ISBN 978-88-08-18229-6

79. Una palla viene scagliata verticalmente *verso il basso* con *velocità iniziale* v_0 da un'altezza h. (a) Quale sarà la sua velocità subito prima di toccare il suolo? (b) Quanto tempo impiegherà a raggiungere il suolo? Quali sarebbero le risposte (c) al primo punto e (d) al secondo punto se la palla fosse stata lanciata verticalmente *verso l'alto* dalla stessa altezza e con la stessa velocità iniziale? Prima di effettuare i calcoli, stimate se le risposte ai quesiti (c) e (d) saranno maggiori, minori o uguali a quelle di (a) e (b).

80. La posizione di una particella che si muove lungo l'asse y è data da

$$y = (2{,}0\ \text{m})\ \sin[\pi t/(4{,}0\ \text{s})].$$

Calcolare (a) la velocità media tra gli istanti $t = 0$ e $t = 2{,}0$ s, (b) la velocità istantanea per $t = 0$, $t = 1{,}0$ s e $t = 2{,}0$ s, (c) l'accelerazione media tra $t = 0$ e $t = 2{,}0$ s, e (d) l'accelerazione istantanea agli istanti $t = 0$, $t = 1{,}0$ s e $t = 2{,}0$ s.

Vettori

3.1 VETTORI E LORO COMPONENTI

Obiettivi di apprendimento

Dopo aver letto questo paragrafo dovreste essere in grado di...

3.01 Sommare i vettori graficamente e algebricamente.
3.02 Sottrarre un vettore da un altro.
3.03 Calcolare le componenti di un vettore in un dato sistema di coordinate, evidenziandole in un disegno.
3.04 Disegnare il vettore e determinarne il modulo e l'orientamento, date le sue componenti.
3.05 Convertire le misure dagli angoli date in gradi e in radianti.

Idee chiave

- Le grandezze scalari, come la temperatura, presentano solamente un modulo, o valore assoluto. Sono individuate da un numero seguito da un'unità di misura (ad esempio, 10 °C) e obbediscono alle regole dell'aritmetica e dell'algebra ordinaria. I vettori, come lo spostamento, sono dotati, oltre che di modulo, anche di un orientamento, rappresentato da una direzione e da un verso (ad esempio, 5 m in direzione verticale verso l'alto) e obbediscono alle regole dell'algebra vettoriale.
- Due vettori $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ si possono sommare con un metodo grafico disegnandoli a una stessa scala e disponendoli coi loro rispettivi orientamenti in modo che la punta dell'uno coincida con la coda dell'altro. Il vettore che congiunge la coda del primo con la punta del secondo rappresenta il vettore somma $\boldsymbol{s}$. Per sottrarre $\boldsymbol{b}$ da $\boldsymbol{a}$, si capovolge il verso di $\boldsymbol{b}$ per ottenere $-\boldsymbol{b}$ e poi si somma $-\boldsymbol{b}$ ad $\boldsymbol{a}$. L'addizione vettoriale gode delle proprietà commutativa e associativa.
- Le componenti (che sono scalari) a_x e a_y di un vettore bidimensionale $\boldsymbol{a}$ riportate sugli assi coordinati di un sistema cartesiano si trovano conducendo le perpendicolari dalla punta del vettore $\boldsymbol{a}$ agli assi coordinati. Le componenti sono date da

$$a_x = a\cos\theta \quad \text{e} \quad a_y = a\sin\theta,$$

ove θ rappresenta l'angolo tra l'asse x nel verso positivo e la direzione del vettore $\boldsymbol{a}$. Il segno algebrico di una componente indica il verso lungo l'asse associato. Date le sue componenti, possiamo trovare il modulo e l'orientamento di un vettore $\boldsymbol{a}$ mediante le relazioni

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \qquad \text{e} \qquad \tan\theta = \frac{a_y}{a_x}.$$

L'aspetto fisico

In fisica si trattano numerose grandezze caratterizzate non solo da una quantità, ma anche dalla direzione in cui si manifestano; richiedono pertanto, per poterle descrivere, uno specifico linguaggio matematico, il linguaggio dei vettori. È questo un linguaggio che si usa in tutti gli ambiti tecnici e scientifici, e persino nella comunicazione quotidiana. Quando si dà un'indicazione del tipo «Vada diritto per 500 metri, poi svolti a sinistra e proceda per altri 100 metri», si sta utilizzando un linguaggio vettoriale. La navigazione di qualsiasi genere, infatti, è fondata sui vettori, ma la fisica e l'ingegneria hanno bisogno dei vettori anche per descrivere fenomeni in cui siano coinvolte la rotazione o le forze magnetiche, per esempio, che incontreremo nel corso dei nostri studi. In questo capitolo gettiamo le basi di questo linguaggio vettoriale.

Vettori e scalari

Una particella confinata su una linea retta si può muovere esclusivamente in due sensi. Possiamo definire il suo moto come positivo in uno di questi sensi e negativo nell'altro. Ma, per una particella che si muove in due o tre dimensioni, un segno + o un segno – non sono più sufficienti a indicare la direzione del suo moto. È invece necessario usare un *vettore*.

Un **vettore** è un'entità individuata da un'**intensità**, o *ampiezza* o *modulo*, da una **direzione**, cioè da una linea retta lungo la quale agisce, e da un **verso**, cioè da uno dei due sensi possibili lungo la retta; esso si combina con altri vettori secondo regole che esamineremo fra

ISBN 978-88-08-18229-6

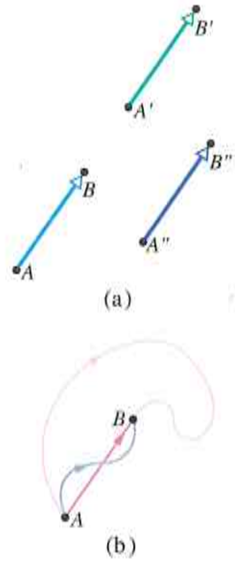


Figura 3.1 (a) Le tre frecce rappresentano tutte lo stesso spostamento, avendo stesso modulo, direzione e verso.
(b) I tre percorsi che collegano i due punti corrispondono tutti allo stesso vettore spostamento.

poco. Una **grandezza vettoriale** è una grandezza che si può rappresentare con un vettore; cioè è una grandezza che ha associati un modulo, una direzione e un verso. Alcune grandezze fisiche che si possono rappresentare con vettori sono lo spostamento, la velocità, l'accelerazione. Ne incontrerete molte altre nel corso di questo libro ed è per questo che imparare le regole di combinazione dei vettori vi aiuterà molto nel prosieguo degli studi.

Non tutte le grandezze fisiche implicano una direzione. Ne sono esempio la temperatura, la pressione, l'energia, la massa e il tempo, nessuna delle quali «è orientata» nello spazio. Chiamiamo tali **grandezze scalari** e le trattiamo con le regole dell'algebra ordinaria. Solo un valore numerico, dotato di segno, (come in −10 °C) è sufficiente a individuare uno scalare.

La più semplice grandezza vettoriale è lo spostamento, cioè un cambiamento di posizione. Il vettore che rappresenta lo spostamento è detto *vettore spostamento*. Similmente abbiamo il *vettore velocità*, il *vettore accelerazione*, ecc. Se una particella cambia di posizione, spostandosi da A a B come nella figura 3.1a, diciamo che subisce uno spostamento da A a B, che possiamo rappresentare con una freccia, simbolo del vettore, che punta da A verso B. In questo libro, per distinguere i simboli di vettore dagli altri tipi di frecce usiamo nei disegni una punta della freccia «vuota».

Le frecce da A a B, da A' a B' e da A'' a B'' nella figura 3.1a hanno uguale modulo, direzione e verso. Esse rappresentano un uguale spostamento e quindi lo stesso *cambiamento di posizione* per la particella, e non facciamo distinzione fra una freccia e l'altra. Traslando un vettore non si modifica il suo valore, se non variano il suo modulo, la sua direzione e il suo verso.

Il vettore spostamento non ci dice nulla dell'effettivo itinerario che la particella percorre. Nella figura 3.1b, per esempio, tutti e tre i percorsi che collegano i punti A e B corrispondono allo stesso vettore spostamento, quello della figura 3.1a. I vettori spostamento rappresentano soltanto alcuni aspetti globali del moto, non il moto in sé.

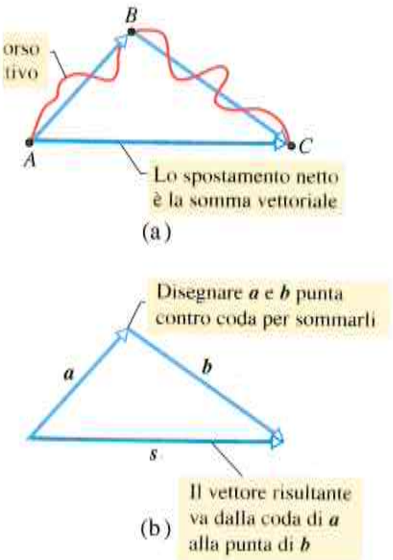


Figura 3.2 (a) AC è la somma vettoriale dei vettori AB e BC. (b) Gli stessi vettori con un'altra notazione.

Somma di vettori: metodo grafico

Supponiamo che, come nella figura 3.2a, una particella si muova da A a B e, in seguito, da B a C. Possiamo rappresentare il suo spostamento globale (senza tener conto dell'itinerario effettivamente percorso) con due successivi vettori spostamento AB e BC. L'effetto complessivo di questi due spostamenti è un solo spostamento da A a C. Chiamiamo AC la **somma** (o **risultante**) **dei vettori** AB e BC. Questa somma non è la consueta somma algebrica.

Nella figura 3.2b abbiamo ridisegnato i vettori della figura 3.2a con i nomi modificati secondo la convenzione d'uso, che adotteremo anche noi d'ora in poi, cioè con caratteri in grassetto come $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ o $\boldsymbol{s}$. Scrivendo a mano si possono identificare i vettori tracciando una freccia al di sopra del simbolo, ad esempio $\vec{a}$, $\vec{b}$ o $\vec{s}$.* Se vogliamo indicare solo il modulo del vettore (una grandezza che è soltanto positiva), dobbiamo usare i corrispondenti caratteri chiari, come a, b o s. Il simbolo in grassetto indica la sussistenza di tutte le proprietà del vettore: il modulo, la direzione e il verso.

Possiamo rappresentare la relazione fra i tre vettori della figura 3.2b con l'espressione

$$\boldsymbol{s} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}, \tag{3.1}$$

che indica che il vettore $\boldsymbol{s}$ è la **somma vettoriale** dei vettori $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$. Il segno + nella (3.1) e la parola «somma» hanno per i vettori significati diversi da quelli della normale algebra, perché coinvolgono *sia* il modulo *sia* la direzione e il verso.

Il procedimento per sommare graficamente due vettori $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ è suggerito nella figura 3.2: (1) tracciate su un foglio il vettore $\boldsymbol{a}$ in una scala comoda e alla sua giusta inclinazione; (2) tracciate il vettore $\boldsymbol{b}$ nella stessa scala con la sua inclinazione e con la coda coincidente con la punta del vettore $\boldsymbol{a}$; (3) la somma vettoriale $\boldsymbol{s}$ si costruisce tracciando una freccia dalla coda di $\boldsymbol{a}$ alla punta di $\boldsymbol{b}$. Si noti che questo procedimento tiene conto sia del modulo sia della direzione e del verso; potrete facilmente generalizzare questo procedimento per sommare più di due vettori.

Proprietà. La somma di vettori così definita ha due proprietà importanti: in primo luogo l'ordine degli addendi non è rilevante (fig. 3.3). Sommando $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ si ottiene lo stesso risultato che sommando $\boldsymbol{b}$ ad $\boldsymbol{a}$, cioè

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \quad \text{(proprietà commutativa).} \tag{3.2}$$

* Questa notazione è anche in uso in molti libri. [*N.d.T.*]

ISBN 978-88-08-18229-6

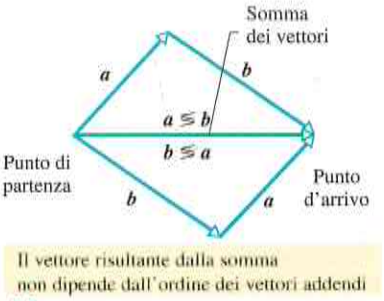


Figura 3.3 I due vettori $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ si possono sommare in entrambi gli ordini possibili; vedi l'equazione 3.2.

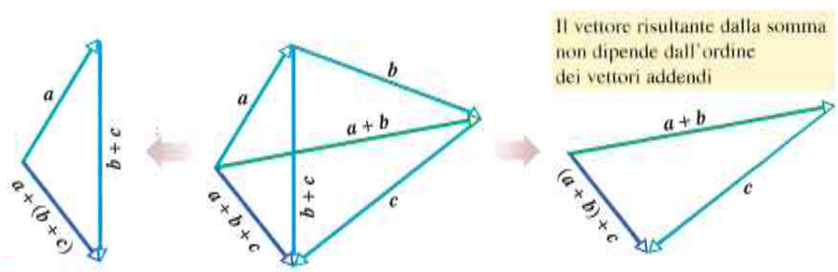


Figura 3.4 I tre vettori $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{c}$ si possono raggruppare in qualunque modo quando vengono sommati: vedi l'equazione 3.3.

In secondo luogo, se ci sono più di due vettori, non è rilevante il modo in cui li raggruppiamo quando li sommiamo. Infatti, se vogliamo sommare i vettori $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{c}$, possiamo per prima cosa sommare $\boldsymbol{a}$ con $\boldsymbol{b}$, e quindi addizionare la loro somma vettoriale a $\boldsymbol{c}$. D'altra parte possiamo per prima cosa sommare $\boldsymbol{b}$ con $\boldsymbol{c}$ e quindi addizionare *questa* somma ad $\boldsymbol{a}$. Otteniamo lo stesso risultato sia per una via che per l'altra, come si vede nella figura 3.4. Sotto forma di equazione:

$$(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) \qquad \text{(proprietà associativa).} \tag{3.3}$$

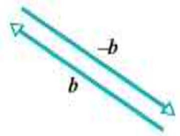


Figura 3.5 I vettori $\boldsymbol{b}$ e $-\boldsymbol{b}$ hanno lo stesso modulo e la stessa direzione ma presentano versi opposti.

Il vettore $-\boldsymbol{b}$ è un vettore con lo stesso modulo e direzione di $\boldsymbol{b}$, ma orientato in verso opposto (fig. 3.5). Se provate a sommare i due vettori della figura 3.5 potete constatare che

$$\boldsymbol{b} + (-\boldsymbol{b}) = 0$$

Sommare $-\boldsymbol{b}$ ha l'effetto di sottrarre $\boldsymbol{b}$. Utilizziamo questa proprietà per definire la differenza tra due vettori. Se $\boldsymbol{d} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$, allora

$$\boldsymbol{d} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{b}) \qquad \text{(sottrazione di vettori).} \tag{3.4}$$

Quindi troviamo il vettore differenza $\boldsymbol{d}$ sommando il vettore $-\boldsymbol{b}$ al vettore $\boldsymbol{a}$. La figura 3.6 mostra come ciò si possa costruire graficamente.

Come nell'algebra comune, è possibile trasportare un termine che contenga un vettore da un membro all'altro di un'equazione vettoriale: occorre come sempre cambiarne il segno. Per esempio possiamo manipolare l'equazione 3.4 come segue:

$$\boldsymbol{d} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \qquad \text{oppure} \qquad \boldsymbol{a} = \boldsymbol{d} + \boldsymbol{b}.$$

Tenete presente che, anche se abbiamo usato vettori spostamento come esempio, le regole per la somma e la sottrazione valgono per vettori di qualunque tipo, sia che essi rappresentino forze, velocità o qualunque altra grandezza. Tuttavia ha senso sommare solo vettori dello stesso tipo. Per esempio possiamo sommare due spostamenti o due velocità, ma non ha senso sommare uno spostamento e una velocità. Nel mondo degli scalari sarebbe come tentare di sommare 21 s e 12 m.

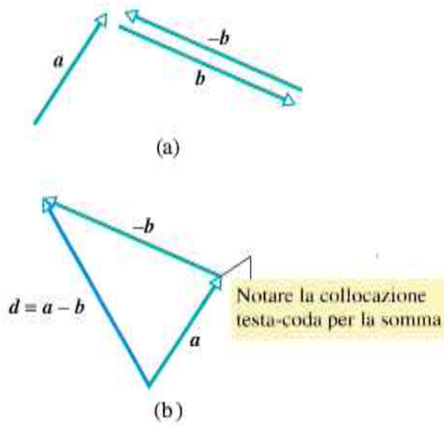


Figura 3.6 (a) Vettori $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ e $-\boldsymbol{b}$. (b) La sottrazione del vettore $\boldsymbol{b}$ dal vettore $\boldsymbol{a}$ si esegue sommando il vettore $-\boldsymbol{b}$ al vettore $\boldsymbol{a}$.

✔ VERIFICA 1

I moduli di due spostamenti $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ sono rispettivamente 3 m e 4 m. La loro somma è $\boldsymbol{c}$. Si considerino vari orientamenti di $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ e si determini (a) il massimo valore possibile per il modulo di $\boldsymbol{c}$ e (b) il suo minimo valore possibile.

(a) 7 ; (b) 1

I vettori e le loro componenti

Sommare i vettori con il metodo grafico può essere noioso. Una tecnica più semplice e facile da applicare coinvolge l'algebra ma richiede che i vettori siano collocati in un sistema di coordinate ortogonali. Gli assi x e y sono in genere tracciati sul piano della pagina, come nella figura 3.7a. L'asse z fuoriesce dalla pagina direttamente dall'origine e per il momento lo ignoriamo occupandoci solo di vettori bidimensionali.

La **componente** di un vettore è la sua proiezione su un asse. Nella figura 3.7a, per esempio, a_x è la componente del vettore $\boldsymbol{a}$ sull'asse x (o lungo l'asse x) mentre a_y è la componente lungo l'asse y. Per trovare le proiezioni di un vettore lungo un asse si tracciano le perpendi-

ISBN 978-88-08-18229-6

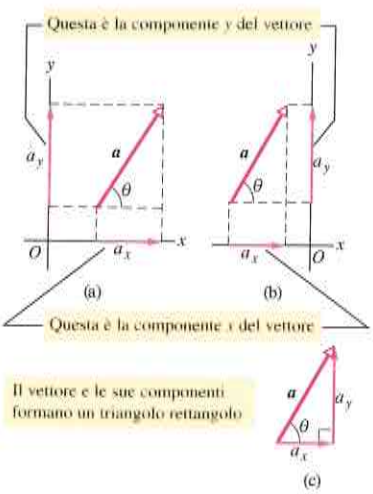


Figura 3.7 (a) Componenti a_x e a_y del vettore $\boldsymbol{a}$. (b) Le componenti non cambiano se il vettore viene spostato, purché siano mantenuti il modulo e l'orientamento. (c) Le componenti costituiscono i cateti di un triangolo rettangolo la cui ipotenusa è il modulo del vettore.

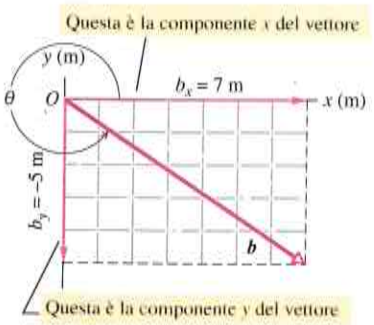


Figura 3.8 Le componenti di $\boldsymbol{b}$ sono positiva quella sull'asse x e negativa quella sull'asse y.

colari dai due estremi del vettore agli assi, come si vede nella figura. La proiezione di un vettore sull'asse x è detta *componente x* e analogamente la sua proiezione sull'asse y si chiama *componente y*. Il procedimento qui seguìto per trovare le componenti prende il nome di **scomposizione del vettore**.

La componente scalare di un vettore ha segno concorde con il verso del vettore stesso. Nella figura 3.7, a_x e a_y sono entrambe positive perché $\boldsymbol{a}$ si estende nel verso positivo di entrambi gli assi. Le freccette sulle componenti indicano il loro segno. Capovolgendo il vettore $\boldsymbol{a}$ entrambe le componenti diventano negative e le loro freccette puntano nel verso negativo degli assi x e y. La scomposizione del vettore $\boldsymbol{b}$ di figura 3.8 dà luogo a una componente b_x positiva e b_y negativa.

In genere un vettore avrà tre componenti, anche se nel caso della figura 3.7a la componente lungo l'asse z è uguale a zero. Come mostrano le figure 3.7a e b, se muovete un vettore in modo che rimanga parallelo alla sua direzione originaria, i valori delle sue componenti restano in ogni momento invariati.

Trovare le componenti. Possiamo facilmente trovare le componenti di a nella figura 3.7a, ricavandole dal triangolo rettangolo ivi tracciato:

$$a_x = a\cos\theta \quad \text{e} \quad a_y = a\sin\theta, \tag{3.5}$$

dove θ è l'angolo formato dal vettore $\boldsymbol{a}$ con l'asse x (la misura dell'angolo deve seguire le regole in uso per la circonferenza trigonometrica) e a è il modulo di a. La figura 3.7c mostra che il vettore e le sue componenti x e y formano un triangolo rettangolo. Si riconosce anche come sia possibile ricostruire un vettore a partire dalle sue componenti: le disponiamo capo contro coda. Poi formiamo un triangolo rettangolo con un vettore posto lungo l'ipotenusa, dalla coda di un vettore componente alla punta dell'altro.

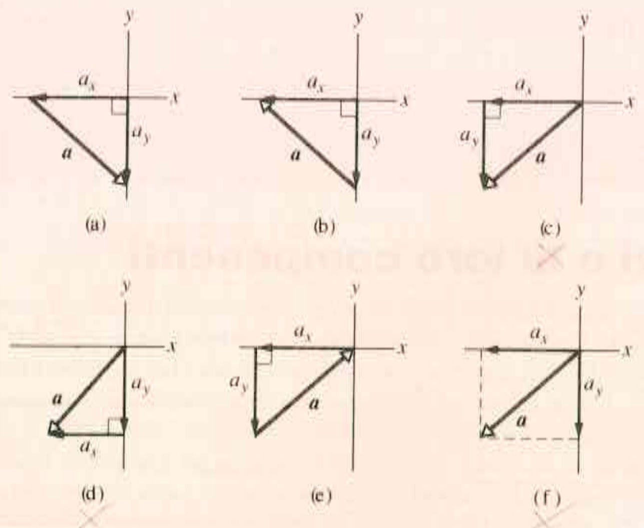
Una volta che il vettore è stato scomposto nelle sue componenti, le componenti stesse si possono usare al posto del vettore. Per esempio il vettore $\boldsymbol{a}$ di figura 3.7a è completamente determinato da a (modulo del vettore) e θ (direzione del vettore relativa all'asse x). Lo possiamo individuare anche con altri due numeri: le sue componenti a_x e a_y. Per ottenere a e θ, se disponiamo dei valori di a_x e a_y, notiamo che

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \quad \text{e} \quad \tan\theta = \frac{a_y}{a_x}. \tag{3.6}$$

Nel caso più generale di vettori tridimensionali occorrono, per descriverli, due angoli oltre al modulo (ad esempio a, θ e ϕ) oppure tre componenti (a_x, a_y e a_z).

VERIFICA 2

Nella figura che segue, quali dei metodi indicati per combinare le componenti x e y del vettore $\boldsymbol{a}$ sono appropriati per individuare questo vettore?



ISBN 978-88-08-18229-6

PROBLEMA SVOLTO 3.1 Somma grafica di vettori, orientamenti

In una esercitazione di *orienteering* vi viene affidato il compito di allontanarvi il più possibile (valutando la distanza raggiunta in linea retta) dal campo base, percorrendo tre tratte rettilinee specificate, ma in un ordine di vostra scelta: (a) $\boldsymbol{a}$, 2,0 km verso est; (b) $\boldsymbol{b}$, 2,0 km in direzione di 30° verso est rispetto al nord; (c) $\boldsymbol{c}$, 1,0 km verso ovest. Potete anche scegliere di sostituire $\boldsymbol{b}$ con $-\boldsymbol{b}$ oppure $\boldsymbol{c}$ con $-\boldsymbol{c}$. Qual è il punto più lontano dal campo base che potete raggiungere al termine della terza tratta? (In qualsiasi direzione).

Ragionamento. Usando una scala adeguata, disegniamo i vettori $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $-\boldsymbol{b}$ e $-\boldsymbol{c}$ nella figura 3.9a. Trasliamo poi mentalmente i vettori sulla pagina, collegandone tre di loro testa-coda per trovare il vettore somma $\boldsymbol{d}$. La coda del primo rappresenta il campo base e la punta del terzo rappresenta il luogo raggiunto. Il vettore $\boldsymbol{d}$ si estende tra questi due estremi. Il suo modulo d è la distanza dal campo base. Il nostro obiettivo è rendere massima tale distanza.

Si trova che questa distanza è massima per la composizione testa-coda dei vettori $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ e $-\boldsymbol{c}$. L'ordine in cui li si dispone non ha importanza perché la loro somma non cambia. (Ricordate la proprietà commutativa espressa dall'equazione 3.2.) L'ordine mostrato nella figura 3.9b è per il vettore somma

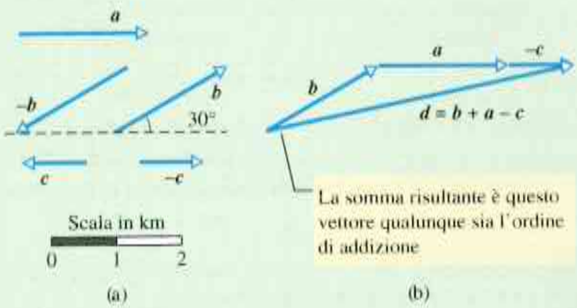


Figura 3.9 Problema svolto 3.1. (a) Vettori spostamento; bisogna sceglierne tre. (b) La distanza dal campo base è massima se combiniamo gli spostamenti $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ e $-\boldsymbol{c}$, e senza badare al loro ordine.

$$\boldsymbol{d} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{c}).$$

Servendoci della scala indicata nella figura 3.9a misuriamo la lunghezza del vettore somma d, trovando

$$d = 4{,}8 \text{ km}.$$

PROBLEMA SVOLTO 3.2 Ricerca delle componenti, volo aereo

Un piccolo aeroplano decolla da un aeroporto in una giornata nuvolosa e viene avvistato più tardi a 215 km, in una direzione che forma un angolo di 22° verso est rispetto al nord. A che distanze verso nord e verso est si trova l'aereo quando viene avvistato?

SOLUZIONE

È idea chiave osservare che ci vengono dati un modulo (215 km) e un angolo (22° a est rispetto a nord), dopodiché ci vengono richieste le componenti del vettore. In un sistema di coordinate xy la situazione è come si vede nella figura 3.10, dove, per comodità, l'origine è posta all'aeroporto, l'asse x è diretto verso est e l'asse y verso nord. Questa scelta non è obbligatoria; potremmo scegliere un sistema di coordinate traslato altrove, ma, data la possibilità di scegliere, perché complicare il problema? Il vettore spostamento $\boldsymbol{d}$ dell'aereo congiunge l'origine col punto in cui è stato avvistato l'aereo.

Per trovare le componenti di $\boldsymbol{d}$ ricorriamo alle equazioni 3.5, ponendo $\theta = 68°$; otteniamo

$$d_x = d\cos\theta = (215 \text{ km})(\cos 68°) = 81 \text{ km},$$

e $$d_y = d\sin\theta = (215 \text{ km})(\sin 68°) = 199 \text{ km} = 2{,}0 \cdot 10^2 \text{ km}.$$

Quindi l'aereo viene localizzato a $2{,}0 \cdot 10^2$ km verso nord e 81 km verso est rispetto all'aeroporto.

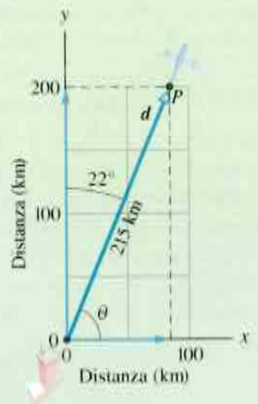


Figura 3.10 Problema svolto 3.2. Un aereo decolla da un aeroporto nel punto di origine ed è avvistato più tardi nel punto P.

Accorgimenti per risolvere i problemi Angoli, funzioni trigonometriche e trigonometriche inverse

Tattica 1: Angoli – gradi e radianti

Gli angoli misurati rispetto all'asse x, a partire dalla semiretta positiva, sono positivi se vengono misurati in senso antiorario, e negativi se sono misurati in senso orario. Per esempio 210° e −150° sono angoli che individuano la stessa direzione.

Gli angoli si possono misurare in gradi o in radianti (rad). Si possono confrontare le due misure ricordando che un angolo giro equivale a 360° e a 2π rad. Così, se fosse necessario, per esempio, convertire 40° in radianti, si può scrivere

$$40° \frac{2\pi \text{ rad}}{360°} = 0{,}70 \text{ rad}.$$

Tattica 2: Funzioni trigonometriche

È necessario conoscere le definizioni delle comuni funzioni trigonometriche – seno, coseno e tangente – perché esse sono parte del linguaggio della scienza e dell'ingegneria. Vi rammentiamo le definizioni nella figura 3.11 in una forma che non dipende dalla simbologia adottata per definire il triangolo.

Dovreste anche saper tracciare uno schizzo dell'andamento delle funzioni trigonometriche in funzione dell'angolo, come nella figura 3.12, per imparare a valutare se il risultato dato da una calcolatrice ha senso. Potrebbe anche essere utile sapere il segno delle funzioni nei diversi quadranti.

ISBN 978-88-08-18229-6

$$\sin\theta = \frac{\text{cateto opposto a }\theta}{\text{ipotenusa}}$$

$$\cos\theta = \frac{\text{cateto adiacente a }\theta}{\text{ipotenusa}}$$

$$\tan\theta = \frac{\text{cateto opposto a }\theta}{\text{cateto adiacente a }\theta}$$

Figura 3.11 Un triangolo usato per definire le funzioni trigonometriche. (Vedi appendice E).

Tattica 3: Funzioni trigonometriche inverse

Le più importanti funzioni trigonometriche inverse sono l'arcoseno, l'arcocoseno e l'arcotangente (arcsin, arccos e arctan). Se esse sono elaborate da una calcolatrice si deve verificare che i risultati forniti siano ragionevoli, perché c'è di solito almeno un altro possibile risultato che la calcolatrice non fornisce. L'estensione del campo d'azione di una calcolatrice nel trattare qualsiasi funzione inversa è indicata con tratto più marcato nella figura 3.12. Come esempio, all'espressione arcsin(0,5) corrisponde indifferentemente un angolo di 30° (come viene rappresentato sul *display* dalla calcolatrice, dato che 30° rientra nella gamma di possibili valori di angoli di cui dispone) o anche di 150°. Per vedere entrambi gli angoli tracciate una linea orizzontale passante per il punto 0,5 dell'asse delle ordinate nella figura 3.12a, e osservate i punti in cui essa interseca la curva sinusoide.

Come si riconosce un risultato corretto? È quello che appare più ragionevole nella particolare situazione in esame. Consideriamo come esempio un calcolo di θ, in cui $\tan\theta = 3{,}9/2{,}6 = 1{,}5$. Se cercate il valore di arctan(1,5) la vostra calcolatrice vi darà come risultato $\theta = 56°$, ma anche $\theta = 236°$ ($180° + 56°$) ha una tangente che vale 1,5. Quale dei due risultati è corretto? Guardando il problema del punto di vista fisico è chiaro che il valore 56° è ragionevole mentre 236° non lo è.

Tattica 4: Misurare gli angoli dei vettori

Le equazioni 3.5 e la seconda parte dell'equazione 3.6 sono valide solo se l'angolo viene misurato correttamente rispetto all'asse x, col criterio trigonometrico riassunto anche nella tattica 1. Se si misura in senso opposto può darsi che nell'equazione 3.5 le funzioni trigonometriche debbano essere scambiate fra loro, e può succedere che il rapporto nell'equazione 3.6 debba essere invertito. Un metodo più sicuro è quello di convertire l'angolo dato in un angolo che sia misurato a partire dal semiasse positivo delle x.

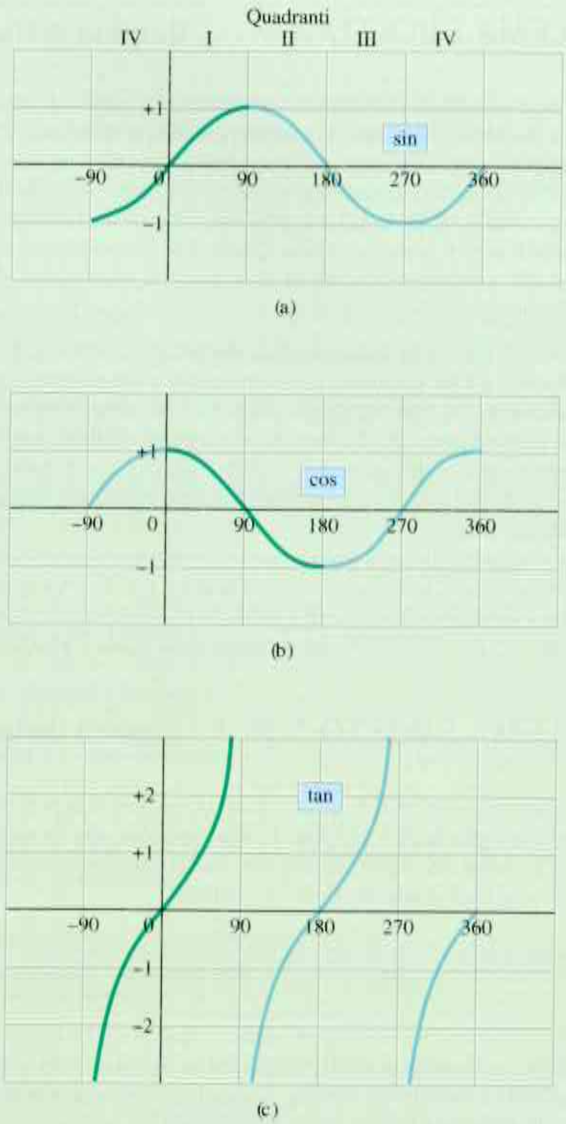


Figura 3.12 Tre curve utili da ricordare. Il campo di operazione della calcolatrice per elaborare le funzioni trigonometriche *inverse* è indicato dalla porzione più scura delle curve colorate.

3.2 VETTORI UNITARI, SOMMA DEI VETTORI PER MEZZO DELLE LORO COMPONENTI

Obiettivi di apprendimento

Dopo aver letto questo paragrafo dovreste essere in grado di...

3.06 Trasformare un vettore dalla notazione con modulo e direzione a quella con i vettori unitari o versori.

3.07 Sommare e sottrarre vettori in entrambe le notazioni specificate al punto 3.06.

3.08 Rendervi conto che, dato un vettore, una rotazione del sistema di coordinate attorno all'origine può mutare le componenti del vettore, ma non il vettore stesso.

ISBN 978-88-08-18229-6

Idee chiave

- I vettori unitari **i**, **j** e **k** hanno modulo unitario e orientamento coincidente rispettivamente con quello degli assi x, y e z di un sistema di coordinate cartesiane destrorso. Possiamo dunque esprimere un vettore qualunque $\boldsymbol{a}$ in funzione dei vettori unitari, detti anche versori, nel seguente modo:

$$\boldsymbol{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k},$$

in cui $a_x\mathbf{i}$, $a_y\mathbf{j}$ e $a_z\mathbf{k}$ sono le componenti vettoriali di $\boldsymbol{a}$ e a_x, a_y e a_z sono le sue componenti scalari.

- L'addizione di vettori espressi tramite le loro componenti si esegue con le seguenti regole:

$$r_x = a_x + b_x \qquad r_y = a_y + b_y \qquad r_z = a_z + b_z.$$

Qui $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ sono i due vettori da sommare ed $\boldsymbol{r}$ è il vettore risultante dalla somma. Si noti che si sommano le componenti asse per asse.

Vettori unitari

Un **vettore unitario**, detto anche **versore**, è un vettore di lunghezza unitaria (modulo = 1), disposto in una particolare direzione. È privo di dimensioni e quindi anche di unità di misura. Il suo unico scopo è quello di indicare una direzione. Nel sistema di coordinate ortogonali si usano di solito i simboli **i**, **j** e **k** per indicare i vettori unitari (versori) tracciati rispettivamente nelle direzioni degli assi x, y e z, e con verso positivo, come si vede nella figura 3.13. La configurazione degli assi che appare nella figura 3.13 è chiamata **sistema destrorso di coordinate ortogonali**. Il sistema rimane destrorso anche se viene ruotato rigidamente in una qualsiasi nuova direzione. In questo testo useremo esclusivamente sistemi di coordinate di questo tipo.

I versori sono molto utili per descrivere altri vettori; per esempio, possiamo descrivere i vettori $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ delle figure 3.7 e 3.8 come

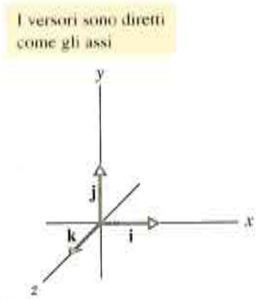


Figura 3.13 I vettori unitari **i**, **j** e **k** definiscono le direzioni di un sistema di coordinate ortogonali destrorso (o «della mano destra»).

$$\boldsymbol{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} \tag{3.7}$$

e

$$\boldsymbol{b} = b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j}, \tag{3.8}$$

disegnandoli come nella figura 3.14. Le quantità $a_x\mathbf{i}$ e $a_y\mathbf{j}$ sono le **componenti vettoriali** di $\boldsymbol{a}$, da non confondere con a_x e a_y che sono le **componenti scalari** (o, come prima, semplicemente le sue **componenti**).

Somma di vettori per mezzo delle loro componenti

Si possono sommare i vettori con un disegno. Con una calcolatrice capace di trattare i vettori possiamo sommarli direttamente sullo schermo. Un terzo modo di ottenere la somma di vettori consiste nel combinare le rispettive componenti asse per asse.

Per cominciare consideriamo l'uguaglianza

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}, \tag{3.9}$$

che significa che il vettore $\boldsymbol{r}$ è identico al vettore $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})$. Se questo è vero, ogni componente di $\boldsymbol{r}$ deve coincidere con la corrispondente componente di $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})$:

$$r_x = a_x + b_x \tag{3.10}$$

$$r_y = a_y + b_y \tag{3.11}$$

$$r_z = a_z + b_z. \tag{3.12}$$

In altre parole due vettori sono uguali solo se le rispettive componenti sono tutte uguali tra di loro. Le equazioni dalla 3.9 alla 3.12 ci dicono che per sommare i vettori $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ dobbiamo (1) scomporre i vettori nelle loro componenti, (2) combinare queste componenti asse per asse per ottenere le componenti del vettore somma $\boldsymbol{r}$; (3) se necessario ricombinare le componenti di $\boldsymbol{r}$ per ottenere $\boldsymbol{r}$ stesso. A questo punto possiamo scegliere: o descrivere $\boldsymbol{r}$ con la notazione in vettori unitari (come nell'eq. 3.9), oppure calcolare il modulo di $\boldsymbol{r}$ e il suo orientamento.

Questo procedimento di addizione vettoriale attraverso le componenti si applica anche alla sottrazione vettoriale. Ricordiamo che una sottrazione come $\boldsymbol{d} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$ si può scrivere

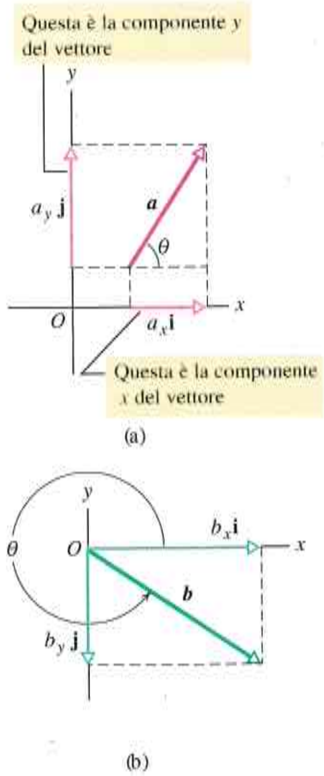


Figura 3.14 (a) Componenti vettoriali del vettore $\boldsymbol{a}$. (b) Componenti vettoriali del vettore $\boldsymbol{b}$.

ISBN 978-88-08-18229-6

come l'addizione $\boldsymbol{d} = \boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{b})$. Per sottrarre non dobbiamo fare altro che sommare $\boldsymbol{a}$ e $-\boldsymbol{b}$ attraverso le loro componenti, ottenendo

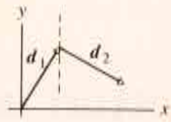
$$d_x = a_x - b_x, \qquad d_y = a_y - b_y \qquad \text{e} \qquad d_z = a_z - b_z$$

ove

$$\boldsymbol{d} = d_x\mathbf{i} + d_y\mathbf{j} + d_z\mathbf{k}. \tag{3.13}$$

VERIFICA 3

Nella figura a lato, (a) che segno hanno le componenti x di $\boldsymbol{d}_1$ e $\boldsymbol{d}_2$? (b) Che segno hanno le loro componenti y? (c) Che segno hanno le componenti x e y del vettore addizione $\boldsymbol{d}_1 + \boldsymbol{d}_2$?



(a) +, + ; (b) +, − ; (c) +, +

igura 3.15 (a) Il vettore $\boldsymbol{a}$ e le sue com- ponenti. (b) Lo stesso vettore, con gli ssi del sistema di coordinate ruotati di n angolo ϕ.

I vettori e le leggi della fisica

Nelle rappresentazioni con un sistema di coordinate gli assi x e y sono stati fin qui disegnati paralleli ai margini della pagina. Così, quando si rappresenta un vettore $\boldsymbol{a}$, le sue componenti a_x e a_y sono anch'esse parallele ai bordi (come nella figura 3.15a). La sola ragione che ci fa preferire questo orientamento degli assi è che esso crea un effetto di maggiore ordine ai nostri occhi: non ci sono ragioni più profonde. Potremmo, invece, ruotare gli assi (ma non il vettore $\boldsymbol{a}$) di un angolo ϕ come nella figura 3.15b; in questo caso le componenti avrebbero nuovi valori, che potremmo chiamare a'_x e a'_y. E poiché per ϕ esistono infiniti valori fra i quali si può scegliere, esistono anche infinite varianti per le coppie di valori assegnate alle componenti di $\boldsymbol{a}$.

Qual è dunque la coppia di componenti «giusta»? La risposta è che esse sono tutte egualmente valide, perché ogni coppia (con i suoi assi) ci dà semplicemente un diverso modo di descrivere lo stesso vettore $\boldsymbol{a}$; tutte esprimono lo stesso modulo e la stessa direzione per il medesimo vettore. Nella figura 3.15 abbiamo

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{a_x'^2 + a_y'^2}\,, \tag{3.14}$$

$$\theta = \theta' + \phi. \tag{3.15}$$

Il fatto è che abbiamo una grande libertà di scelta per definire il sistema di coordinate, perché le relazioni fra i vettori (incluso, per esempio, il vettore somma dell'equazione 3.1) non dipendono dalla collocazione rispetto all'origine del sistema di coordinate o dall'orientamento degli assi. Questo vale anche per i rapporti che si stabiliscono fra i fenomeni fisici: sono tutti indipendenti dalla scelta del sistema di coordinate. Aggiungete la semplicità e la ricchezza del linguaggio dei vettori e capirete perché le leggi della fisica sono quasi sempre presentate in questo linguaggio. Una sola equazione, come l'equazione 3.9, può rappresentare tre (o anche più) relazioni, come avviene per le equazioni 3.10, 3.11 e 3.12.

ROBLEMA SVOLTO 3.3 Labirinto di siepi

a figura 3.16a mostra l'ingresso in un labirinto di siepi e il percorso ffettuato per andare da i a c con due cambi di direzione. Sono tre gli postamenti vettoriali intrapresi come indica il disegno visto dall'alto di gura 3.16b:

$$d_1 = 6{,}00\ \text{m} \qquad \theta_1 = 40^\circ$$
$$d_2 = 8{,}00\ \text{m} \qquad \theta_2 = 30^\circ$$
$$d_3 = 5{,}00\ \text{m} \qquad \theta_3 = 0^\circ$$

ve l'ultimo tratto è posto parallelo all'asse x. Quando giungiamo in c, uali sono stati il modulo, la direzione e il verso dello spostamento sultante complessivo $\boldsymbol{d}_{\text{net}}$ rispetto al punto di partenza i?

SOLUZIONE

(1) Per trovare lo spostamento netto risultante occorre sommare i tre vettori che rappresentano i tre spostamenti elementari:

$$\boldsymbol{d}_{\text{net}} = \boldsymbol{d}_1 + \boldsymbol{d}_2 + \boldsymbol{d}_3$$

(2) A tale scopo sommiamo dapprima le sole componenti x,

$$d_{\text{net},x} = d_{1x} + d_{2x} + d_{3x} \tag{3.16}$$

e poi le componenti y,

$$d_{\text{net},y} = d_{1y} + d_{2y} + d_{3y} \tag{3.17}$$

(3) Infine costruiamo il vettore $\boldsymbol{d}_{net}$ a partire dalle sue componenti secondo x e secondo y.

Calcoli. Per utilizzare le equazioni 3.16 e 3.17 dobbiamo scomporre ciascuno spostamento nelle sue componenti x e y. Nella figura 3.16c è illustrato il procedimento esempio relativo al primo spostamento. Bisogna tracciare diagrammi simili per gli altri due e poi applicare la prima delle equazioni 3.5 a ciascuno spostamento introducendo gli angoli che essi formano con il verso positivo dell'asse x:

$$d_{1x} = (6{,}00\text{ m})\cos 40° = 4{,}60\text{ m}$$
$$d_{2x} = (8{,}00\text{ m})\cos(-60°) = 4{,}00\text{ m}$$
$$d_{3x} = (5{,}00\text{ m})\cos 0° = 5{,}00\text{ m.}$$

L'equazione 3.16 dunque dà

$$d_{net,x} = +4{,}60\text{ m} + 4{,}00\text{ m} + 5{,}00\text{ m} = 13{,}60\text{ m.}$$

Analogamente, per trattare l'equazione 3.17 ci serviamo della seconda delle (3.5) applicata a caiscuno spostamento:

$$d_{1y} = (6{,}00\text{ m})\sin 40° = 3{,}86\text{ m}$$
$$d_{2y} = (8{,}00\text{ m})\sin(-60°) = -6{,}93\text{ m}$$
$$d_{3y} = (5{,}00\text{ m})\sin 0° = 0\text{ m.}$$

E dall'equazione 3.17 otteniamo

$$\boldsymbol{d}_{net} = +3{,}86\text{ m} - 6{,}93\text{ m} + 0\text{ m} = -3{,}07\text{ m.}$$

Ora utilizziamo le componenti di $\boldsymbol{d}_{net}$ per costruire il vettore come illustra la figura 3.16d: le due componenti sono disposte testa contro coda e formano i cateti di un triangolo rettangolo, la cui ipotenusa fornisce il vettore cercato. Le equazioni 3.6 ci consentono di trovarne il modulo e l'angolo di direzione. Il modulo è

$$d_{net} = \sqrt{d_{net,x}^2 + d_{net,y}^2} = \sqrt{(13{,}60\text{ m})^2 + (-3{,}07\text{ m})^2} = 13{,}9\text{ m.} \quad (3.18)$$

L'angolo, misurato rispetto al verso positivo dell'asse x, si trova mediante la funzione arcotangente:

$$\theta = \arctan\left(\frac{d_{net,y}}{d_{net,x}}\right) = \arctan\left(\frac{-3{,}07\text{ m}}{13{,}60\text{ m}}\right) = -12{,}7°. \quad (3.19)$$

L'angolo è negativo perché è misurato in senso antiorario rispetto al verso positivo dell'asse x, rispettando la convenzione trigonometrica. Quando si cerca il valore di un'arcotangente sulla calcolatrice occorre fare attenzione. Il risultato visualizzato è sempre corretto ma potrebbe non essere l'esatta soluzione di un problema fisico. La soluzione giusta potrebbe differire di 180° da quella visualizzata, che corrisponde al vettore di verso opposto a quello di prima vista. La scelta va operata disegnando il vettore e le sue componenti, come abbiamo fatto nella figura 13.6d. La nostra situazione fisica mostra che la soluzione corretta è $\theta = -12{,}7°$, mentre $-12{,}7° + 180° = 167°$ non lo è.

Lo vediamo anche sulla curva della tangente disegnata in figura 3.12c. Nel problema l'argomento dell'arcotangente è $-3{,}07/13{,}60$ ossia $-0{,}226$. Sul grafico della tangente in corrispondenza del valore $y = -0{,}226$ che rappresenta la tangente troviamo l'angolo di $-12{,}7°$ sulla curva più marcata a sinistra e 167° sulla prima curva sfumata a destra. Le calcolatrici normalmente evidenziano il primo di questi risultati.

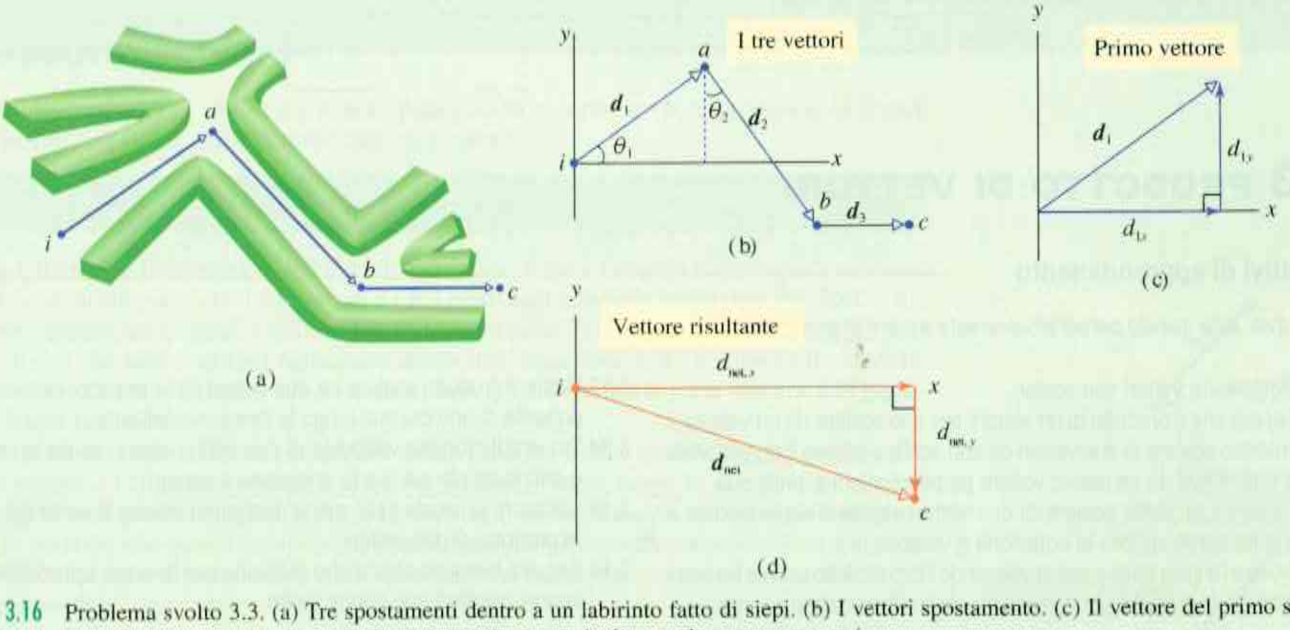


Figura 3.16 Problema svolto 3.3. (a) Tre spostamenti dentro a un labirinto fatto di siepi. (b) I vettori spostamento. (c) Il vettore del primo spostamento e le sue componenti. (d) Il vettore dello spostamento netto risultante e le sue componenti.

PROBLEMA SVOLTO 3.4 Somma di vettori mediante i vettori unitari

La figura 3.17a presenta tre vettori, ciascuno espresso nella notazione in vettori unitari:

$$\boldsymbol{a} = (4{,}2\text{ m})\mathbf{i} - (1{,}5\text{ m})\mathbf{j},$$
$$\boldsymbol{b} = (-1{,}6\text{ m})\mathbf{i} + (2{,}9\text{ m})\mathbf{j},$$
$$\boldsymbol{c} = (-3{,}7\text{ m})\mathbf{j}.$$

Trovate il vettore $\boldsymbol{r}$ mostrato in figura, che rappresenta la somma di questi tre vettori.

 ISBN 978-88-08-18229-6

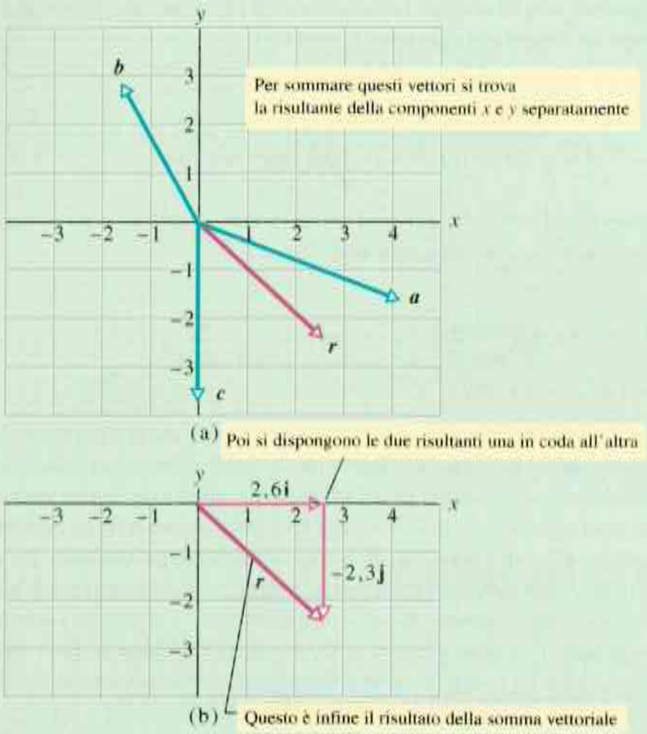


Figura 3.17 Problema svolto 3.4. Il vettore $\boldsymbol{r}$ è il vettore somma degli altri tre vettori.

SOLUZIONE

Idea chiave: possiamo sommare i tre vettori attraverso le loro componenti, asse per asse, per poi combinarle e trovare il vettore somma $\boldsymbol{r}$. Per l'asse x sommiamo le componenti x dei vettori $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{c}$ e ricaviamo la componente x del vettore $\boldsymbol{r}$:

$$r_x = a_x + b_x + c_x = \\ = 4{,}2\ \text{m} - 1{,}6\ \text{m} + 0 = 2{,}6\ \text{m}.$$

Analogamente per l'asse y:

$$r_y = a_y + b_y + c_y = \\ = -1{,}5\ \text{m} + 2{,}9\ \text{m} - 3{,}7\ \text{m} = -2{,}3\ \text{m}.$$

Combiniamo ora queste due componenti per ottenere $\boldsymbol{r}$ espresso coi versori:

$$\boldsymbol{r} = (2{,}6\ \text{m})\mathbf{i} - (2{,}3\ \text{m})\mathbf{j}.$$

dove $(2{,}6\ \text{m})\mathbf{i}$ è la componente vettoriale di $\boldsymbol{r}$ lungo l'asse x, mentre $(2{,}3\ \text{m})\mathbf{j}$ è la sua componente vettoriale lungo l'asse y. Nella figura 3.17b vediamo un modo di combinare questi due vettori per formare $\boldsymbol{r}$. (Sapete disegnare l'altro modo?)

Un'altra **idea chiave** ci suggerisce di rispondere alla domanda fornendo il modulo di $\boldsymbol{r}$ e specificandone la direzione con un angolo. Dall'equazione 3.6 ricaviamo il modulo:

$$r = \sqrt{(2{,}6\ \text{m})^2 + (-2{,}3\ \text{m})^2} \approx 3{,}5\ \text{m}.$$

e l'angolo (misurato dal semiasse positivo delle x):

$$\theta = \arctan\left(\frac{-2{,}3\ \text{m}}{2{,}6\ \text{m}}\right) = -41°,$$

dove il segno − indica che i 41° vanno conteggiati in senso orario.

3.3 PRODOTTO DI VETTORI

Obiettivi di apprendimento

Dopo aver letto questo paragrafo dovreste essere in grado di...

3.09 Moltiplicare vettori con scalari.
3.10 Sapere che il prodotto di un vettore per uno scalare dà un vettore, il prodotto scalare di due vettori dà uno scalare e il prodotto vettoriale di due vettori dà un nuovo vettore perpendicolare ai primi due.
3.11 Trovare il prodotto scalare di due vettori espressi sia in modulo e orientamento sia con la notazione a versori.
3.12 Trovare l'angolo tra due vettori utilizzando il loro prodotto scalare ed esprimendoli sia in modulo e orientamento sia con la notazione a versori.
3.13 Usare il prodotto scalare tra due vettori dati per conoscere la componente di uno dei due lungo la direzione dell'altro.
3.14 Trovare il prodotto vettoriale di due vettori espresso sia in modulo e orientamento sia con la notazione a versori.
3.15 Utilizzare la regola della mano destra per trovare il verso del vettore prodotto di due vettori.
3.16 Seguire le regole algebriche ordinarie per operare il prodotto di più vettori, annidati uno dentro l'altro.

Idee chiave

- Il prodotto di uno scalare s per un vettore $\boldsymbol{v}$ è un nuovo vettore di modulo sv, che ha la stessa direzione di $\boldsymbol{v}$ e verso concorde a quest'ultimo se s è positivo, discorde se è negativo. La divisione di $\boldsymbol{v}$ per s si ottiene moltiplicando $\boldsymbol{v}$ per $1/s$.
- Il prodotto scalare di due vettori $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$, che si scrive $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$, è una quantità *scalare* data da

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = ab\cos\phi,$$

in cui ϕ rappresenta l'angolo compreso tra le direzioni di $\boldsymbol{a}$ e di $\boldsymbol{b}$. Il prodotto scalare è anche il prodotto del modulo di uno dei due per la componente dell'altro lungo la direzione del primo. In notazione coi versori:

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = (a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}) \cdot (b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k}),$$

che si può sviluppare ricorrendo alla proprietà distributiva. Si osservi che

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a}.$$

ISBN 978-88-08-18229-6

- Il prodotto vettoriale, o prodotto vettore, di due vettori $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$, che si scrive $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$, è un *vettore* $\boldsymbol{c}$ il cui modulo c è dato da

$$c = ab \sin \phi,$$

in cui ϕ è l'angolo compreso tra le direzioni di $\boldsymbol{a}$ e di $\boldsymbol{b}$. La direzione di $\boldsymbol{c}$ è perpendicolare al piano formato da $\boldsymbol{a}$ e da $\boldsymbol{b}$, mentre il verso dato dalla regola della mano destra mostrata nella figura 3.19. Va osservato che $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = -(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a})$. In termini di vettori unitari si ha

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = (a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}) \times (b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k}),$$

che si può sviluppare ricorrendo alla proprietà distributiva.
- Quando più prodotti sono annidati uno dentro l'altro, basta seguire gli ordinari procedimenti algebrici partendo dal prodotto più interno e procedendo verso l'esterno.

Prodotto di vettori*

Ci sono tre modalità per le moltiplicazioni con i vettori. Nessuna di esse è esattamente uguale alla comune moltiplicazione algebrica. Nello studio di questo paragrafo tenete ben presente che le calcolatrici capaci di trattare i vettori vi saranno d'aiuto nelle loro moltiplicazioni solo se avrete capito le regole basilari di questi tipi di prodotti.

Prodotto di un vettore per uno scalare

Se moltiplichiamo un vettore $\boldsymbol{a}$ per uno scalare s otteniamo un nuovo vettore. Il suo modulo è il prodotto del modulo di $\boldsymbol{a}$ per il valore assoluto di s. La sua direzione è la stessa direzione di $\boldsymbol{a}$. Se s è positivo, il vettore prodotto mantiene lo stesso verso di $\boldsymbol{a}$; se s è negativo, il vettore risultante dalla moltiplicazione assume verso opposto. Volendo dividere $\boldsymbol{a}$ per s, moltiplichiamo $\boldsymbol{a}$ per $1/s$.

Prodotto di un vettore per un vettore

Esistono due modi di moltiplicare un vettore per un vettore: il primo tipo di prodotto dà origine a uno scalare (lo si chiama *prodotto scalare*) e l'altro dà origine a un nuovo vettore (prende il nome di *prodotto vettoriale*, o anche di *prodotto vettore*). Spesso gli studenti confondono i due tipi: dovete perciò imparare fin d'ora a distinguerli con chiarezza.

Il prodotto scalare

Il **prodotto scalare** dei vettori $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ della figura 3.18a si scrive $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$, si pronuncia in forma colloquiale "a scalar b", ed è definito dall'espressione

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = ab \cos \phi, \tag{3.20}$$

dove a è il modulo del vettore $\boldsymbol{a}$, b il modulo del vettore $\boldsymbol{b}$ e ϕ è l'angolo formato dalle semirette equiverse su cui giacciono i due vettori $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$. Questi angoli sono in verità due: ϕ e $(360° - \phi)$, ma i loro coseni sono uguali e quindi il loro impiego nella (3.20) è indifferente.

Notiamo che tutti i termini nella parte destra dell'equazione 3.20, compreso il valore di $\cos \phi$, sono scalari, e quindi il *prodotto* della moltiplicazione nella parte sinistra dell'equazione è uno *scalare*.

Un prodotto scalare si può considerare come prodotto di due quantità: (1) il modulo del primo vettore e (2) la componente scalare del secondo vettore lungo la direzione del primo vettore. Per esempio nella figura 3.18b, $\boldsymbol{a}$ ha una componente scalare $a \cos \phi$ lungo la direzione di $\boldsymbol{b}$; notiamo che questa componente è delimitata dal piede della perpendicolare condotta dal vertice di $\boldsymbol{a}$ sulla direzione di $\boldsymbol{b}$. Analogamente $\boldsymbol{b}$ ha una componente scalare $b \cos \phi$ lungo la direzione di $\boldsymbol{a}$.

Se ϕ è 0° (o 180°), e quindi $\cos \phi = 1$, la componente di un vettore lungo l'altro assume il massimo valore, e così pure fa il prodotto scalare, che diventa uguale al prodotto dei due moduli. Se invece ϕ è 90° (o 270°), essendo $\cos \phi = 0$, la componente di un vettore lungo la direzione dell'altro è zero, e quindi anche il prodotto scalare risulta nullo.

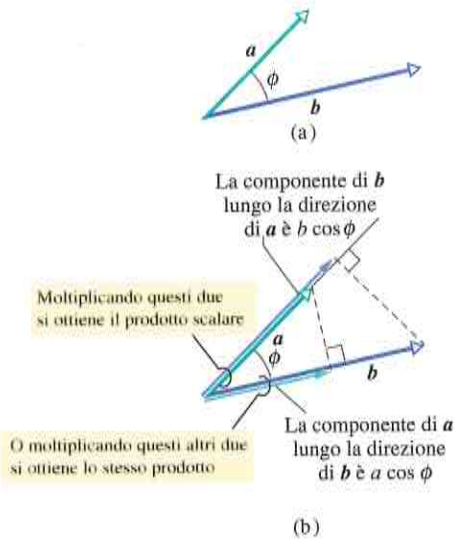


Figura 3.18 (a) I vettori $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ separati dall'angolo ϕ. (b) Ogni vettore ha componente lungo la direzione dell'altro vettore.

* Queste nozioni non saranno utilizzate fino al capitolo 7 per i prodotti scalari, e fino al capitolo 12 per i prodotti vettoriali: si può quindi programmare di posporre lo studio di questo paragrafo.

ISBN 978-88-08-18229-6

L'equazione 3.20 si può riscrivere come segue, per mettere in evidenza le componenti:

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = (a \cos \phi)(b) = (a)(b \cos \phi). \tag{3.21}$$

La proprietà commutativa si applica pure al prodotto scalare:

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a}.$$

Quando due vettori sono scritti con la notazione dei versori, possiamo scrivere il loro prodotto come

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = (a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}) \cdot (b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k}), \tag{3.22}$$

cui si applica la proprietà distributiva. Ciascuna componente del primo vettore va moltiplicata scalarmente per ciascuna componente del secondo. Così facendo si vede che

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z. \tag{3.23}$$

VERIFICA 4

I vettori $\boldsymbol{C}$ e $\boldsymbol{D}$ hanno moduli pari rispettivamente a 3 unità e 4 unità. Che angolo formano questi due vettori se $\boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{D}$ è pari a (a) zero, (b) 12 unità, (c) −12 unità?

(a) 90° ; (b) = 0° ; (c) = 180°

Il prodotto vettoriale

Il prodotto vettoriale di $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$, che si pronuncia in forma colloquiale "*a* vettor *b*" e si scrive $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$, è un vettore $\boldsymbol{c}$ il cui modulo è dato dall'equazione

$$c = ab \sin \phi, \tag{3.24}$$

in cui ϕ è il minore dei due angoli formati dalle semirette equiverse ai vettori su cui giacciono $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$. In questo caso, diversamente dal prodotto scalare in cui risulta indifferente, si deve usare il minore dei due angoli tra i vettori perché ϕ e $\sin(360° - \phi)$ hanno diverso segno algebrico.

Se le direzioni di $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ sono parallele, $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = 0$. Il modulo di $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$, che si può scrivere $|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}|$, ha il suo valore massimo quando $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ sono perpendicolari, quando cioè $\sin \phi = 1$.

La direzione di $\boldsymbol{c}$, vettore prodotto di $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$, è perpendicolare al piano individuato da $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$. La figura 3.19a mostra come si determina il verso di $\boldsymbol{c}$ con la cosiddetta **regola della mano destra**. Si collocano i vettori $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ con le code coincidenti, senza variare il loro orientamento, e si immagina una retta perpendicolare al piano da essi individuato, condotta nel punto di incontro tra le code dei due vettori. Si immagina poi di collocare la mano destra intorno a questa retta in modo che le quattro dita, orientate lungo il vettore $\boldsymbol{a}$, vadano a sovrapporsi a $\boldsymbol{b}$ attraverso l'angolo minore tra di essi. Il pollice teso punterà allora nella direzione di $\boldsymbol{c}$. Molto importante è l'ordine in cui sono indicati i due vettori da moltiplicare. Nella figura 3.19b dobbiamo determinare il verso di $\boldsymbol{c}' = \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}$. Le dita sono collocate in modo che adesso sia $\boldsymbol{b}$ ad andare a sovrapporsi ad $\boldsymbol{a}$ attraverso l'angolo minore tra i due; il pollice punterà allora in verso opposto a quello di prima, e così risulta evidente che

$$\boldsymbol{c}' = -\boldsymbol{c}; \text{ cioè } \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a} = -(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}). \tag{3.25}$$

In altre parole, *al prodotto vettoriale non si applica la proprietà commutativa della moltiplicazione.*

Nella notazione con i vettori unitari l'espressione di un prodotto vettoriale è

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = (a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}) \times (b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k}), \tag{3.26}$$

per la quale si applica la *proprietà distributiva*, vale a dire che ciascuna componente del primo vettore va moltiplicata vettorialmente per ciascuna componente del secondo; control-

ISBN 978-88-08-18229-6

late il risultato nell'appendice E. Potreste usare questa legge per sviluppare il prodotto dell'equazione 3.26:

$$a_x\mathbf{i} \times b_x\mathbf{i} = a_x b_x\,(\mathbf{i} \times \mathbf{i}) = 0.$$

poiché i due versori **i** e **i** sono paralleli e hanno prodotto vettoriale nullo. Similmente:

$$a_x\mathbf{i} \times b_y\mathbf{j} = a_x b_y\,(\mathbf{i} \times \mathbf{j}) = a_x b_y\,\mathbf{k}.$$

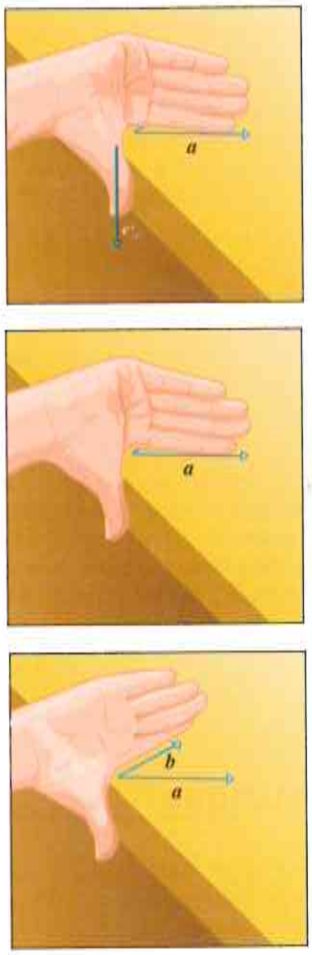
Nell'ultimo passaggio ci siamo serviti della (3.24) per valutare il modulo di $\mathbf{i} \times \mathbf{j}$, pari all'unità: infatti entrambi hanno modulo unitario e sono perpendicolari tra loro. Per conoscerne il verso siamo invece ricorsi alla regola della mano destra, trovando che è diretto nel verso positivo dell'asse z, cioè come **k**.

Proseguendo nello sviluppo dell'equazione 3.26, vediamo che

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = (a_y b_z - b_y a_z)\,\mathbf{i} + (a_z b_x - b_z a_x)\,\mathbf{j} + (a_x b_y - b_x a_y)\,\mathbf{k}. \qquad (3.27)$$

Possiamo infine calcolare il prodotto vettoriale tramite il determinante (app. E) o mediante una calcolatrice che tratta i vettori.

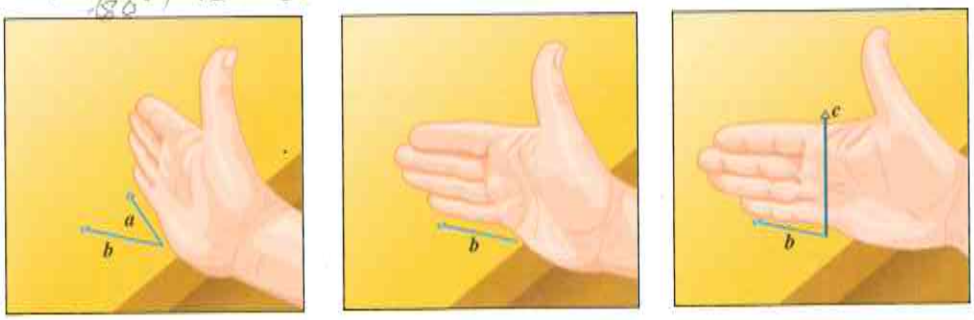
Il prodotto vettoriale può essere utile per controllare se un dato sistema di coordinate ortogonali è destrorso: se, controllando col metodo della mano destra, verifichiamo che $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$, allora il sistema è destrorso.



VERIFICA 5

I vettori $\boldsymbol{C}$ e $\boldsymbol{D}$ hanno moduli di misura rispettivamente 3 unità e 4 unità. Che angolo formano se il modulo del loro prodotto vettoriale è pari a (a) zero, o (b) 12 unità?

(a) 0°; 180°; (b) = 90°



(a) (b)

Figura 3.19 Illustrazione della regola della mano destra per i prodotti vettoriali. (a) Le quattro dita della mano destra, orientate lungo il vettore $\boldsymbol{a}$, vanno a sovrapporsi a $\boldsymbol{b}$ attraverso l'angolo minore tra i due vettori. Il pollice teso indicherà la direzione e il verso di $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$. (b) È evidente che $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = -(\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a})$.

PROBLEMA SVOLTO 3.5 Angolo tra due vettori mediante l'uso dei prodotti scalari

Qual è l'angolo ϕ compreso tra $\boldsymbol{a} = 3{,}0\mathbf{i} - 4{,}0\mathbf{j}$ e $\boldsymbol{b} = -2{,}0\mathbf{i} + 3{,}0\mathbf{k}$?

SOLUZIONE

Dapprima un avvertimento. Quantunque si possano evitare molti di questi passaggi grazie all'impiego di una calcolatrice capace di trattare i vettori, sarà didatticamente più efficace svolgere almeno qui tutti i passaggi.

L'idea chiave consiste nel riconoscere che l'angolo compreso tra le direzioni di due vettori è insito nella definizione di prodotto scalare (eq. 3.20):

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = ab\cos\phi. \qquad (3.28)$$

In questa equazione a rappresenta il modulo di $\boldsymbol{a}$:

$$a = \sqrt{3{,}0^2 + (-4{,}0)^2} = 5{,}00, \qquad (3.29)$$

e b è il modulo di $\boldsymbol{b}$:

$$b = \sqrt{(-2{,}0)^2 + 3{,}0^2} = 3{,}61. \qquad (3.30)$$

Seguiamo una seconda idea chiave: valutiamo separatamente il membro sinistro della (3.28) scrivendo i vettori in notazione di versori e usando la proprietà distributiva:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} &= (3{,}0\mathbf{i} - 4{,}0\mathbf{j}) \cdot (-2{,}0\mathbf{i} + 3{,}0\mathbf{k}) \\ &= (3{,}0\mathbf{i}) \cdot (-2{,}0\mathbf{i}) + (3{,}0\mathbf{i}) \cdot (3{,}0\mathbf{k}) \\ &\quad + (-4{,}0\mathbf{j}) \cdot (-2{,}0\mathbf{i}) + (-4{,}0\mathbf{j}) \cdot (3{,}0\mathbf{k}).\end{aligned}$$

Applichiamo ora nuovamente l'equazione 3.20 a ciascun termine, tenendo presente che l'angolo per il primo termine è 0° e per gli altri tre termini è 90°:

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = -(6{,}0)(1) + (9{,}0)(0) + (8{,}0)(0) - (12)(0) = -6{,}0.$$

ISBN 978-88-08-18229-6

ntroducendo questi risultati nell'equazione 3.28 troviamo

$$-6{,}0 = (5{,}00)(3{,}61)\cos\phi,$$

da cui

$$\phi = \arccos\frac{-6{,}0}{(5{,}00)(3{,}61)} = 109° \approx 110°.$$

PROBLEMA SVOLTO 3.6 Prodotto vettoriale, regola della mano destra

l vettore $\boldsymbol{a}$ giace nel piano xy della figura 3.20. Il suo valore assoluto è pari a 18 (unità arbitrarie) e la sua direzione forma un angolo di 250° rispetto all'asse x. Il vettore $\boldsymbol{b}$ ha valore assoluto 12 (stesse unità) ed è diretto lungo l'asse z con verso concorde a quello positivo dell'asse. Qual è il prodotto vettoriale $\boldsymbol{c}$ dei vettori $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$?

SOLUZIONE

Avendo due vettori di cui conosciamo modulo e direzione, il modulo del prodotto vettoriale è dato dall'equazione 3.24 e il suo verso dalla regola della mano destra di figura 3.19.

Calcoli. Il modulo è dato da

$$c = ab\sin\phi = (18)(12)(\sin 90°) = 216.$$

La seconda idea chiave prevede che, conoscendo modulo e direzione di due vettori, si trovi il verso del loro prodotto vettoriale con la regola della mano destra: si dispongano le dita attorno a una linea perpendicolare al piano di $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ in modo che le quattro dita si chiudano da $\boldsymbol{a}$ verso $\boldsymbol{b}$. Il pollice disteso indica la direzione e il verso di $\boldsymbol{c}$. Poiché $\boldsymbol{c}$ oltre a giacere nel piano xy è anche perpendicolare ad $\boldsymbol{a}$, la direzione di $\boldsymbol{c}$ forma un angolo di

$$250° - 90° = 160°.$$

con il verso positivo dell'asse x

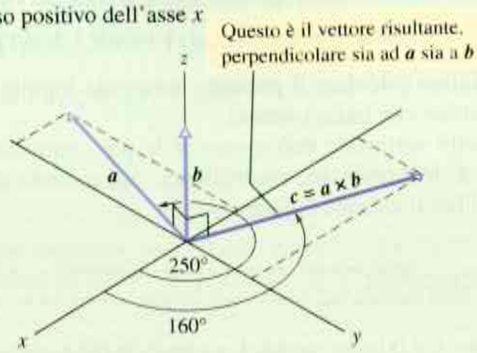


Figura 3.20 Problema svolto 3.6. Il vettore $\boldsymbol{c}$ (nel piano xy) è il prodotto vettoriale dei vettori $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$.

PROBLEMA SVOLTO 3.7 Prodotto vettoriale, notazione coi versori

Se $\boldsymbol{a} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$ e $\boldsymbol{b} = -2\mathbf{i} + 3\mathbf{k}$ come si può esprimere $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$?

SOLUZIONE

Idea chiave è ricorrere alla proprietà distributiva per ottenere il prodotto vettoriale quando i due vettori sono dati in notazione coi versori. Qui possiamo scrivere

$$\begin{aligned} \boldsymbol{c} &= (3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}) \times (-2\mathbf{i} + 3\mathbf{k}) = \\ &= 3\mathbf{i} \times (-2\mathbf{i}) + 3\mathbf{i} \times 3\mathbf{k} + (-4\mathbf{j}) \times (-2\mathbf{i}) + \\ &+ (-4\mathbf{j}) \times 3\mathbf{k}. \end{aligned}$$

Valutiamo quindi ciascun termine in base all'equazione 3.24, determinando il verso con la regola della mano destra. Per il primo termine $\phi = 0°$, mentre per gli altri termini $\phi = 90°$. Troviamo

$$\begin{aligned} \boldsymbol{c} &= -6\,(0) + 9\,(-\mathbf{j}) + 8\,(-\mathbf{k}) - 12\mathbf{i} = \\ &= -12\mathbf{i} - 9\mathbf{j} - 8\mathbf{k}. \end{aligned}$$

Il vettore $\boldsymbol{c}$ è perpendicolare sia al vettore $\boldsymbol{a}$ sia al vettore $\boldsymbol{b}$, fatto che si può controllare dimostrando che $\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{a} = 0$ e $\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{b} = 0$; questo equivale a dire che la componente di $\boldsymbol{c}$ lungo la direzione di $\boldsymbol{a}$ o di $\boldsymbol{b}$ è nulla. In generale il prodotto vettoriale dà come risultato un vettore perpendicolare a entrambi. Tale prodotto è nullo se i due vettori sono coassiali, così come è nullo il prodotto scalare di due vettori perpendicolari fra loro.

RIEPILOGO & SOMMARIO

Scalari e vettori Gli *scalari*, come per esempio la temperatura, hanno solo un'intensità. Sono grandezze specificate da un valore numerico e da un'unità di misura (ad esempio 10 °C) e seguono le regole dell'aritmetica e dell'algebra comune. I *vettori*, di cui è un esempio lo spostamento, hanno, oltre al valore assoluto, anche una direzione e un verso (per esempio, 5 m verso nord) e seguono le speciali regole dell'algebra vettoriale.

Somma geometrica dei vettori Due vettori $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ si possono sommare geometricamente disegnandoli nella medesima scala e collocandoli uno di seguito all'altro, cioè ponendo la coda del secondo in corrispondenza della punta del primo. Il vettore che congiunge la coda di $\boldsymbol{a}$ alla punta di $\boldsymbol{b}$ è il vettore somma $\boldsymbol{s}$. Per sottrarre $\boldsymbol{b}$ da $\boldsymbol{a}$ si inverte la direzione di $\boldsymbol{b}$ per ottenere $-\boldsymbol{b}$; poi si somma $-\boldsymbol{b}$ ad $\boldsymbol{a}$. La somma e la sottrazione vettoriale sono commutative

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}, \tag{3.2}$$

e rispondono alla proprietà associativa

$$(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}). \tag{3.3}$$

Componenti dei vettori Le componenti (scalari) a_x e a_y di un vettore $\boldsymbol{a}$ sono le proiezioni ortogonali di $\boldsymbol{a}$ sugli assi coordinati, che si ricavano tracciando rette perpendicolari dall'estremo di $\boldsymbol{a}$ agli assi coordinati. Le componenti sono date da

$$a_x = a\cos\theta \ \text{ e } \ a_y = a\sin\theta, \tag{3.5}$$

in cui θ viene misurato rispetto all'asse x secondo le regole della circonferenza trigonometrica. Il segno algebrico delle componenti indica il loro verso lungo l'asse associato. Date le componenti, possiamo ricostruire il modulo e l'orientamento del vettore mediante

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \quad \text{e} \quad \tan\theta = \frac{a_y}{a_x}. \tag{3.6}$$

ISBN 978-88-08-18229-6

Versori Risulta spesso utile introdurre i vettori unitari, o *versori*, **i**, **j** e **k** che hanno modulo 1 e le cui direzioni sono rispettivamente quelle degli assi x, y e z in un sistema di coordinate destrorso. Qualsiasi vettore $\boldsymbol{a}$ può essere espresso mediante i versori come

$$\boldsymbol{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}, \tag{3.7}$$

dove $a_x\mathbf{i}$, $a_y\mathbf{j}$ e $a_z\mathbf{k}$ sono le **componenti vettoriali** di $\boldsymbol{a}$ e a_x, a_y e a_z sono le **componenti scalari** di $\boldsymbol{a}$.

Somma di vettori con il metodo analitico Per sommare i vettori con il metodo analitico valgono le seguenti regole:

$$r_x = a_x + b_x \qquad r_y = a_y + b_y \qquad r_z = a_z + b_z. \qquad \text{(da 3.10 a 3.12)}$$

Qui $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ sono i vettori da sommare e $\boldsymbol{r}$ è il vettore somma. Si noti che abbiamo sommato le componenti asse per asse. Possiamo quindi esprimere la somma sia col metodo dei versori sia con i moduli e gli angoli.

I vettori e le leggi della fisica Ogni situazione fisica che implica l'uso di vettori si può descrivere ricorrendo a molti possibili sistemi di coordinate. Di solito si sceglie quello che semplifica di più il nostro lavoro. Tuttavia i rapporti fra le grandezze vettoriali non dipendono dalla nostra scelta. Anche le leggi della fisica sono indipendenti dalla scelta del sistema di coordinate.

Moltiplicazione di un vettore per uno scalare Il prodotto di uno scalare s e di un vettore $\boldsymbol{v}$ è un nuovo vettore il cui modulo è sv e la cui direzione è la stessa di $\boldsymbol{v}$ con lo stesso verso di $\boldsymbol{v}$ se s è positivo e verso opposto a $\boldsymbol{v}$ se s è negativo. Per dividere $\boldsymbol{v}$ per s si moltiplica $\boldsymbol{v}$ per $1/s$.

Prodotto scalare Il prodotto scalare di due vettori si scrive $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ ed è la quantità scalare data da

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = ab\cos\phi, \tag{3.20}$$

dove ϕ è l'angolo compreso fra la direzione di $\boldsymbol{a}$ e quella di $\boldsymbol{b}$. Il prodotto scalare può essere un numero positivo, nullo o negativo, a seconda del valore di ϕ. Il prodotto scalare è il prodotto del modulo di un vettore $\boldsymbol{a}$ per la componente del secondo vettore ($b\cos\phi$) nella direzione del primo vettore $\boldsymbol{a}$. Si osservi che $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a}$, sicché il prodotto scalare obbedisce alla proprietà commutativa.

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = (a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}) \cdot (b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k}), \tag{3.22}$$

che obbedisce alla proprietà distributiva. Notiamo che $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a}$.

Prodotto vettoriale Il prodotto vettoriale di due vettori si scrive $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ ed è un vettore $\boldsymbol{c}$ il cui modulo c è dato da

$$c = ab\sin\phi, \tag{3.24}$$

in cui ϕ è il minore dei due angoli compresi fra le direzioni di $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$. La direzione di $\boldsymbol{c}$ è ortogonale al piano definito da $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$, e il suo *verso positivo* si determina applicando la regola della mano destra descritta nella figura 3.19. Notiamo che $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = -(\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a})$, sicché il prodotto vettoriale non obbedisce alla proprietà commutativa.
Nella notazione con i versori abbiamo

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = (a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}) \times (b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k}), \tag{3.26}$$

in cui si applica la proprietà distributiva.

QUESITI

1. L'equazione 3.2 dimostra che l'addizione di due vettori $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ è commutativa. Ciò significa che la sottrazione è commutativa, cioè che $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}$?

2. Descrivere due vettori $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ tali che:

(a) $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}$ e $a + b = c$;

(b) $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$;

(c) $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}$ e $a^2 + b^2 = c^2$.

3. Se $\boldsymbol{d} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + (-\boldsymbol{c})$, quali delle seguenti relazioni valgono: (a) $\boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{d}) = \boldsymbol{c} + (-\boldsymbol{b})$, (b) $\boldsymbol{a} = (-\boldsymbol{b}) + \boldsymbol{d} + \boldsymbol{c}$, (c) $\boldsymbol{c} + (-\boldsymbol{d}) = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$?

4. I due vettori della figura 3.21 giacciono sul piano xy. Stabilire i segni delle componenti x e y di (a) $\boldsymbol{d}_1 + \boldsymbol{d}_2$, (b) $\boldsymbol{d}_1 - \boldsymbol{d}_2$ e (c) $\boldsymbol{d}_2 - \boldsymbol{d}_1$.

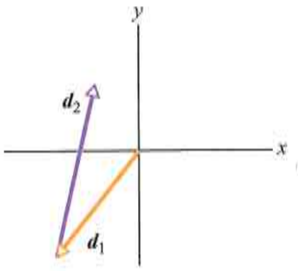


Figura 3.21 Quesito 4.

5. Quali delle combinazioni di assi della figura 3.22 può definirsi «sistema di coordinate destrorso»? Come si usa di solito, la lettera che individua l'asse è messa dalla parte positiva di quest'ultimo.

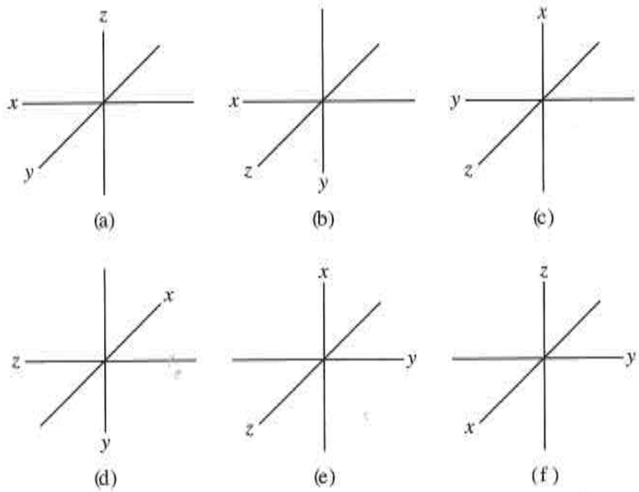


Figura 3.22 Quesito 5.

6. Se $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}$ possiamo dedurne che $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}$?

7. Se $\boldsymbol{F} = q(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})$ e $\boldsymbol{v}$ è perpendicolare a $\boldsymbol{B}$, qual è il verso di $\boldsymbol{B}$ con riferimento ai tre casi illustrati nella figura 3.23 per (a) q positiva e (b) q negativa?

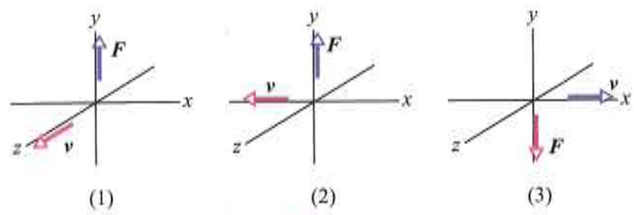


Figura 3.23 Quesito 7.

8. La figura 3.24 mostra il vettore $\boldsymbol{A}$ e altri quattro vettori di ugual modulo ma differente orientamento. (a) Quali di questi quattro danno lo stesso prodotto scalare con $\boldsymbol{A}$? (b) Quali danno un valore negativo se moltiplicati scalarmente per $\boldsymbol{A}$?