rightarrow \theta = \frac{e}{\hbar c} \Phi_B$$

Partiamo dal caso senza solenoidi



$$K(x_f, x_i; T, 0) = \int \mathcal{D}x e^{iS[x]/\hbar}$$

{ tutte le traiettorie con $x(0) = x_i$ e $x(T) = x_f$ }

$$= \int \mathcal{D}x e^{iS[x]/\hbar}$$

{ traiettorie che passano in fend. 1 }

(fend. 2 è chiusa)

$$K_1(x_f, x_i; T, 0)$$

$$+ \int \mathcal{D}x e^{iS[x]/\hbar}$$

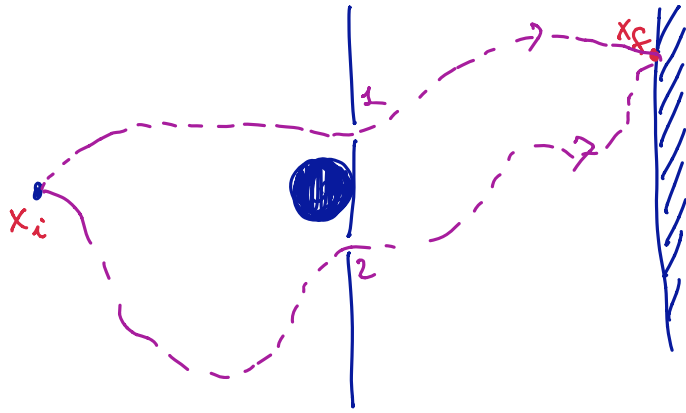
{ traiettorie che passano in fend. 2 }

(fend. 1 è chiusa)

$$K_2(x_f, x_i; T, 0)$$

Se le fasi di K_1 e K_2 sono uguali in x_f , abbiamo INTERFERENZA COSTRUTTIVA, altrimenti ci saranno cancellazioni.

Consideriamo il caso col SOLENOIDE



B fuori dal solenoide \vec{e} null $\rightarrow A$ è cost. in \vec{x} .

Se $B \neq 0$ nel solenoide, $A \neq 0$ è l'azione della particella
 \vec{e} costante \rightarrow c'è l'aggiunta del termine

$$-\frac{e}{c} \int dt \dot{\vec{x}} \cdot \vec{A} = -\frac{e}{c} \int_{\text{traiett.}} \vec{A} \cdot d\vec{x} = -\frac{e}{c} \int_{\text{traiett.}} A$$

Si come A è costante, $\delta L_A = \frac{d}{dt} (\vec{x} \cdot \vec{A} \frac{e}{c})$
 cioè se $A \neq 0$ L dipende da L ed $A \neq 0$

per una DERIVATA TOTALE \Rightarrow le eq. di Lagrange

rimangono invariate \Rightarrow

\Rightarrow CLASSICAMENTE non si deve rilevare
 nessun effetto dalla presenza
 del solenoide.

Possiamo dimostrare che

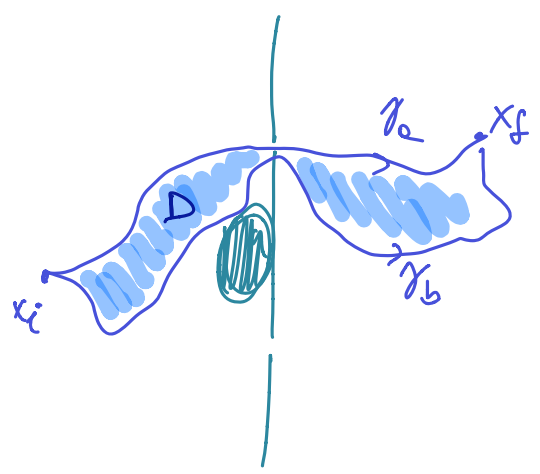
$$\int_{\gamma} \vec{A} \cdot d\vec{x} = \int_{\gamma} A$$

dipende solo dai due estremi di γ se γ passa dalla

stessa fase del solenoide.

$$\int_{\gamma_a} A - \int_{\gamma_b} A =$$

$$= \oint_{\gamma_b^{-1} * \gamma_a} A = \int_D B = 0$$



$\Rightarrow \int_{\gamma} A$ non dipende dalle particolari traiettorie
 $\Rightarrow e^{-\frac{ie}{\hbar c} \int_{\gamma} A}$ fattorizza fuori dal p.i.

$B=0$) $K = K_1 + K_2 = \int (e^{i\phi_1} + e^{i\phi_2}) =$
 $= \rho e^{i\phi_1} (1 + e^{i(\phi_2 - \phi_1)})$
 fase RELATIVA $\equiv \phi_{12}$

- quando $\phi_{12} = \pi + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$
 \hookrightarrow interf. distruttive
- quando $\phi_{12} = 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$
 \hookrightarrow interf. costruttive

$B \neq 0$) $K_B = e^{-\frac{ie}{\hbar c} \int_{\gamma_1} A} K_1 + e^{-\frac{ie}{\hbar c} \int_{\gamma_2} A} K_2$
 $= \rho (e^{i\phi'_1} + e^{i\phi'_2}) = \rho e^{i\phi'_1} (1 + e^{i(\phi'_2 - \phi'_1)})$
 fase RELATIVA $\equiv \phi'_{12}$

$\phi'_{12} = \phi_{12} - \frac{e}{\hbar c} \int_{\gamma_2^{-1} * \gamma_1} A = \phi_{12} - \frac{e \Phi}{\hbar c}$
 \hookrightarrow diverse fasce d'interferenza al variare di Φ

$$K(x_f, x_i; T, 0; B) = \int \mathcal{D}x e^{iS[x; B]/\hbar} = \int \mathcal{D}x e^{iS[x, 0]/\hbar} e^{-\frac{i}{\hbar} \int dt \dot{x} \cdot \bar{A}} =$$

$$= \sum_{x_a} e^{iS[x_a; B]/\hbar} \int_{\substack{y(0)=0 \\ y(T)=0}} \mathcal{D}y e^{\frac{i}{\hbar} \int dt dt' y(t) \frac{\delta S}{\delta x^2} \Big|_{x_a} y(t') + \dots}$$

$\equiv \Delta$ non dipende da A

(A è cost. \Rightarrow appare solo in termini lineari)

$$= \sum_{x_a} e^{iS[x_a, 0]/\hbar} e^{-\frac{i}{\hbar} \int_{x_a} A} \Delta$$

$$K(x_f, x_i; T, 0; B) = e^{iS[x_a^{(1)}, 0]/\hbar} e^{-\frac{i}{\hbar} \int_{x_a^{(1)}} A} \cdot \Delta$$

$$+ e^{iS[x_a^{(2)}, 0]/\hbar} e^{-\frac{i}{\hbar} \int_{x_a^{(2)}} A} \cdot \Delta$$

Quando $B=0$

$$K(x_f, x_i; T, 0; 0) = \Delta \cdot e^{\frac{i}{\hbar} S[x_a^{(1)}, 0]} \left[1 + e^{\frac{i}{\hbar} \{ S[x_a^{(2)}, 0] - S[x_a^{(1)}, 0] \}} \right]$$

FASE RELATIVA ϕ_{12}

Quando $B \neq 0$

$$K(x_f, x_i; T, 0; B) = \Delta e^{\frac{i}{\hbar} S[x_a^{(1)}, B]} \left[1 + e^{\frac{i}{\hbar} \{ S[x_a^{(2)}, B] - S[x_a^{(1)}, B] \}} \right]$$

FASE RELATIVA ϕ_2'

]

$$K_B = e^{-\frac{ie}{\hbar c} \int_{\gamma_1} A} K_1 + e^{-\frac{ie}{\hbar c} \int_{\gamma_2} A} K_2$$

$$\phi_{12}' = \phi_{12} - \frac{e\Phi}{\hbar c} \Rightarrow A \text{ e } A' \text{ sono EQUIVALENTI fisicu.}$$

(casi producono la stessa fiz. d. interf.)

$$\text{se } \int_{\gamma_2' \times \gamma_1} A' = \int_{\gamma_2 \times \gamma_1} A + \frac{\hbar c}{e} \cdot 2\pi m \quad m \in \mathbb{Z}$$

\uparrow
 $= \Phi$

$$A = \frac{\hbar c}{2\pi e} \Theta d\varphi$$

$$A' = \frac{\hbar c}{2\pi e} \Theta' d\varphi$$

$$\int A = \frac{\hbar c}{e} \Theta$$

$$\int A' = \frac{\hbar c}{e} \Theta'$$

Θ e Θ' sono equivalenti se

$$\Theta' = \Theta + 2\pi m$$

A è parametrizzato da una variabile angolare Θ .

Scelte inequiv. di A sono parametrizzate da $\Theta \in [0, 2\pi[$.

Classicamente tutti i valori di Θ danno Lagrangiane equivalenti, mentre quantisticamente otteniamo teorie (\cong Lap.) inequivalenti.

→ Abbiamo diverse teorie QUANTISTICHE legate alla stessa teoria CLASSICA, e che sono parametrizzate da $\Theta \in [0, 2\pi[$. Ci sono QUANTIZZAZIONI INEQUIVALENTI della stessa TEORIA CLASSICA, se lo sp. delle confj. Non è semplic. connesp.

P.I. su spazi non semplicemente connessi

$$K(q_2, q_1; t_2, t_1) = \int \mathcal{D}q$$

$\left\{ \begin{array}{l} \text{tutti i cammini} \\ \text{che connettono} \\ q_1 \text{ e } q_2 \end{array} \right\}$

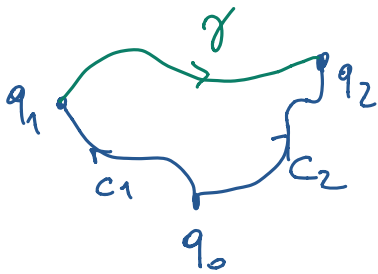
Questi cammini cadono in CLASSI di OMOTOPIA

(classi di equiv., dove la rel. di equivalenza è l'essere deformabili continuamente)

Ci sono tante classi di omotopia di cammini da q_1 a q_2 quanto classi di omotopia di loops (che iniziano e finiscono in un pts base q_0) cioè elem. di $\pi_1(N)$

↓
 Isomorfismo: fissiamo due cammini c_1 & c_2 che connettono q_0 e q_1 & q_2

$$[\gamma] \longleftrightarrow [c_2^{-1} * \gamma * c_1] \equiv [\alpha]$$



Le classi di omotopia sono INSIEMI DISGIUNTI \Rightarrow il P.I.

integrato su una unione disgiunta di classi di omotopia

↓

Integrale sui cammini K sarà una somma di integrali su una singola classe:

$$K_\alpha(q_2, q_1; t_2, t_1) = \int \mathcal{D}q_\alpha e^{-S_E(q)/\hbar}$$

$\left\{ \text{tutti i cammini da } q_1 \text{ a } q_2 \text{ nella classe di omotopia } \cong [\alpha] \right\}$

In principio possiamo def. K come una somma PESATA dei K_α

$$K(q_2, q_1; t_2, t_1) = \sum_{\alpha \in \pi^1(N)} \chi(\alpha) K_\alpha(q_2, q_1; t_2, t_1)$$

I pesi complessi $\chi(\alpha)$ devono soddisfare le seguenti condiz.:

1) l'ampiezza totale dev'essere indipendente dalla scelta di c_1 e c_2 ;

2) l'ampiezza deve soddisfare

$$K(q_2, q_1; t_2, t_1) = \int dq K(q_2, q; t_2, t) K(q, q_1; t, t_1) \\ t_1 < t < t_2$$



$$\chi(\alpha * \beta) = \chi(\alpha) \chi(\beta)$$

$\Rightarrow \chi$ è una mape
che rispetta il
prodotto del gruppo
 $\pi_1(N)$

(omomorfismo di gruppi)

$\chi(\alpha)$ forma una rappresentazione unitaria 1dim
del gruppo fondam. $\pi_1(N)$, cioè $|\chi(\alpha)| = 1$

$\chi =$ "carattere del gruppo"