P.I. su spazi non semplicem. connessi

$$K(q_2, q_1; t_2, t_1) = \underbrace{\int_{\{\text{tutti i cammini che connettono } q_1 \text{ e } q_2\}} \mathcal{D}q \; e^{iS[q]}}$$

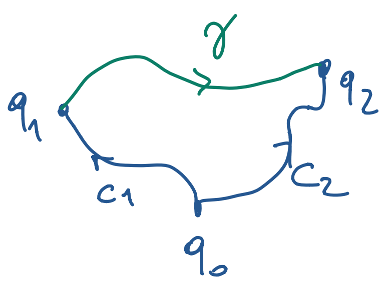
Questi cammini cadono in CLASSI di OMOTOPIA (classi di equiv., dove la relaz. di equivalenza è l'essere deformabili continuamente)

Ci sono tante classi di omotopia di cammini da q_1 a q_2 quante classi di omotopia di loops (che iniziano e finiscono in un pto base q_0) cioè elem. di $\pi_1(N)$

$\Downarrow$

Isomorfismo: fissiamo due cammini c_1 & c_2 che connettono q_0 a q_1 & q_2

$$[\gamma] \longleftrightarrow [c_2^{-1} * \gamma * c_1] \equiv [\alpha]$$



Le classi di omotopia sono INSIEMI DISGIUNTI $\Rightarrow$ il P.I. integra su un'unione disgiunta di classi di omotopia

$\Downarrow$

Integrale sui cammini K sarà una somma di integrali su una singola classe:

$$K_\alpha(q_2, q_1; t_2, t_1) = \int_{\{\text{tutti i cammini da } q_1 \text{ a } q_2 \text{ nella classe di omotopia } \cong [\alpha] \,\in\, \pi_1(N)\}} \mathcal{D}q_\alpha \; e^{-S_E[q]/\hbar}$$

In principio possiamo def. K come una somma PESATA dei K_α

$$K(q_2, q_1; t_2, t_1) \equiv \sum_{\alpha \in \pi^1(N)} \chi(\alpha)\, K_\alpha(q_2, q_1; t_2, t_1)$$

I pesi complessi $\chi(\alpha)$ devono soddisfare le seguenti condiz.:

1) l'ampiezza totale deve essere indipendente dalla scelta di c_1 e c_2;

2) l'ampiezza deve soddisfare

$$K(q_2, q_1; t_2, t_1) = \int dq\, K(q_2, q; t_2, t)\, K(q, q_1; t, t_1) \qquad t_1 < t < t_2$$

$$\Downarrow$$

$$\chi(\alpha * \beta) = \chi(\alpha)\, \chi(\beta)$$ $\rightsquigarrow$ χ è una mappa che rispetta il prodotto del gruppo $\pi_1(N)$ (omomorfismo di gruppi)

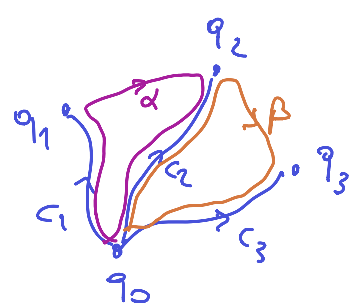
$\chi(\alpha)$ forma una rappresentazione unitaria 1 dim del gruppo fondam. $\pi_1(N)$, cioè $|\chi(\alpha)| = 1$

χ = "carattere del gruppo"

Dim. $\alpha \mapsto c_2 * \alpha * c_1^{-1} = \gamma$

Ora prendiamo tre loops α, β, δ con pto base q_0

t.c. $\beta * \alpha = \delta$



Siano q_1, q_2, q_3 pti di N

$c_3 * \rho * c_1^{-1}$ cammino da q_1 a q_3

Ogni cammino da q_1 a q_3 può essere splittato in un cammino da q_1 a q_2 e uno da q_2 a q_3

$$\underbrace{c_3 * \overset{\beta * \alpha}{\rho} * c_1^{-1}}_{q_1 \to q_3} = \underbrace{c_3 * \beta * c_2^{-1}}_{q_2 \to q_3} * \overbrace{}^{e_{q_0}} \underbrace{c_2 * \alpha * c_1}_{q_1 \to q_2}$$

$$K(q_3, q_1; t_3, t_1) = \int dq_2 \, K(q_3, q_2; t_3, t_2) K(q_2, q_1; t_2, t_1) \qquad t_1 < t_2 < t_3$$

Per def.

$$\Downarrow$$

$$\sum_{\rho \in \pi_1(N)} \chi(\rho) K_\rho(q_3, q_1; t_3, t_1) = \sum_{\alpha, \beta \in \pi_1(N)} \chi(\alpha) \chi(\beta) \int dq_2 \, K_\beta(q_3, q_2; t_3, t_2) K(q_2, q_1; t_2, t_1)$$

$$\sum_\beta \to \sum_\rho \qquad \beta = \rho * \alpha^{-1}$$

$$\int dq_2 \, K_{\rho * \alpha^{-1}}(q_3, q_2; t_3, t_2) K_\alpha(q_2, q_1; t_2, t_1)$$

$$\sum_{\rho, \alpha \in \pi_1(N)} \chi(\alpha) \chi(\rho * \alpha^{-1}) \int dq_2 \, K_{\rho * \alpha^{-1}}(q_3, q_2; t_3, t_2) K_\alpha(q_2, q_1; t_2, t_1)$$

$$\sum_{\rho, \alpha \in \pi_1(N)} \chi(\gamma) \int dq_2 \, K_{\rho * \alpha^{-1}}(q_3, q_2; t_3, t_2) K_\alpha(q_2, q_1; t_2, t_1) = \quad \forall K$$

$$\Longrightarrow \quad \chi(\rho) = \chi(\alpha) \chi(\rho * \alpha^{-1})$$

o detto diversamente

$$\chi(\alpha * \beta) = \chi(\alpha) \chi(\beta)$$

Prendiamo altri cammini arbitrari $\bar{c}_1$ e $\bar{c}_2$ $\neq c_1, c_2$
$q_0 \to q_1$ $\quad q_0 \to q_2$

$$\bar{c}_2 * \alpha * \bar{c}_1^{-1} = c_2 * c_2^{-1} * \bar{c}_2 * \alpha * \bar{c}_1^{-1} * c_1 * c_1^{-1}$$

$$= c_2 * \mu * \alpha * \lambda * c_1^{-1}$$

loops (con pto base q_0)

Il valore assoluto dell'ampiezza totale deve essere indip. del rimpiazzamento $c_1 \to \bar{c}_1$ e $c_2 \to \bar{c}_2$.

$$|K(q_2, q_1)| = \left|\sum_\alpha \chi(\alpha) K_\alpha(q_2, q_1)\right| = \left|\sum_{\mu*\alpha*\lambda} \chi(\mu*\alpha*\lambda) K_\alpha(q_2, q_1)\right|$$

$$= \left|\sum_\alpha \chi(\mu)\chi(\lambda)\chi(\alpha) K_\alpha\right| =$$

$$= |\chi(\mu)\chi(\lambda)| \left|\sum_\alpha \chi(\alpha) K_\alpha\right|$$

$$\Downarrow$$

$$|\chi(\mu*\lambda)| = 1 \qquad \forall \mu, \lambda \qquad \text{, cioè}$$

$$|\chi(\alpha)| = 1 \qquad \forall \alpha \in \pi_1(N) \qquad //$$

PARTICELLE IDENTICHE in $\mathbb{R}^d$ (N particelle)

Un pto nello spazio delle config è

$$\bar{x} = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_N) \in \left(\underbrace{\mathbb{R}^d \times \dots \times \mathbb{R}^d}_{N\text{-volte}} \setminus \{ \bar{x}_i = \bar{x}_j \}_{i \neq j} \right) \Big/ S_N$$

Gruppo delle permutazioni di N oggetti

Questo spazio NON è semplicem. connesso

Loop non contraibili al loop cost. (in maniera continua).

Loop : $[0,1] \to N$

$$t \mapsto (\bar{x}_1^0, \dots, \bar{x}_{i-1}^0, \bar{x}_i(t), \bar{x}_{i+1}^0, \dots, \bar{x}_{j-1}^0, \bar{x}_j(t), \bar{x}_{j+1}^0, \dots, \bar{x}_N^0)$$

con $\bar{x}_i(0) = \bar{x}_i^0 \quad \bar{x}_j(0) = \bar{x}_j^0$

$\bar{x}_i(1) = \bar{x}_j^0 \quad \bar{x}_j(1) = \bar{x}_i^0$

$\forall$ elem. di S_N otteniamo un loop in $\pi_1(N)$

[In $(\mathbb{R}^d)^N$ questo è un CAMMINO che scambia la posizione di due particelle.]

$$\rightsquigarrow \quad \pi_1\left(\left[(\mathbb{R}^d)^N \setminus \{\dots\} \right] \Big/ S_N \right) = S_N \qquad (\text{vero per } d \geq 3)$$

Per capire che ampiezze (= funzioni d'onda) possiamo costruire, cioè che teorie quantiche di particelle identiche abbiamo (quantizzazione di una teoria classica con particelle identiche), dobbiamo trovare quali possibili χ usare in K.

Ci sono solo due caratteri di S_N (cioè omomorfismi di gruppo che mappano in $U(1)$ ← gruppo fasi):

1) $\chi^B(\alpha) = 1 \quad \forall \alpha \in S_N$

2) $\chi^F(\alpha) = \begin{cases} 1 & \forall \alpha \text{ che sia una permutaz. PARI} \\ -1 & \forall \alpha \text{ " " " " DISPARI} \end{cases}$

$$\Rightarrow \quad K^B = \sum_\alpha \chi^B(\alpha) K_\alpha$$ ⟷ funz. d'onda SIMMETRICHE sotto scambio partic. BOSONI

$$K^F = \sum_\alpha \chi^F(\alpha) K_\alpha$$ ⟷ funz. d'onda ANTISIMMETRICHE sotto scambio partic. FERMIONI

P.I. e termine Θ.

C'è una corrispondenza 1-a-1 tra i caratteri di $\pi_1(N)$ e i potenziali vettori (flat connection) A che possono apparire come termini di derivata totale nella Lagrangiana:

$$\chi(\alpha) = e^{\frac{ie}{\hbar c}\oint_\ell A} \qquad \ell \in \alpha \text{ (classe omotopa)}, \quad \mathcal{C}_{loop}$$

$$= e^{in\theta} \qquad \theta \in [0, 2\pi[$$

$\pi_1(N) = \mathbb{Z}$

$dA = 0 \quad (\bar\nabla \times \bar A = 0)$

Dato A che sia flat connection, introduciamo nell'azione

$$S_T = \frac{e}{c}\int_{t_1}^{t_2} dt\ \dot q \cdot \bar A \;\Rightarrow\; \int_{q_1 \to q_2} A$$

← termine di derivata totale il cui valore dipende solo dalla classe di omotopia del cammino

"termine topologico"

$$K(q_2, q_1) = \int_{q_1 q_2} \mathcal{D}q\, e^{i(S_0 + S_T)/\hbar} = \sum_\alpha e^{\frac{i}{\hbar}S_T} \int_{q_1 q_2} \mathcal{D}q_\alpha\, e^{iS_0/\hbar} =$$

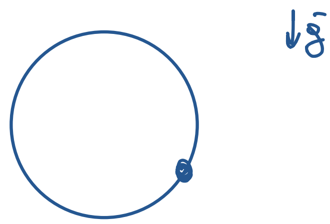
$$= \sum_\alpha e^{\frac{ie}{\hbar c}\int_{c_2 \alpha c_1^{-1}} A} K_\alpha(q_2, q_1) =$$

$$= \sum_\alpha \underbrace{e^{\frac{ie}{\hbar c}\int_{c_2} A}}_{\text{ind. da }\alpha}\ e^{\frac{ie}{\hbar c}\oint_\alpha A}\ \underbrace{e^{\frac{ie}{\hbar c}\int_{c_1^{-1}} A}}_{\text{indip. da }\alpha} K_\alpha(q_2, q_1)$$

$$= \underbrace{e^{\frac{ie}{\hbar c}\left(\int_{c_2} A + \int_{c_1^{-1}} A\right)}}_{\text{fase overall irrilevante}} \boxed{\sum_\alpha \chi(\alpha) K_\alpha(q_2, q_1)}$$

Se consideriamo P.I. euclideo, il contributo maggiore a K_α (in approssimaz. semiclassica) viene dalla soluzione <u>ISTANTONICA</u> nella classe di omotopia α.

PENDOLO



Spazio delle config. $= S^1$ (cerchio) $\qquad \pi^1(S^1) \cong \mathbb{Z}$

⇝ ci aspettiamo quantizzazioni inequiv. parametrizzate da $\theta \in [0, 2\pi[$

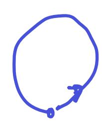
Lagrangiana del problema: $\quad L_0 = \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 - V(\varphi)$ con $V(\varphi) = b(1-\cos\varphi)$

$$0 \le \varphi < 2\pi$$

Termine topologico: $\quad L_T = \theta \frac{\hbar}{2\pi} \frac{d\varphi}{dt}$ (derivata totale)

↪ $S_T = \theta \frac{\hbar}{2\pi} \int dt \frac{d\varphi}{dt}$ $\qquad$ & assumiamo che $\varphi \xrightarrow[|t|\to\infty]{} 0$

allora $S_T = \theta \hbar \underbrace{W[\varphi]}_{\text{winding number } = n}$



Per ognuna delle teorie parametrizzate da θ

- Hilb sp. $\mathcal{H} = L^2(S^1)$ $\qquad \psi(\varphi + 2\pi) = \psi(\varphi)$
- Hamiltoniana $\quad H_\theta = -\frac{\hbar^2}{2}\left(\frac{\partial}{\partial\varphi} - \frac{i\theta}{2\pi}\right)^2 + V(\varphi)$

Possiamo descrivere lo stesso sist. in maniera equiv.:

- $\mathcal{H} = L^2(S^1) \qquad \psi_\theta(\varphi + 2\pi) = e^{-i\theta}\, \psi_\theta(\varphi)$
- $H_0 = -\frac{\hbar^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + V(\varphi)$

$\rightsquigarrow$ c'è un ISOMORFISMO UNITARIO $\quad U = e^{-\frac{i\theta}{2\pi}\hat{\varphi}}$

$$\left(H_0 = U H_\theta U^{-1} \right)$$

Istantoni nel Pendolo

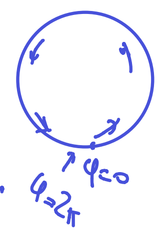
$$S_E[\varphi] = \int dt \left[\frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 + b(1 - \cos\varphi) \right]$$

$\hookrightarrow$ Soluzioni delle eq. del moto :

$$\varphi(t) = \pm\, 4 \arctg\left[e^{\sqrt{b}(t - t_0)} \right]$$

a $t \to -\infty \qquad \varphi(t) \to 0$

a $t \to +\infty \qquad \varphi(t) \to 2\pi$



winding number $n = 1$

È un cammino che non può essere def. in maniera continua al cammino cost. $\varphi(t) = 0\ \forall t$.

Gli istantoni cadono in classi di omotopia ; per ogni $\alpha \in \pi_1(N)$ c'è una soluzione istantonica :

$$K_\alpha \sim e^{iS[\mathrm{ist.}^\alpha]/\hbar} \cdot \det_\alpha(\dots)^{-1/2}$$

$$K = \sum_\alpha \underbrace{\chi(\alpha)\, e^{iS[\mathrm{ist.}^\alpha]/\hbar}}_{\sim\, e^{i(S[\mathrm{ist.}^\alpha] + S_T[\mathrm{ist.}^\alpha])/\hbar}} \cdot \det_\alpha(\dots)^{-1/2}$$