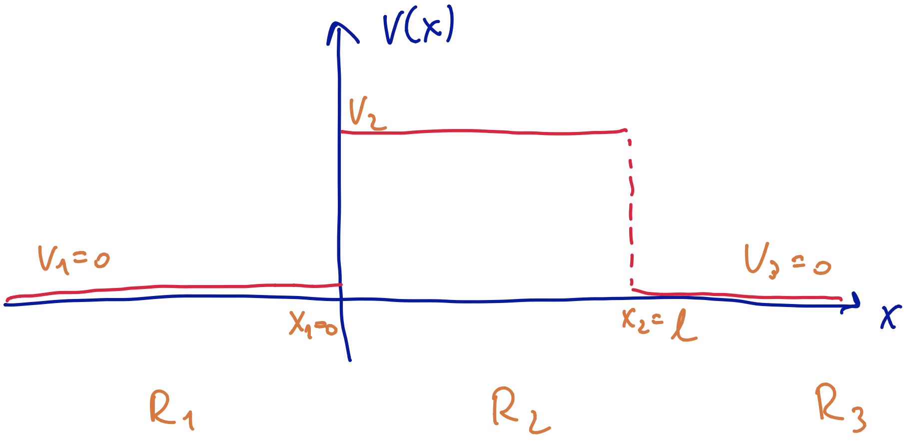
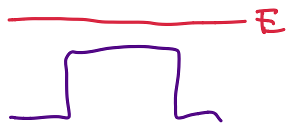
BARRIERA DI POTENZIALE





Caso $E > V_2$:

- ψ_E è oscillante in tutte le regioni R_j $(j=1,2,3)$
  $\Rightarrow$ limitata a $\pm\infty$.
- c_j^+ e c_j^- per ogni $\psi_E^{(j)}$ $\rightarrow$ 6 parametri
- 4 condiz. di raccordo (2 pti di discont.)

$$p_1 = p_3 = \sqrt{2mE}$$

$$p_2 = \sqrt{2m(E-V_2)}$$

$$\psi_E(x) = \begin{cases} c_1^+ e^{ip_1x/\hbar} + c_1^- e^{-ip_1x/\hbar} & x \in R_1 \\ c_2^+ e^{ip_2x/\hbar} + c_2^- e^{-ip_2x/\hbar} & x \in R_2 \\ c_3^+ e^{ip_3x/\hbar} + \cancel{c_3^- e^{-ip_3x/\hbar}} & x \in R_3 \end{cases}$$

Scegliamo soluz. particolare con $c_3^- = 0$
($\rightsquigarrow$ particella che arriva da sinistra)

4 condiz. di raccordo :

$$\begin{cases} c_1^+ + c_1^- = c_2^+ + c_2^- & \psi_E^{(1)}(0) = \psi_E^{(2)}(0) \\ p_1(c_1^+ - c_1^-) = p_2(c_2^+ - c_2^-) & \psi_E^{(1)\prime}(0) = \psi_E^{(2)\prime}(0) \\ c_2^+ e^{ip_2 \ell/\hbar} + c_2^- e^{-ip_2\ell/\hbar} = c_3^+ e^{ip_1\ell/\hbar} & \psi_E^{(2)}(\ell) = \psi_E^{(3)}(\ell) \\ p_2 c_2^+ e^{ip_2\ell/\hbar} - p_2 c_2^- e^{-ip_2\ell/\hbar} = p_1 c_3^+ e^{ip_1\ell/\hbar} & \psi_E^{(2)\prime}(\ell) = \psi_E^{(3)\prime}(\ell) \end{cases}$$

$\downarrow$ 4 eq. in 5 parametri

Soluz.

$$c_2^+ = \frac{1}{2} c_3^+ e^{i(p_1-p_2)\ell/\hbar}\left(1 + \frac{p_1}{p_2}\right)$$

$$c_2^- = \frac{1}{2} c_3^+ e^{i(p_1+p_2)\ell/\hbar}\left(1 - \frac{p_1}{p_2}\right)$$

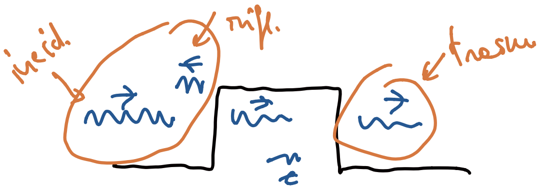
$$c_1^+ = c_3^+ e^{ip_1\ell/\hbar}\left\{\cos\left(\frac{p_2\ell}{\hbar}\right) - i\frac{p_1^2+p_2^2}{2p_1p_2}\operatorname{sen}\left(\frac{p_2\ell}{\hbar}\right)\right\}$$

$$c_1^- = c_3^+ e^{ip_1\ell/\hbar}\, i\,\frac{p_1^2-p_2^2}{2p_1p_2}\operatorname{sen}\left(\frac{p_2\ell}{\hbar}\right)$$

(ψ_E^* è indip. da ψ_E $\Rightarrow$ soluz. gen. è $\alpha\psi_E + \beta\psi_E^*$)

Posso fissare la normalizzazione della soluzione $\psi_E(x)$ ponendo $c_3^+ = 1$.

$$J(x,t) = \frac{\hbar}{2mi}\left(\psi_E^*\psi_E' - \psi_E'^*\psi_E\right) = \begin{cases} \underbrace{\frac{p_1}{m}|c_1^+|^2}_{J_I} - \underbrace{\frac{p_1}{m}|c_1^-|^2}_{J_R} & x \in R_1 \\ \frac{p_2}{m}|c_2^+|^2 - \frac{p_2}{m}|c_2^-|^2 & x\in R_2 \\ \underbrace{\frac{p_1}{m}|c_3^+|^2}_{J_T} & x \in R_3 \end{cases}$$



R_1 $\qquad$ R_2 $\qquad$ R_3

$$R = \left|\frac{J_R}{J_I}\right| = \left|\frac{C_1^-}{C_1^+}\right|^2 = \frac{(p_1^2 - p_2^2)\ \text{sen}^2(p_2 \ell/\hbar)}{4p_1^2p_2^2 + (p_1^2 - p_2^2)\,\text{sen}^2(p_2\ell/\hbar)}$$

$$T = \left|\frac{J_T}{J_I}\right| = \left|\frac{C_3^+}{C_1^+}\right|^2 = \frac{4p_1^2p_2^2}{4p_1^2p_2^2 + (p_1^2 - p_2^2)\,\text{sen}^2(p_2\ell/\hbar)} = \frac{4E(E-V_2)}{4E(E-V_2) + V_2^2\,\text{sen}^2\left(\frac{\ell}{\hbar}\sqrt{2m(E-V_2)}\right)}$$

$p_1 = \sqrt{2mE} \qquad p_2 = \sqrt{2m(E-V_2)}$

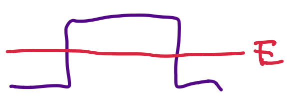
sen^2 è minimo quando è $= 0$ $\longleftrightarrow$ den. min. $\Leftrightarrow$ T massimo

Fenomeno di RISONANZA $\Leftarrow$

$$\frac{p_2 \ell}{\hbar} = n\pi \qquad n \in \mathbb{N}^*$$

[Quando c'è risonanza, un pacchetto d'onda può rimanere per un tempo lungo in R_2.]

Caso $0 < E < V_2$:



$$p_2 = \sqrt{2m(E-V_2)} = i\underbrace{\sqrt{2m(V_2-E)}}_{\equiv q_2} \equiv i q_2$$

$\Rightarrow$ la soluz. di R_2 cambia in

$$C_2^+ e^{-q_2 x/\hbar} + C_2^- e^{q_2 x/\hbar} \qquad \text{per } 0 < x < \ell$$

- Siccome R_2 non contiene $\pm\infty$ (cioè è una regione limitata), allora non ho vincoli su $c_2^\pm$ dovuti alla richiesta di limitatezza a $\pm\infty$.

- Ancora scegliamo di studiare la soluz. particolare con $c_3^- = 0$.

- Tutti i conti sono formalm. identici al caso $E > V_2$, solo che ora $p_2 = i q_2 \in i\mathbb{R}$ ($\sin \to \sinh$, $\cos \to \cosh$)

- In particolare possiamo vedere cosa diventa il coeff. di Trasm.

$$T = \frac{4 p_1^2 p_2^2}{4 p_1^2 p_2^2 + (p_1^2 - p_2^2)\sin^2(p_2 \ell/\hbar)} = \frac{4E(V_2 - E)}{4E(V_2-E) + V_2^2 \sinh^2\left(\frac{\ell}{\hbar}\sqrt{2m(V_2-E)}\right)}$$

$$p_2 = i q_2 = i\sqrt{2m(V_2-E)}$$

$\neq 0$ (contrariamente all'aspettativa classica)

$\boxed{\text{EFFETTO TUNNEL}}$

- All'aumentare dell'argomento di sinh, il denominatore cresce e T diminuisce

$$\frac{\ell}{\hbar}\sqrt{2m(V_2-E)}$$

T diminuisce all'aumentare di (a E fissato)
  - ℓ larghezza della barriera
  - m massa della particella
  - V_2 altezza della barriera

Al lim. in cui $\frac{q_2 \ell}{\hbar} \gg 1$

$$\Rightarrow \quad \sinh\left(\frac{q_2 \ell}{\hbar}\right) \sim \frac{1}{2} e^{q_2 \ell/\hbar} \gg 4E(V_2 - E)$$

$$\Rightarrow \quad T \sim 16 \, \frac{E(V_2 - E)}{V_2^2} \, e^{-2 q_2 \ell/\hbar}$$

- Elettrone con $E = 1\,eV$, barriera $\ell = 1\,\text{Å}$ e alt. $V_2 = 2\,eV$

  $\rightsquigarrow \quad T = 0{,}78$

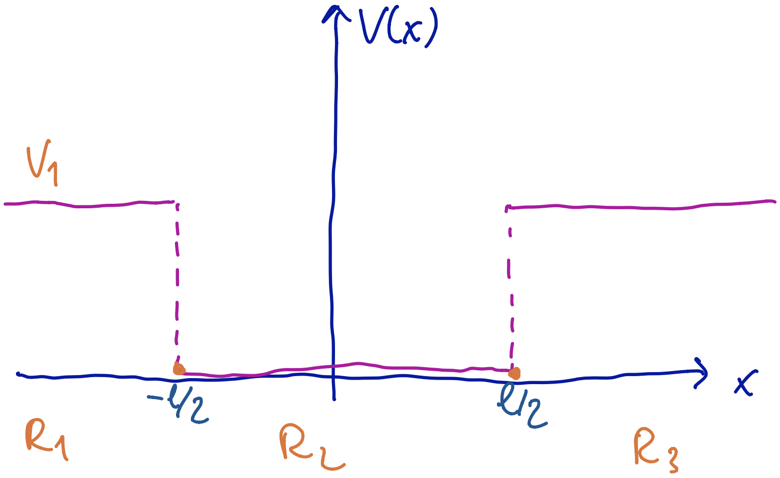
- Protone in situazioni analoghe

  $\rightsquigarrow \quad T = 4 \cdot 10^{-19}$

- oggetti macroscopici

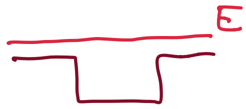
  $\rightsquigarrow \quad T$ praticam. nullo

BUCA RETTANGOLARE



$V_2 = 0$
$V_3 = V_1$
$x_1 = -\ell/2$
$x_2 = \ell/2$

Caso $E > V_1$



- Soluz. oscillanti in tutte le regioni R_j $(j = 1,2,3)$

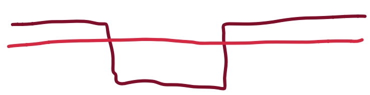
$$p_1 = \sqrt{2m(E-V_1)} \qquad p_2 = \sqrt{2mE} \qquad (*)$$

- le soluzioni $\psi_E(x)$ sono formalmente le stesse del caso della barriera, ma con diversi valori per p_1 e p_2.

Per esempio

$$T = \frac{4\,p_1^2 p_2^2}{4p_1^2p_2^2 + (p_1^2-p_2^2)\sin^2(p_2\ell/\hbar)} \overset{(*)}{=} \frac{4(E-V_1)E}{4(E-V_1)E + V_1^2 \sin^2\left(\frac{\ell}{\hbar}\sqrt{2mE}\right)}$$

Caso $0 < E < V_1$



- Andamento oscillante in R_2 $(E > V_2 = 0)$ ed andam. ESPONENZIALE nelle regioni (illimitate) R_1 e R_3.

$x \to -\infty$

$$c_1^+ e^{-q_1 x/\hbar} + c_1^- e^{+q_1 x/\hbar} \qquad x \in R_1$$

$$c_3^+ e^{-q_1} + c_3^- e^{q_1 x/\hbar} \qquad x \in R_2$$

$x \to +\infty$

$p_1 = i q_1$
$p_3 = i q_3$
$q_1 = q_3 = \sqrt{2m(V_1 - E)}$

↳ Condiz. di accettab. (limitatezza a $\pm\infty$):

$$\underline{c_1^+ = 0} \quad \text{e} \quad \underline{c_3^- = 0}$$

Soluzione sono:

$$q_1 = \sqrt{2m(V_1 - E)}$$

$$p_2 = \sqrt{2mE}$$

$$\psi_E(x) = \begin{cases} c_1^- e^{q_1 x/\hbar} & x \in R_1 \\ c_2^+ e^{ip_2 x/\hbar} + c_2^- e^{-ip_2 x/\hbar} & x \in R_2 \\ c_3^+ e^{-q_1 x/\hbar} & x \in R_3 \end{cases}$$

FUNZIONE $\in L^2(\mathbb{R})$ (può rappresentare uno stato)

Ora imponiamo le condizioni di RACCORDO:

In $x_1 = -l/2$:

$\psi_E^{(1)}(-\frac{l}{2}) = \psi_E^{(2)}(-\frac{l}{2})$ $\qquad c_1^- e^{-q_1 l/2\hbar} = c_2^+ e^{-ip_2 l/2\hbar} + c_2^- e^{ip_2 l/2\hbar}$

$\psi_E^{(1)\prime}(-\frac{l}{2}) = \psi_E^{(2)\prime}(-\frac{l}{2})$ $\qquad q_1 c_1^- e^{-q_1 l/2\hbar} = ip_2 (c_2^+ e^{-ip_2 l/2\hbar} - c_2^- e^{ip_2 l/2\hbar})$

In $x_2 = l/2$:

$\psi_E^{(2)}(\frac{l}{2}) = \psi_E^{(3)}(\frac{l}{2})$ $\qquad c_2^+ e^{ip_2 l/2\hbar} + c_2^- e^{-ip_2 l/2\hbar} = c_3^+ e^{-q_1 l/2\hbar}$

$\psi_E^{(2)\prime}(\frac{l}{2}) = \psi_E^{(3)\prime}(\frac{l}{2})$ $\qquad ip_2 (c_2^+ e^{ip_2 l/2\hbar} - c_2^- e^{-ip_2 l/2\hbar}) = -q_1 c_3^+ e^{-q_1 l/2\hbar}$

→ Sistema lineare omogeneo di 4 eq. in 4 incognite

Generalmente ha come unica soluzione $c_1^- = c_2^+ = c_2^- = c_3^+ = 0$ cioè $\psi_E \equiv 0$ che non è accettabile

⇓

Avrò soluzioni solo per determinati valori dei coefficienti delle equazioni lineari, cioè per determinati valori dell'energia E.

- Prime due eq. dicono che $c_1^- \neq 0$, altrimenti $c_2^+ = 0 = c_2^-$ e allora anche $c_3^+ = 0$ per le ultime due eq.

  ⇒ possiamo fissare la normalizzazione scegliendo $c_1^- = 1$

- Dalle prime due equazioni:

$$ip_2\left[\cancel{c_1^-}\, e^{-q_1 l/2\hbar} = c_2^+ e^{-ip_2 l/2\hbar} + c_2^- e^{ip_2 l/2\hbar}\right] \cdot (-ip_2)$$

$$+ \quad q_1 \cancel{c_1}\, e^{-q_1 l/2\hbar} = ip_2\left(c_2^+ e^{-ip_2 l/2\hbar} - c_2^- e^{ip_2 l/2\hbar}\right) \quad +$$

$$(q_1 + ip_2)\, e^{-q_1 l/2\hbar} = 2ip_2\, c_2^+ e^{-ip_2 l/2\hbar}$$

$$(q_1 - ip_2)\, e^{-q_1 l/2\hbar} = -2ip_2\, c_2^- e^{ip_2 l/2\hbar}$$

$$c_2^+ = \frac{q_1 + ip_2}{2ip_2}\, e^{-q_1 l/2\hbar}\, e^{ip_2 l/2\hbar}$$

$$c_2^- = -\frac{q_1 - ip_2}{2ip_2}\, e^{-q_1 l/2\hbar}\, e^{-ip_2 l/2\hbar}$$

- Andiamo a sostituire nelle ultime due eq.

$$c_2^+ e^{ip_2 l/2\hbar} + c_2^- e^{-ip_2 l/2\hbar} = c_3^+ e^{-q_1 l/2\hbar}$$

$$ip_2\left(c_2^+ e^{ip_2 l/2\hbar} - c_2^- e^{-ip_2 l/2\hbar}\right) = -q_1\, c_3^+ e^{-q_1 l/2\hbar}$$

$$c_3^+ = \frac{q_1 + ip_2}{2ip_2}\, e^{ip_2 l/\hbar} - \frac{q_1 - ip_2}{2ip_2}\, e^{-ip_2 l/\hbar}$$

$$\boxed{(q_1 + ip_2)^2\, e^{ip_2 l/\hbar} = (q_1 - ip_2)^2\, e^{-ip_2 l/\hbar}}$$

vincolo sui coeff. delle eq. lineari del sistema

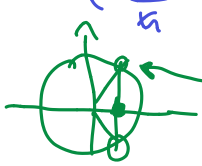
$$\left(\frac{q_1 - ip_2}{q_1 + ip_2}\right)^2 = e^{2ip_2 l/\hbar}$$

$$\frac{q_1 - ip_2}{q_1 + ip_2} = \pm e^{ip_2 l/\hbar} = \pm\left(\cos\left(\frac{p_2 l}{\hbar}\right) + i \sin\left(\frac{p_2 l}{\hbar}\right)\right)$$

$$= \frac{(q_1 - ip_2)(q_1 - ip_2)}{(q_1 + ip_2)(q_1 - ip_2)} = \frac{q_1^2 - p_2^2 - 2iq_1p_2}{q_1^2 + p_2^2}$$

1) Segno negativo:

$$-\cos\left(\frac{p_2 l}{\hbar}\right) = \frac{q_1^2 - p_2^2}{q_1^2 + q_2^2} \qquad \sin\left(\frac{p_2 l}{\hbar}\right) = \frac{2q_1p_2}{q_1^2 + p_2^2} > 0$$



$p_2 = \sqrt{2mE}$

$q_1 = \sqrt{2m(V_1 - E)}$

La prima equazione può essere riscritta usando le formule di bisezione $\left(\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1+\cos x}{2}\right)$:

$$\left|\cos\left(\frac{p_2 \ell}{2\hbar}\right)\right| = \sqrt{\frac{1+\cos(p_2\ell/\hbar)}{2}} \overset{\downarrow}{=} \sqrt{\frac{1}{2}\left[1 - \frac{q_1^2 - p_2^2}{q_1^2 + p_2^2}\right]} = \frac{p_2}{\sqrt{q_1^2 + p_2^2}} =$$

$$= \frac{p_2}{\sqrt{2mV_1}}$$

Definisco $\chi \equiv \frac{p_2 \ell}{2\hbar} = \frac{\ell}{2\hbar}\sqrt{2mE}$ $\qquad \xi = \sqrt{\frac{2\hbar^2}{mV_1\ell^2}}$

$$|\cos\chi| = \xi\chi$$

χ dip. dall'en. E

ξ non dip. da E

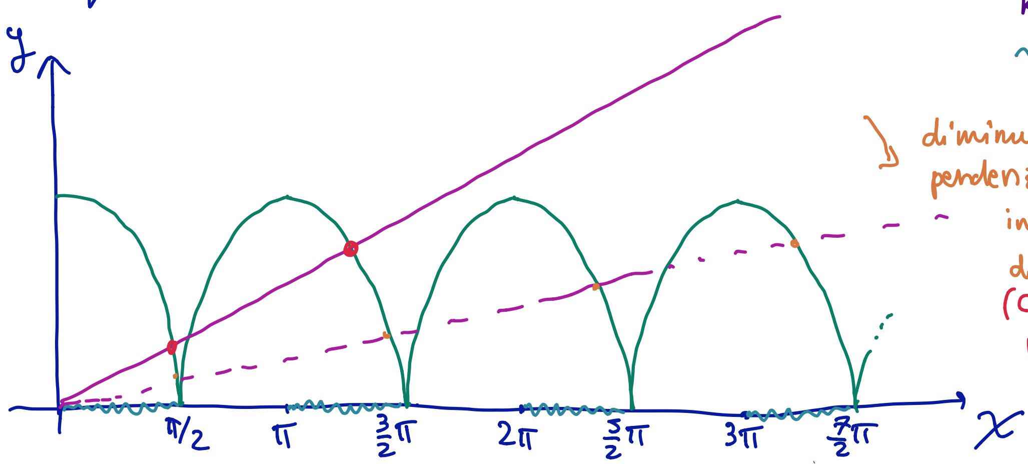
Voglio sapere se ci sono valori di E che risolvono l'equazione $|\cos\chi| = \xi\chi$ (è una delle eq. del probl. agli autovalori di $\hat{H}$)

risolviamola graficamente.

con $\sin 2\chi > 0$ $\quad 0 < 2\chi < \pi \mod 2\pi$

$\downarrow$

$k\pi < \chi < \frac{\pi}{2} + k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$



diminuendo ξ, cala la pendenza della retta, che intercetta un NUMERO CRESCENTE di intersezioni con $y = |\cos\chi|$

(Cioè, diminuendo ξ aumenta il numero di autovalori E di $\hat{H}$)

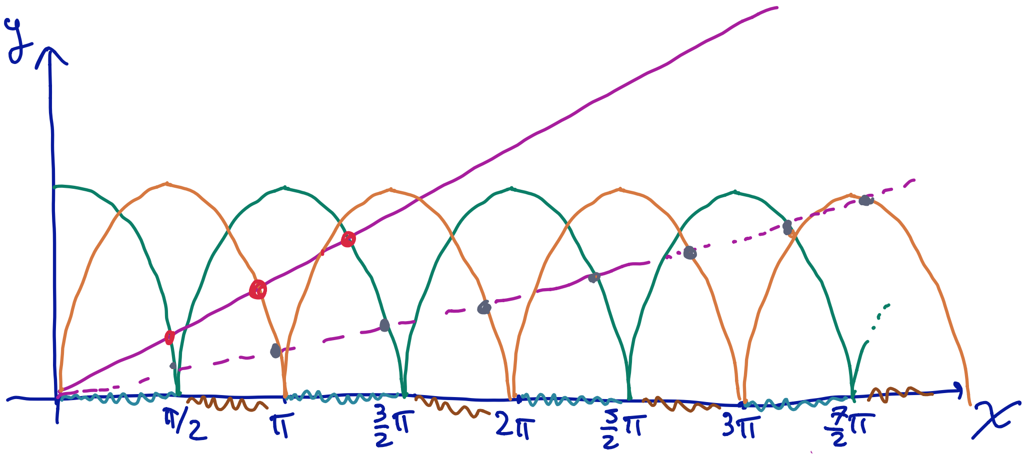
Rappresentiamo le funz. $y = |\cos\chi|$ e $y = \xi\chi$

- numero finito di valori possibili per E.
- esiste sempre almeno una soluzione, anche se $\xi \gg 1$

2) Segno positivo :

$$\cos^2 \underset{\overset{\shortparallel}{x}}{\frac{p_2 l}{2\hbar}} = \frac{q_1^2}{2mV_1} \qquad \sin \frac{p_2 l}{\hbar} = -\frac{2 q_1 p_2}{q_1^2 + p_2^2} < 0$$

$$|\sin x| = \sqrt{1-\cos^2 x} = \sqrt{1 - \frac{q_1^2}{2mV_1}} = \sqrt{1-1+(\xi x)^2} = \xi x$$



→ Il numero di soluzioni è $\underline{\geq 1}$, è $\underline{\text{finito}}$

e aumenta al decrescere di $\xi = \sqrt{\frac{2\hbar^2}{mV_1 l^2}}$, cioè

all'aumentare della larghezza della buca (l)

e dell'altezza della buca (V_1).

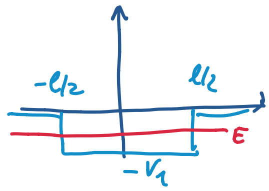
Appendice: facciamo limite $V_1 \to \infty$ (buca infinita)

$V_1 \to \infty \Rightarrow \xi \to 0 \Rightarrow$ soluzioni per $x = n\frac{\pi}{2}$ $\quad n \in \mathbb{N}^*$

cioè, preso $x = \frac{p_2 \ell}{2\hbar} = \sqrt{\frac{m\ell^2 E}{2\hbar^2}}$, ho $E_n = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2m\ell^2}$ (vedi buca infinita)

Appendice: facciamo limite $V_1 \to \infty$, $\ell \to 0$, ma $V_1 \cdot \ell = \alpha$ cost.

Prendiamo situazione



$\Rightarrow p_2 = \sqrt{2m(E-V_1)}$

$\xi = \sqrt{\frac{2\hbar^2}{mV_1\ell^2}} \to \infty \Rightarrow$ una sola soluzione per $x \to 0$

Studiamo bene questo limite ripartendo dall'eq. originaria attorno a $x \to 0$:

$q_1 = \sqrt{-2mE} \qquad p_2 = \sqrt{2m(E+V_1)}$

$$\cos\left(\frac{p_2\ell}{\hbar}\right) = -\frac{q_1^2 - p_2^2}{q_1^2 + q_2^2} \overset{(*)}{=} \frac{V_1 + 2E}{V_1}$$

$$\cos\left(\frac{\sqrt{2m(E+V_1)}\,\ell}{\hbar}\right)$$

$(E+V_1)^{1/2}\ell \to 0 \Rightarrow$ posso espandere coseno per piccolo argom.:

$$1 - \frac{1}{2}\left[\frac{2m(E+V_1)\ell^2}{\hbar^2}\right] \overset{(*)}{=} 1 + \frac{2E}{V_1} \qquad V_1 = \frac{\alpha}{\ell}$$

$$\to -\frac{m(E+V_1)\ell^2}{\hbar^2} = \frac{2E}{V_1} \to \left(\cancelto{0}{\frac{m\ell^2}{\hbar^2}} + \frac{2}{V_1}\right)E = -\frac{m\ell^2 V_1}{\hbar^2} = E = -\frac{m\alpha^2}{2\hbar^2}$$

(vedi potenziali a δ di Dirac)

Appendice: condizione sull'energia dal determinante della matrice associata al sist. omogeneo

$$
\begin{cases}
c_1^- e^{-q_1 \ell/2\hbar} = c_2^+ e^{-ip_2\ell/2\hbar} + c_2^- e^{ip_2\ell/2\hbar} \\
q_1 c_1^- e^{-q_1\ell/2\hbar} = ip_2\left(c_2^+ e^{-ip_2\ell/2\hbar} - c_2^- e^{ip_2\ell/2\hbar}\right) \\
\\
c_2^+ e^{ip_2\ell/2\hbar} + c_2^- e^{-ip_2\ell/2\hbar} = c_3^+ e^{-q_1\ell/2\hbar} \\
ip_2\left(c_2^+ e^{ip_2\ell/2\hbar} - c_2^- e^{-ip_2\ell/2\hbar}\right) = -q_1 c_3^+ e^{-q_1\ell/2\hbar}
\end{cases}
$$

Sist. omogeneo in 4 eq. Posso riscriverlo

$$
\begin{pmatrix}
e^{-q_1\ell/2\hbar} & -e^{-ip_2\ell/2\hbar} & -e^{ip_2\ell/2\hbar} & 0 \\
q_1 e^{-q_1\ell/2\hbar} & -ip_2 e^{-ip_2\ell/2\hbar} & ip_2 e^{ip_2\ell/2\hbar} & 0 \\
0 & e^{ip_2\ell/2\hbar} & e^{-ip_2\ell/2\hbar} & -e^{-q_1\ell/2\hbar} \\
0 & ip_2 e^{ip_2\ell/2\hbar} & -ip_2 e^{-ip_2\ell/2\hbar} & q_1 e^{-q_1\ell/2\hbar}
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} c_1^- \\ c_2^+ \\ c_2^- \\ c_3^+ \end{pmatrix} = 0
$$

Ha soluzioni diverse da $(0,0,0,0)$ solo se det $= 0$

$$
\begin{aligned}
\det = {} & e^{-q_1\ell/\hbar}\left[-iq_1p_2 e^{-ip_2\ell/\hbar} + p_2^2 e^{ip_2\ell/\hbar} - p_2^2 e^{-ip_2\ell/\hbar} - iq_1p_2 e^{ip_2\ell/\hbar}\right] \\
& + e^{-q_1\ell/\hbar}\left[+q_1^2 e^{-ip_2\ell/\hbar} - iq_1p_2 e^{ip_2\ell/\hbar} - iq_1p_2 e^{-ip_2\ell/\hbar} - q_1^2 e^{ip_2\ell/\hbar}\right] \\
= {} & e^{-q_1\ell/\hbar}\left[e^{-ip_2\ell/\hbar}\left(q_1 - ip_2\right)^2 - e^{ip_2\ell/\hbar}\left(q_1+ip_2\right)^2\right]
\end{aligned}
$$

$$
= 0 \quad \longleftrightarrow \quad \boxed{\left(\frac{q_1 - ip_2}{q_1 + ip_2}\right)^2 = e^{2ip_2\ell/\hbar}}
$$

Quando questa relaz. è soddisfatta, le linee della matrice sono dip. e ce ne sono solo 3 indip. Prendiamo le prime tre.

$$\begin{pmatrix} e^{-q_1 l/2\hbar} & -e^{-ip_2 l/2\hbar} & -e^{ip_2 l/2\hbar} & 0 \\ q_1 e^{-q_1 l/2\hbar} & -ip_2 e^{-ip_2 l/2\hbar} & ip_2 e^{ip_2 l/2\hbar} & 0 \\ 0 & e^{ip_2 l/2\hbar} & e^{-ip_2 l/2\hbar} & -e^{-q_1 l/2\hbar} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1^- \\ c_2^+ \\ c_2^- \\ c_3^+ \end{pmatrix} = 0$$

Possiamo fissare $c_1^- = 1$, perché se fosse $= 0$, allora le prime due righe (indip.!) implicherebbero c_2^+ e $c_2^- = 0$ e la terza allora $c_3^+ = 0$.

$$\begin{pmatrix} e^{-ip_2 l/2\hbar} & e^{ip_2 l/2\hbar} & 0 \\ ip_2 e^{-ip_2 l/2\hbar} & -ip_2 e^{ip_2 l/2\hbar} & 0 \\ e^{ip_2 l/2\hbar} & e^{-ip_2 l/2\hbar} & -e^{-q_1 l/2\hbar} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_2^+ \\ c_2^- \\ c_3^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-q_1 l/2\hbar} \\ q_1 e^{-q_1 l/2\hbar} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} e^{-ip_2 l/2\hbar} & e^{ip_2 l/2\hbar} \\ ip_2 e^{-ip_2 l/2\hbar} & -ip_2 e^{ip_2 l/2\hbar} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_2^+ \\ c_2^- \end{pmatrix} = e^{-q_1 l/2\hbar} \begin{pmatrix} 1 \\ q_1 \end{pmatrix}$$

$$c_3^+ = e^{q_1 l/2\hbar} \left(e^{ip_2 l/2\hbar} c_2^+ + e^{-ip_2 l/2\hbar} c_2^- \right)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ ip_2 & -ip_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-ip_2 l/2\hbar} c_2^+ \\ e^{ip_2 l/2\hbar} c_2^- \end{pmatrix} = e^{-q_1 l/2\hbar} \begin{pmatrix} 1 \\ q_1 \end{pmatrix}$$

inversa

$$\det = -2ip_2$$

$$\frac{1}{2ip_2} \begin{pmatrix} ip_2 & 1 \\ ip_2 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} c_2^+ e^{-ip_2 l/2\hbar} \\ c_2^- e^{ip_2 l/2\hbar} \end{pmatrix} = \frac{1}{2ip_2} e^{-q_1 l/2\hbar} \begin{pmatrix} q_1 + ip_2 \\ -q_1 + ip_2 \end{pmatrix}$$

$$c_3^+ = \frac{q_1 + ip_2}{2ip_2} e^{ip_2 l/\hbar} - \frac{q_1 - ip_2}{2ip_2} e^{-ip_2 l/\hbar}$$