 ISBN 978-88-08-18229-6

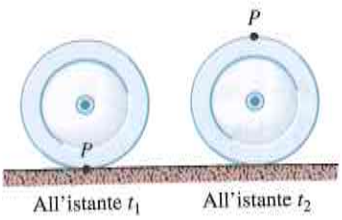


Figura 3.32 Problema 30.

. Per i vettori della figura 3.33, ove è $a = 4$, $b = 3$ e $c = 5$, si calcoli (a) $\cdot \boldsymbol{b}$, (b) $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}$ e (c) $\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c}$.

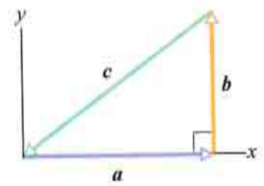


Figura 3.33 Problemi 32 e 33.

3. Per i vettori della figura 3.33, ove è $a = 4$, $b = 3$ e $c = 5$, si calcoli (a) modulo e (b) la direzione di $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$, (c) il modulo e (d) la direzione di $\times \boldsymbol{c}$, (e) il modulo e (f) la direzione di $\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}$.

4. Un vettore $\boldsymbol{a}$ di modulo 10 unità e un altro vettore $\boldsymbol{b}$ di modulo 6,0 nità giacciono in direzioni che divergono di 60°. Si trovino (a) il prootto scalare dei due vettori e (b) il modulo del prodotto vettoriale $\times \boldsymbol{b}$.

5. Un vettore $\boldsymbol{A}$ con modulo di 12,0 m è orientato con angolo di 60,0° nisurato in senso antiorario rispetto al semiasse positivo delle x di un istema di coordinate xy. Nello stesso sistema si ha un secondo vettore $\boldsymbol{B} = (12{,}0\ \text{m})\mathbf{i} + (8{,}00\ \text{m})\mathbf{j}$. Ruotiamo ora questo sistema in senso antioario attorno all'origine di un angolo di 20,0°, ottenendo un nuovo sistena $x'y'$. Dare l'espressione mediante i versori dei vettori (a) $\boldsymbol{A}$ e (b) $\boldsymbol{B}$ in uesto nuovo sistema di coordinate.

6. Un veliero salpa dall'isola d'Elba diretto a un punto situato 90,0 km nord. Si ritrova, a causa dello *scarroccio*, 50,0 km più a ovest della neta prevista. Ora, per tornare a casa, (a) che distanza dovrà percorrere (b) in che direzione?

37. Trovare il vettore somma dei seguenti 4 vettori (a) nella notazione con i versori, (b) esplicitandone il modulo e (c) l'angolo rispetto a $+x$:

$\boldsymbol{P}$: 10,0 m, con angolo di 25,0° in senso antiorario da $+x$

$\boldsymbol{Q}$: 12,0 m, con angolo di 10,0° in senso antiorario da $+y$

$\boldsymbol{R}$: 8,00 m, con angolo di 20,0° in senso orario da $-x$

$\boldsymbol{S}$: 9,00 m, con angolo di 40,0° in senso antiorario da $-y$.

38. Una donna percorre 250 m a piedi in una direzione che forma un angolo di 30° verso est rispetto al nord, poi 175 m dritta verso est. Usando metodi grafici si trovino (a) il modulo e (b) la direzione del suo spostamento finale dal punto di partenza. (c) Si calcoli la lunghezza del cammino effettivamente percorso. (d) Si confronti il modulo del suo spostamento con la distanza che essa ha percorso: quale è maggiore?

39. Il vettore $\boldsymbol{d}$ ha modulo 3,0 m ed è diretto verso sud. Determinare (a) il modulo e (b) la direzione e verso del vettore $5{,}0\boldsymbol{d}$. Determinare (c) il modulo e (d) direzione e verso del vettore $-2\boldsymbol{d}$.

40. Sapendo che $\boldsymbol{d}_1 + \boldsymbol{d}_2 = 5\boldsymbol{d}_3$, $\boldsymbol{d}_1 - \boldsymbol{d}_2 = 3\boldsymbol{d}_3$ e $\boldsymbol{d}_3 = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$, calcolare, in notazione con i versori, (a) $\boldsymbol{d}_1$ e (b) $\boldsymbol{d}_2$.

41. Trovare il vettore somma dei seguenti 4 vettori (a) nella notazione con i versori, (b) esplicitandone il modulo e (c) l'angolo rispetto a $+x$:

$\boldsymbol{A}$: $(2{,}00\ \text{m})\mathbf{i} + (3{,}00\ \text{m})\mathbf{j}$

$\boldsymbol{B}$: 4,00 m, con angolo di 65,0° in senso antiorario da $+x$

$\boldsymbol{C}$: $(-4{,}00\ \text{m})\mathbf{i} - (6{,}00\ \text{m})\mathbf{j}$

$\boldsymbol{D}$: 5,00 m, con angolo di $-235°$ in senso antiorario da $+x$.

42. Una particella subisce tre successivi spostamenti su un piano, come segue: $\boldsymbol{d}_1$, 4,00 m verso SO; $\boldsymbol{d}_2$, 5,00 m verso E; $\boldsymbol{d}_3$, 6,00 m in direzione di 60° verso nord rispetto all'est. Scegliete l'asse y orientato a nord e l'asse x orientato a est, e trovate (a) la componente x e (b) la componente y di $\boldsymbol{d}_1$, (c) la componente x e (d) la componente y di $\boldsymbol{d}_2$, (e) la componente x e (f) la componente y di $\boldsymbol{d}_3$. Quali sono (g) la componente x, (h) la componente y, (i) il modulo e (j) la direzione dello spostamento risultante. Qual è (k) il modulo e (l) la direzione dello spostamento che sarebbe richiesto per riportare la particella al suo punto di partenza.

43. Il vettore $\boldsymbol{a}$ giace nel piano xy formando un angolo di 63° misurato dal semiasse positivo delle x, ha una componente z positiva e modulo di 3,20 unità. Il vettore $\boldsymbol{b}$ giace nel piano xz formando un angolo di 48° misurato dal semiasse positivo delle x, ha una componente z positiva e modulo di 1,40 unità. Si trovi (a) $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$, (b) $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ e (c) l'angolo compreso fra $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$.

44. Un uomo parte dall'origine di un sistema di coordinate xyz con il piano xy orizzontale e l'asse x verso est, cammina per 1000 m in direzione est, 2000 m in direzione nord e quindi estrae una moneta dalla tasca e la lascia cadere da un'altura di 500 m di altezza. (a) Scrivete un'espressione, usando vettori unitari, per lo spostamento della moneta, dalla casa al suo punto di atterraggio. (b) L'uomo infine ritorna alla porta di casa, seguendo un percorso diverso da quello di andata. Quale è lo spostamento risultante per tutto il giro che ha compiuto?

45. Trovare l'angolo compreso tra due diagonali di un cubo di spigolo lungo a. Vedere il problema 17.

46. Sapendo che $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = 2\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = 4\boldsymbol{c}$ e $\boldsymbol{c} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$, trovare (a) $\boldsymbol{a}$ e (b) $\boldsymbol{b}$.

47. È stata compiuta una rapina in una banca nella città di Boston (vedi la mappa nella figura 3.34). Per eludere la polizia i ladri sono fuggiti in elicottero, percorrendo in volo tre tratte, descritte con i seguenti spostamenti: 32 km in direzione di 45° a sud rispetto a est; 53 km in direzione di 26° a nord rispetto a ovest; 26 km in direzione di 18° a est rispetto a sud. Alla fine del terzo volo furono catturati. In che città sono stati catturati? (Si usi il metodo geometrico per sommare questi spostamenti sulla carta).

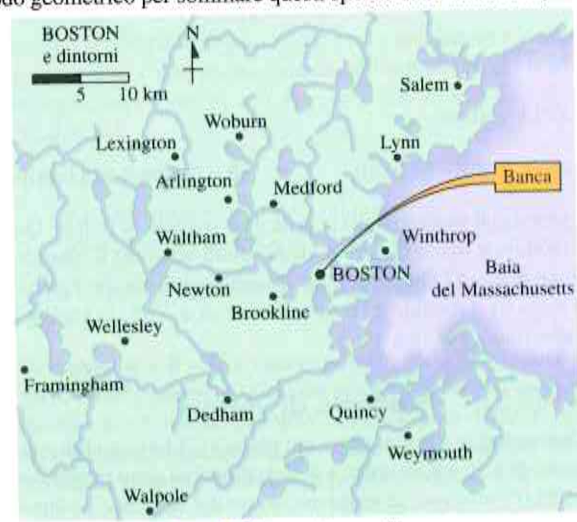


Figura 3.34 Problema 47.

48. Si dimostri che $\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a})$ vale zero per qualsiasi coppia di vettori $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$. (b) Qual è il valore di $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a})$, se l'angolo ϕ compreso fra le direzioni di $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ è diverso da zero?

49. Si dimostri che l'area del triangolo compreso tra i vettori $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ e il segmento rosso della figura 3.35 vale $1/2\,|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}|$.

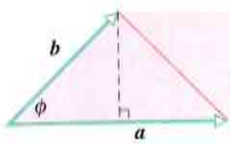


Figura 3.35 Problema 49.

50. Calcolare il modulo di $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a})$ sapendo che $a = 3{,}90$, $b = 2{,}70$ e che l'angolo compreso tra i due vettori è di 63,0°.

CAPITOLO 4

Moto in due e tre dimensioni

4.1 POSIZIONE E SPOSTAMENTO

Obiettivi di apprendimento

Dopo aver letto questo paragrafo dovreste essere in grado di…

4.01 Disegnare vettori posizione per una particella puntiforme in due e tre dimensioni, indicando le loro componenti lungo gli assi coordinati del sistema di riferimento.

4.02 Determinare, dato un sistema di coordinate, l'orientamento e il modulo del vettore posizione di una particella a partire dalle sue componenti e viceversa.

4.03 Applicare la relazione che intercorre tra il vettore spostamento di una particella e i suoi vettori posizione relativi al punto iniziale e a quello finale.

Idee chiave

- Il punto in cui si trova una particella rispetto all'origine di un sistema di coordinate è individuato dal vettore posizione $\boldsymbol{r}$, che, espresso tramite i vettori unitari, si scrive come

$$\boldsymbol{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}.$$

In questa espressione $x\mathbf{i}$, $y\mathbf{j}$ e $z\mathbf{k}$ sono le componenti del vettore posizione $\boldsymbol{r}$, laddove x, y e z sono le sue componenti scalari e rappresentano le coordinate della particella.

- Un vettore posizione si può descrivere o mediante il modulo e uno o due angoli di orientamento o mediante le sue componenti vettoriali o scalari.
- Quando una particella si muove in modo che il suo vettore posizione cambi da $\boldsymbol{r}_1$ a $\boldsymbol{r}_2$, lo spostamento $\Delta\boldsymbol{r}$ della particella è dato da

$$\Delta\boldsymbol{r} = (x_2 - x_1)\mathbf{i} + (y_2 - y_1)\mathbf{j} + (z_2 - z_1)\mathbf{k} = \Delta x\,\mathbf{i} + \Delta y\,\mathbf{j} + \Delta z\,\mathbf{k}.$$

L'aspetto fisico

In questo capitolo proseguiamo ad analizzare gli aspetti fisici del moto, ampliandone il dominio a due e tre dimensioni. Per esempio, i ricercatori medici e gli ingegneri aeronautici sono molto interessati alla fisica del moto tridimensionale nello studio dei loop che compiono gli aerei da combattimento, perché un moderno aviogetto a elevate prestazioni può compiere virate così rapide e strette da far perdere conoscenza al pilota. I tecnici sportivi sono attenti alla fisica della pallacanestro. (Un giocatore sulla linea di tiro libero come deve lanciare la palla per andare a canestro?)

Il moto tridimensionale non è immediato da afferrare. Per esempio, potreste essere un buon guidatore d'automobile su una strada dritta e pianeggiante (moto unidimensionale), ma è probabile che vi trovereste in difficoltà a dover atterrare con un aereo su una pista (moto tridimensionale) senza idoneo addestramento.

Anche per lo studio del moto bi- e tridimensionale cominciamo dall'esaminare la posizione e lo spostamento.

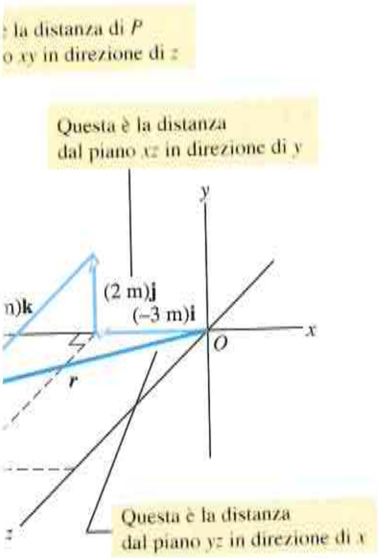
Posizione e spostamento

Un modo usuale di localizzare un oggetto assimilabile a una particella (un *corpo puntiforme*, cioè un corpo ideale che non occupa spazio e si individua solo con un punto) è per mezzo del **vettore posizione** $\boldsymbol{r}$, un vettore che si estende da un punto di riferimento (di solito l'origine del sistema di coordinate) al punto in cui si trova l'oggetto. Secondo la notazione con i versori del paragrafo 3.2, $\boldsymbol{r}$ si può scrivere:

$$\boldsymbol{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}, \tag{4.1}$$

in cui $x\mathbf{i}$, $y\mathbf{j}$ e $z\mathbf{k}$ sono i *vettori componenti* di $\boldsymbol{r}$, e i coefficienti x, y e z sono le sue *componenti scalari*.

 ISBN 978-88-08-18229-6



gura 4.1 Il vettore posizione $\boldsymbol{r}$ che idividua l'oggetto P è il vettore somma ei suoi vettori componenti.

I coefficienti x, y e z forniscono la posizione dell'oggetto rispetto all'origine lungo i tre assi. Vale a dire che (x, y, z) sono le sue coordinate cartesiane. Per esempio, la figura 4.1 mostra un corpo puntiforme P il cui vettore posizione è

$$\boldsymbol{r} = (-3\ \mathrm{m})\mathbf{i} + (2\ \mathrm{m})\mathbf{j} + (5\ \mathrm{m})\mathbf{k},$$

con coordinate cartesiane (–3 m, 2 m, 5 m). Lungo l'asse x, P dista 3 m dall'origine, nella direzione $-\mathbf{i}$. Lungo l'asse y, 2 m dall'origine in direzione $+\mathbf{j}$. E lungo l'asse z, 5 m nella direzione $+\mathbf{k}$.

Quando un corpo si muove, il suo vettore posizione cambia in modo da puntare sempre dall'origine verso le diverse posizioni da questo occupate. Se è individuato dal vettore posizione $\boldsymbol{r}_1$ al tempo t_1 e da $\boldsymbol{r}_2$ al tempo t_2, il suo vettore *spostamento* $\Delta\boldsymbol{r}$ durante l'intervallo di tempo vale

$$\Delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1. \tag{4.2}$$

Usando la notazione con i versori dell'equazione 4.1, possiamo riscrivere lo spostamento come

$$\Delta\boldsymbol{r} = (x_2\,\mathbf{i} + y_2\,\mathbf{j} + z_2\,\mathbf{k}) - (x_1\,\mathbf{i} + y_1\,\mathbf{j} + z_1\,\mathbf{k}),$$

ossia

$$\Delta\boldsymbol{r} = (x_2 - x_1)\,\mathbf{i} + (y_2 - y_1)\,\mathbf{j} + (z_2 - z_1)\,\mathbf{k}, \tag{4.3}$$

dove le coordinate (x_1, y_1, z_1) corrispondono al vettore posizione $\boldsymbol{r}_1$, mentre le coordinate (x_2, y_2, z_2) corrispondono al vettore posizione $\boldsymbol{r}_2$. Possiamo anche riscrivere l'espressione per lo spostamento sostituendo Δx a $(x_2 - x_1)$ e analogamente Δy e Δz:

$$\Delta\boldsymbol{r} = \Delta x\mathbf{i} + \Delta y\mathbf{j} + \Delta z\mathbf{k}. \tag{4.4}$$

PROBLEMA SVOLTO 4.1 Vettore posizione bidimensionale, l'incursione del coniglio

Un coniglio attraversa di corsa un parcheggio nel quale, sorprendentemente, è stato tracciato un sistema di assi coordinati. Il suo percorso è tale che le componenti della sua posizione rispetto all'origine delle coordinate siano date, in funzione del tempo, dalle espressioni

$$x = -0{,}31t^2 + 7{,}2t + 28, \tag{4.5}$$

$$y = 0{,}22t^2 - 9{,}1t + 30. \tag{4.6}$$

Le unità di misura dei coefficienti sono tali che, se t è in secondi, x e y risultano in metri.

(a) Per $t = 15$ s, calcolate il vettore posizione del coniglio sia nella notazione con i versori sia esplicitando ampiezza e direzione di $\boldsymbol{r}$.

SOLUZIONE

L'**idea chiave** consiste nell'osservare che le coordinate x e y della posizione, date dalle equazioni 4.5 e 4.6, sono le componenti scalari del vettore posizione $\boldsymbol{r}$. Troviamo queste coordinate all'istante dato e poi usiamo le equazioni 3.6 per trovare modulo e orientamento del vettore posizione. Possiamo quindi scrivere

$$\boldsymbol{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}. \tag{4.7}$$

Abbiamo scritto $\boldsymbol{r}(t)$ piuttosto che $\boldsymbol{r}$ perché le componenti sono funzione di t e pertanto lo è anche $\boldsymbol{r}$.

Per $t = 15$ s le componenti sono

$$x = (-0{,}31)(15)^2 + (7{,}2)(15) + 28 = 66\ \mathrm{m},$$

$$y = (0{,}22)(15)^2 - (9{,}1)(15) + 30 = -57\ \mathrm{m}.$$

Quindi, per $t = 15$ s,

$$\boldsymbol{r} = (66\ \mathrm{m})\mathbf{i} - (57\ \mathrm{m})\mathbf{j}.$$

La figura 4.2a mostra il vettore $\boldsymbol{r}$ e le sue componenti.

Per trovare il modulo e l'angolo della direzione di $\boldsymbol{r}$ disegniamo il triangolo rettangolo e ricorriamo alle equazioni 3.6:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(66\ \mathrm{m})^2 + (-57\ \mathrm{m})^2} = 87\ \mathrm{m}$$

e

$$\theta = \arctan\frac{y}{x} = \arctan\left(\frac{-57\ \mathrm{m}}{66\ \mathrm{m}}\right) = -41^\circ.$$

Controprova. (Benché la tangente di $\theta = 139^\circ$ sia identica a quella di -41°, l'esame dei segni delle componenti di $\boldsymbol{r}$ porta a scartare il valore 139°.)

(b) Calcolate e tracciate il percorso del coniglio per t che va da zero a 25 s.

Diagramma. Abbiamo localizzato il coniglio in un certo istante, ma per vedere il suo percorso dobbiamo realizzare un grafico. Ripetiamo dunque la parte (a) del problema per i diversi valori di t e poi riportiamo i risultati sul grafico, come mostrato nella figura 4.2b, che raffigura il tracciato in base a sei valori di t.

ISBN 978-88-08-18229-6

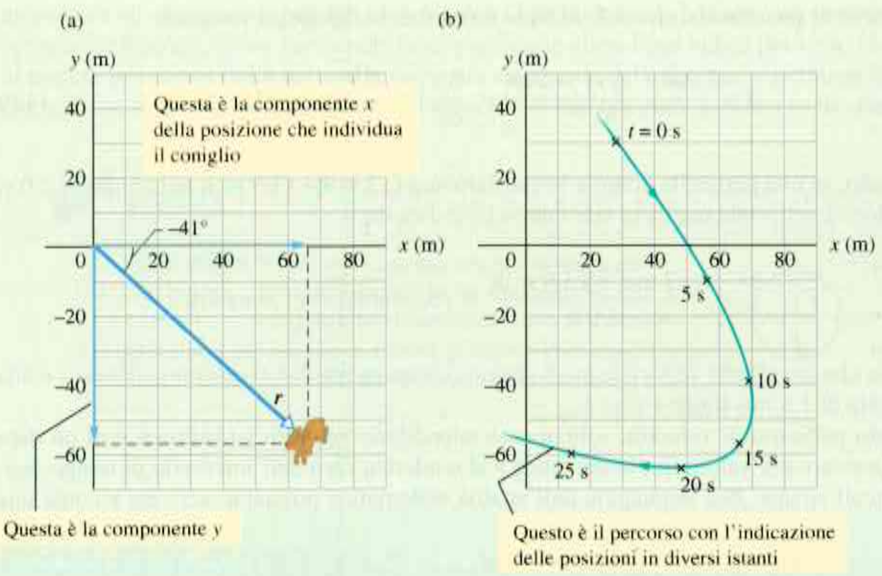


Figura 4.2 Problema svolto 4.1. (a) Il vettore posizione $\boldsymbol{r}$ di un coniglio e le sue componenti per t = 15 s. Lungo gli assi sono riportate le componenti scalari di $\boldsymbol{r}$. (b) Il percorso del coniglio con le sue posizioni segnate ai 6 valori di t.

4.2 VELOCITÀ MEDIA E VELOCITÀ ISTANTANEA

Obiettivi di apprendimento

Dopo aver letto questo paragrafo dovreste essere in grado di…

4.04 Riconoscere come la velocità sia una grandezza vettoriale e quindi sia caratterizzata da modulo, direzione e verso, oltre che dotata di componenti.

4.05 Disegnare vettori velocità per una particella puntiforme in due e tre dimensioni, indicando le loro componenti lungo gli assi coordinati del sistema di riferimento.

4.06 Mettere in relazione i vettori posizione iniziale e finale di una particella, il tempo trascorso per lo spostamento e la velocità vettoriale media, operando sia con la notazione vettoriale che fa uso di modulo e orientamento sia con quella che fa uso dei versori.

4.07 Descrivere il vettore posizione di una particella in funzione del tempo e determinare il suo vettore velocità istantanea.

Idee chiave

- Se una particella subisce uno spostamento $\Delta\boldsymbol{r}$ in un tempo Δt, la sua velocità media $\bar{\boldsymbol{v}}$, durante quell'intervallo è

$$\bar{\boldsymbol{v}} = \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}.$$

- Per Δt tendente a 0, il limite di $\bar{\boldsymbol{v}}$ è la velocità istantanea, o brevemente velocità, $\boldsymbol{v}$:

$$\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}.$$

che si può anche scrivere attraverso la notazione coi versori come

$$\boldsymbol{v} = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k},$$

in cui $v_x = dx/dt$, $v_y = dy/dt$ e $v_z = dz/dt$.

- La velocità istantanea $\boldsymbol{v}$ di una particella è sempre diretta lungo la retta tangente alla traiettoria della particella nel punto che individua la sua posizione.

Velocità media e velocità istantanea

Se una particella subisce uno spostamento $\Delta\boldsymbol{r}$ in un intervallo di tempo Δt, la sua *velocità vettoriale media* $\bar{\boldsymbol{v}}$ è:

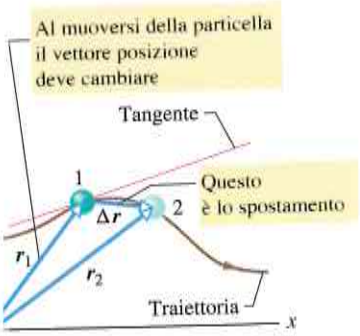
$$\text{velocità vettoriale media} = \frac{\text{vettore spostamento}}{\text{intervallo di tempo}},$$

ossia

$$\bar{\boldsymbol{v}} = \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}. \tag{4.8}$$

Da qui deduciamo immediatamente che la direzione di $\bar{\boldsymbol{v}}$ (il vettore a sinistra nell'equazione 4.8) deve essere la stessa dello spostamento $\Delta\boldsymbol{r}$ (il vettore a destra nella medesima equazione).

ISBN 978-88-08-18229-6



gura 4.3 È indicata la posizione della rticella sul suo percorso all'istante t_1 e l'istante successivo t_2, rispettivamente dividuate dal vettore posizione $\boldsymbol{r}_1$ e dal ttore posizione $\boldsymbol{r}_2$. Il vettore $\boldsymbol{r}$ rappre- nta lo spostamento della particella urante l'intervallo Δt. È disegnata anche tangente alla traiettoria nell'istante t_1.

Tramite la (4.4) possiamo scrivere la (4.8) in termini di componenti vettoriali:

$$\bar{\boldsymbol{v}} = \frac{\Delta x\mathbf{i} + \Delta y\mathbf{j} + \Delta z\mathbf{k}}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t}\mathbf{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t}\mathbf{j} + \frac{\Delta z}{\Delta t}\mathbf{k}. \tag{4.9}$$

Per esempio, se una particella compie lo spostamento (12 m)**i** + (3,0 m)**k** nel tempo di 2,0 s, la sua velocità vettoriale media in tale intervallo è data da

$$\bar{\boldsymbol{v}} = \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t} = \frac{(12\text{ m})\mathbf{i} + (3{,}0\text{ m})\mathbf{k}}{2{,}0\text{ s}} = (6{,}0\text{ m/s})\mathbf{i} + (1{,}5\text{ m/s})\mathbf{k}.$$

Vale a dire che la velocità vettoriale media ha una componente di 6,0 m/s lungo l'asse x e una componente di 1,5 m/s lungo l'asse z.

Quando parliamo di **velocità**, solitamente intendiamo **velocità istantanea** $\boldsymbol{v}$ in un dato istante. Questa $\boldsymbol{v}$ è il valore limite cui tende $\bar{\boldsymbol{v}}$ al tendere a zero dell'intervallo di tempo centrato su quell'istante. Nel linguaggio dell'analisi matematica possiamo scrivere $\boldsymbol{v}$ come una derivata:

$$\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}. \tag{4.10}$$

La figura 4.3 mostra il percorso di una particella che si muove nel piano xy. Spostandosi la particella verso destra lungo la curva, il suo vettore posizione la segue ruotando verso destra. Lo spostamento della particella durante l'intervallo di tempo Δt è $\Delta \boldsymbol{r}$.

Per trovare la velocità istantanea della particella all'istante, diciamo, t_1 (quando è nella posizione 1), stringiamo l'intervallo di tempo attorno a t_1. Mentre l'intervallo Δt si riduce a zero, si hanno 3 effetti: (1) il vettore $\boldsymbol{r}_2$ nella figura 4.3 si avvicina a $\boldsymbol{r}_1$ e quindi $\Delta \boldsymbol{r}$ si riduce a zero; (2) la direzione di $\Delta \boldsymbol{r}/\Delta t$ (e così la direzione di $\bar{\boldsymbol{v}}$) si avvicina alla direzione della retta tangente al percorso della particella nella posizione 1 in figura 4.3; (3) la velocità media $\bar{\boldsymbol{v}}$ si approssima alla velocità istantanea $\boldsymbol{v}$ all'istante t_1.

Al limite, quando $\Delta t \to 0$, $\bar{\boldsymbol{v}} \to \boldsymbol{v}$ e, cosa che qui più importa, $\bar{\boldsymbol{v}}$ assume la direzione della tangente, e così anche $\boldsymbol{v}$ ha la stessa direzione di quest'ultima.

> La velocità istantanea di una particella ha sempre la direzione della tangente alla curva che rappresenta il percorso della particella.

Lo stesso accade se si considerano tre dimensioni: $\boldsymbol{v}$ è sempre tangente alla traiettoria della particella.
Volendo scrivere la (4.10) utilizzando i versori, sostituiamo a $\boldsymbol{r}$ l'espressione data dalla (4.1):

$$\boldsymbol{v} = \frac{d}{dt}(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k},$$

che si può semplificare scrivendo

$$\boldsymbol{v} = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k}, \tag{4.11}$$

in cui le componenti scalari di $\boldsymbol{v}$ sono

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt} \quad \text{e} \quad v_z = \frac{dz}{dt}. \tag{4.12}$$

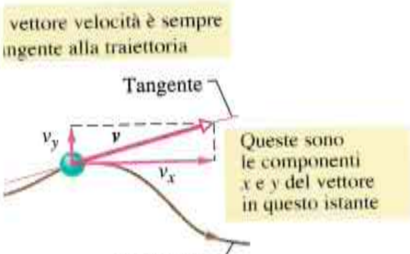


Figura 4.4 La velocità $\boldsymbol{v}$ di una particella con le sue componenti scalari.

Per esempio, dx/dt è la componente scalare di $\boldsymbol{v}$ lungo l'asse x. Possiamo quindi trovare le componenti scalari di $\boldsymbol{v}$ derivando le componenti scalari di $\boldsymbol{r}$.

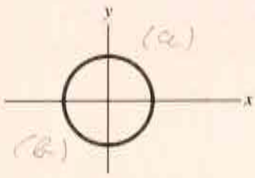
La figura 4.4 mostra un vettore velocità $\boldsymbol{v}$ e le sue componenti scalari su x e y. Si noti che $\boldsymbol{v}$ è tangente al percorso della particella nella posizione in cui si trova. *Avvertimento*: quando si tracciano vettori posizione come nelle figure da 4.1 a 4.3, si disegnano frecce che vanno da

ISBN 978-88-08-18229-6

un punto a un altro punto specifici (da *qui* a *là*). Quando invece si disegna un vettore velocità, come nella figura 4.4, *non* si estende da un punto a un altro. Esso indica piuttosto la direzione di marcia istantanea della particella collocata sulla coda della freccia, e pertanto la sua lunghezza (che rappresenta il modulo della velocità) si può tracciare con una scala qualunque.

✔ VERIFICA 1

La figura illustra il percorso circolare seguito da una particella. Se la velocità della particella in un certo istante è $\boldsymbol{v} = (2\ \text{m/s})\mathbf{i} - (2\ \text{m/s})\mathbf{j}$, in quale quadrante si trova al momento la particella, supposto che si muova in senso (a) orario o (b) antiorario? Tracciate $\boldsymbol{v}$ sulla figura per entrambi i casi.



PROBLEMA SVOLTO 4.2 Vettore velocità bidimensionale, l'incursione del coniglio

Trovare la velocità $\boldsymbol{v}$ all'istante $t = 15$ s per il coniglio del precedente problema svolto.

SOLUZIONE

Si può calcolare $\boldsymbol{v}$ derivando le componenti del suo vettore posizione.

Calcoli. Applicando la prima delle (4.12) alla (4.5), troviamo la componente x di $\boldsymbol{v}$:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(-0{,}31t^2 + 7{,}2t + 28) = -0{,}62t + 7{,}2. \quad (4.13)$$

Per $t = 15$ s questa espressione dà $-2{,}1$ m/s. Analogamente, applicando la seconda delle (4.12) alla (4.6) troviamo la componente y:

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(0{,}22t^2 - 9{,}1t + 30) = 0{,}44t - 9{,}1. \quad (4.14)$$

Per $t = 15$ s questa dà $v_y = -2{,}5$ m/s. Introducendo i valori nell'equazione 4.11 si ha

$$\boldsymbol{v} = (-2{,}1\ \text{m/s})\mathbf{i} + (-2{,}5\ \text{m/s})\mathbf{j}.$$

La figura 4.6 mostra il vettore $\boldsymbol{v}$ tangente al percorso del coniglio nella direzione in cui sta correndo all'istante $t = 15$ s.

Per ottenere l'ampiezza e la direzione di $\boldsymbol{v}$ possiamo ricorrere a una calcolatrice capace di trattare i vettori oppure servirci dell'equazione 3.6 e ottenere

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(-2{,}1\ \text{m/s})^2 + (-2{,}5\ \text{m/s})^2} = 3{,}3\ \text{m/s}$$

$$\theta = \arctan\frac{v_y}{v_x} = $$
$$= \arctan\left(\frac{-2{,}5\ \text{m/s}}{-2{,}1\ \text{m/s}}\right) = \arctan 1{,}19 = -130°.$$

Verifica. L'angolo vale $-130°$ oppure $-130° + 180° = +50°$?

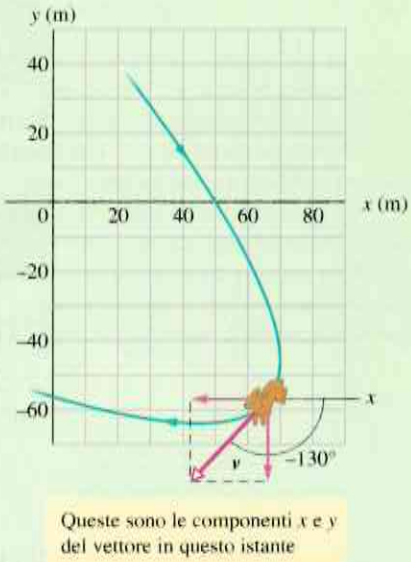


Figura 4.5 Problema svolto 4.2. La velocità del coniglio per $t = 15$ s. Si noti che $\boldsymbol{v}$ è tangente alla traiettoria nel punto corrispondente alla posizione del coniglio in quell'istante. Sono mostrate le componenti scalari di $\boldsymbol{v}$.

4.3 ACCELERAZIONE MEDIA E ACCELERAZIONE ISTANTANEA

Obiettivi di apprendimento

Dopo aver letto questo paragrafo dovreste essere in grado di…

4.08 Riconoscere come l'accelerazione sia una grandezza vettoriale e quindi sia caratterizzata da modulo, direzione e verso, oltre che dotata di componenti.

4.09 Disegnare vettori accelerazione in due e tre dimensioni per una particella puntiforme, indicando le loro componenti.

4.10 Determinare il vettore accelerazione media, espresso sia mediante i versori sia in termini di modulo e orientamento, dati i vettori velocità iniziale e finale di una particella assieme al tempo intercorso tra i due istanti.

 ISBN 978-88-08-18229-6

1 Descrivere il vettore velocità di una particella in funzione del tempo e determinare il suo vettore accelerazione istantanea.
2 Applicare, per ciascuna coordinata in cui avviene un moto, le equazioni per accelerazione costante del capitolo 2 per mettere in relazione l'accelerazione alla velocità, alla posizione e al tempo.

ee chiave

- Se la velocità di una particella cambia dal valore $\boldsymbol{v}_1$ al valore $\boldsymbol{v}_2$ nell'intervallo di tempo Δt, la sua accelerazione media $\bar{\boldsymbol{a}}$ in tale intervallo è

$$\bar{\boldsymbol{a}} = \frac{\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1}{\Delta t} = \frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t}.$$

- Per Δt tendente a 0, il limite di $\bar{\boldsymbol{a}}$ è l'accelerazione istantanea, o brevemente accelerazione, $\boldsymbol{a}$:

$$\boldsymbol{a} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt},$$

che si può anche scrivere attraverso la notazione coi versori come

$$\boldsymbol{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k},$$

in cui $a_x = dv_x/dt$, $a_y = dv_y/dt$ e $a_z = dv_z/dt$.

Accelerazione media e accelerazione istantanea

Quando la velocità di una particella cambia da $\boldsymbol{v}_1$ a $\boldsymbol{v}_2$ in un intervallo Δt, la sua **accelerazione media** $\bar{\boldsymbol{a}}$ durante tale intervallo è:

$$\text{accelerazione media} = \frac{\text{variazione di velocità}}{\text{intervallo di tempo}},$$

ossia

$$\bar{\boldsymbol{a}} = \frac{\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1}{\Delta t} = \frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t}. \tag{4.15}$$

Se riduciamo a zero Δt (centrato sull'istante t), $\bar{\boldsymbol{a}}$, al limite, tende all'**accelerazione (istantanea)** $\boldsymbol{a}$ nell'istante t:

$$\boldsymbol{a} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt}. \tag{4.16}$$

Se la velocità cambia *in intensità* o *in direzione* (o *in entrambe*), si ha un'accelerazione diversa da zero.

Sostituendo nell'equazione 4.16 l'espressione di $\boldsymbol{v}$ data dall'equazione 4.11, si ottiene la forma, nella notazione con i versori:

$$\boldsymbol{a} = \frac{d}{dt}(v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k}) = \frac{dv_x}{dt}\mathbf{i} + \frac{dv_y}{dt}\mathbf{j} + \frac{dv_z}{dt}\mathbf{k},$$

che possiamo riscrivere come

$$\boldsymbol{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}. \tag{4.17}$$

nella quale le tre componenti scalari del vettore accelerazione sono date da

$$a_x = \frac{dv_x}{dt}, \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} \quad \text{e} \quad a_z = \frac{dv_z}{dt}. \tag{4.18}$$

Possiamo cioè ottenere le componenti scalari di $\boldsymbol{a}$ derivando le componenti di $\boldsymbol{v}$.

La figura 4.6 mostra un vettore accelerazione $\boldsymbol{a}$ e le sue componenti scalari per il moto in due dimensioni di una particella. *Avvertimento*: quando si disegna un vettore accelerazione, come nella figura 4.6, questo *non* si estende da un punto a un altro specifici. Esso indica piuttosto la direzione dell'accelerazione istantanea della particella collocata sulla coda della freccia, e pertanto la sua lunghezza (che rappresenta il modulo dell'accelerazione) si può tracciare con una scala qualunque.

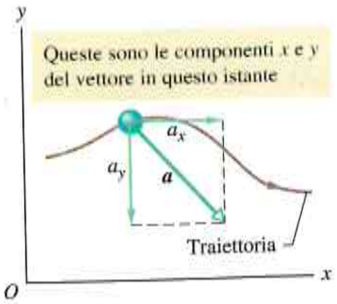


Figura 4.6 L'accelerazione $\boldsymbol{a}$ di una particella con le sue componenti scalari.

VERIFICA 2

Seguono qui quattro descrizioni del moto (x in metri e t in secondi) relativo a un disco da hockey che si muove sul piano xy:

(1) $x = -3t^2 + 4t - 2$ e $y = 6t^2 - 4t$ $a_x = -6$; $a_y = 12$

(2) $x = -3t^2 - 4t$ e $y = -5t^2 + 6$ $a_x = -6$; $a_y = -10$

(3) $\boldsymbol{r} = 2t^2\mathbf{i} - (4t + 3)\mathbf{j}$ $\vec{a} = 4\vec{i}$

(4) $\boldsymbol{r} = (4t^3 - 2t)\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$. $\vec{a} = 24t\vec{i}$

Per ciascun caso determinare se le componenti x e y dell'accelerazione sono costanti e se l'accelerazione $\boldsymbol{a}$ è costante.

PROBLEMA SVOLTO 4.3 Vettore accelerazione bidimensionale, l'incursione del coniglio

Trovare l'accelerazione $\boldsymbol{a}$ all'istante $t = 15$ s per il coniglio dei precedenti problemi svolti.

SOLUZIONE

Si può calcolare $\boldsymbol{a}$ derivando le componenti del suo vettore velocità.

Calcoli. Applicando la prima delle (4.18) alla (4.13) troviamo la componente x di $\boldsymbol{a}$:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d}{dt}(-0{,}62t + 7{,}2) = -0{,}62 \text{ m/s}^2.$$

In modo analogo, applicando la seconda delle (4.18) alla (4.14) otteniamo la componente y:

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d}{dt}(0{,}44t - 9{,}1) = 0{,}44 \text{ m/s}^2.$$

Notiamo che l'accelerazione non dipende dal tempo: è costante. Ciò perché la variabile tempo non appare in nessuna delle componenti dell'accelerazione. L'equazione 4.17 dà allora

$$\boldsymbol{a} = (-0{,}62 \text{ m/s}^2)\mathbf{i} + (0{,}44 \text{ m/s}^2)\mathbf{j},$$

e la sua rappresentazione è riportata nella figura 4.7.

Il modulo e la direzione dell'accelerazione si possono ricavare con una calcolatrice capace di trattare i vettori, oppure mediante l'equazione 3.6.
Per il modulo abbiamo

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{(-0{,}62 \text{ m/s}^2)^2 + (0{,}44 \text{ m/s}^2)^2} = 0{,}76 \text{ m/s}^2$$

e per l'angolo

$$\theta = \arctan\frac{a_y}{a_x} = \arctan\left(\frac{0{,}44 \text{ m/s}^2}{-0{,}62 \text{ m/s}^2}\right) = -35° .$$

Tuttavia questo risultato che ci appare sulla calcolatrice indica che $\boldsymbol{a}$ è diretto verso il basso a destra nella figura 4.7. Di nuovo sappiamo dall'esame delle componenti che l'accelerazione deve essere diretta in alto a sinistra. Cerchiamo quindi l'altro angolo (non mostrato dalla calcolatrice) che presenta una tangente pari a quella dell'angolo di 35°, aggiungendo a questo 180°:

$$-35° + 180° = 145°.$$

Ciò *è* coerente con le componenti di $\boldsymbol{a}$ perché il vettore che ne risulta è diretto verso sinistra e verso l'alto. Si noti che $\boldsymbol{a}$ ha lo stesso modulo e orientamento per tutta la corsa del coniglio giacché è costante. Significa che avremmo potuto riportare lo stesso identico vettore per qualsiasi altro punto della traiettoria seguita dal coniglio, semplicemente traslandolo parallelo a se stesso in modo che la sua coda risulti nel punto desiderato.

In questo problema svolto abbiamo dovuto operare la derivata di un vettore scritto in notazione coi versori. Un errore comune consiste nel dimenticare di esplicitare i versori, e ciò sfocia in una serie di numeri e simboli senza significato. Ricordate che la derivata di un vettore è sempre un vettore.

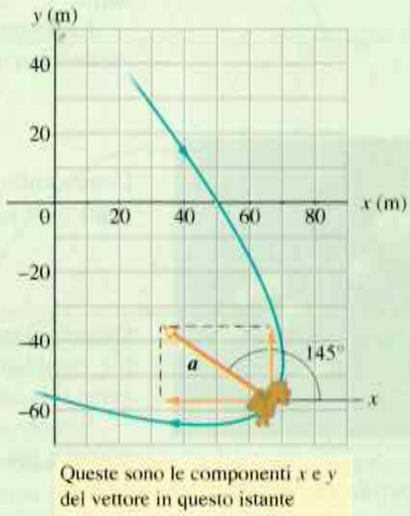


Figura 4.7 Problema svolto 4.3. L'accelerazione $\boldsymbol{a}$ del coniglio per $t = 15$ s. Il coniglio ha la stessa accelerazione lungo tutto il percorso.

 ISBN 978-88-08-18229-6

4.4 MOTO DEI PROIETTILI

Obiettivi di apprendimento

Dopo aver letto questo paragrafo dovreste essere in grado di...

4.13 Illustrare, su un disegno che rappresenta il percorso di un proiettile in moto, come variano modulo e direzione della velocità e dell'accelerazione durante il volo.

4.14 Calcolare la posizione, lo spostamento e la velocità di una particella in volo libero per un dato istante, conoscendo il vettore velocità al lancio, dato sia in termini di modulo e orientamento sia in notazione a versori.

4.15 Calcolare la velocità vettoriale di lancio di un proiettile, conoscendo i suoi dati in un certo istante del volo.

Idee chiave

- Nel moto del proiettile un corpo puntiforme viene lanciato in aria con una velocità iniziale v_0 e in una direzione che forma un angolo q_0 rispetto a un asse x orizzontale. Durante il volo la componente orizzontale della sua accelerazione è zero, mentre la componente verticale è $-g$, diretta verso il basso secondo un asse y.
- Le equazioni del moto della particella in volo si possono scrivere come

$$\begin{aligned} x - x_0 &= (v_0 \cos\theta_0)\, t, \\ y - y_0 &= (v_0 \sin\theta_0)t - \tfrac{1}{2}gt^2, \\ v_y &= v_0 \sin\theta_0 - gt, \\ v_y^2 &= (v_0 \sin\theta_0)^2 - 2g(y - y_0). \end{aligned}$$

- La traiettoria della particella nel moto del proiettile è parabolica e, posti $x_0 = y_0 = 0$, è data da

$$y = (\tan\theta_0)x - \frac{gx^2}{2(v_0\cos\theta_0)^2}.$$

- La *gittata* orizzontale R del proiettile, cioè la distanza tra il punto di lancio e il punto in cui il proiettile cadendo ripassa di nuovo alla medesima quota di lancio, è

$$R = \frac{v_0^2}{g}\sin 2\theta_0.$$

Moto dei proiettili

Consideriamo ora una particella che si muove in due dimensioni, in caduta libera, con velocità iniziale $\boldsymbol{v}_0$ e accelerazione di gravità $\boldsymbol{g}$ costante diretta verso il basso. Alle particelle in queste condizioni viene dato il nome di **proiettili**. Tali possono essere una palla da tennis, come nella figura 4.8, da baseball, o qualsiasi altro oggetto in caduta libera, ma non possono esserlo, per esempio, un aeroplano o un'anatra in volo. Il nostro scopo è ora analizzare il moto del proiettile utilizzando le equazioni del moto bidimensionale dei paragrafi 4.1, 4.2 e 4.3, ammettendo sempre che la resistenza dell'aria non abbia alcun effetto sul moto del proiettile.

La figura 4.9 mostra il percorso che il proiettile segue in queste condizioni ideali. Il proiettile è lanciato con una velocità iniziale $\boldsymbol{v}_0$ che si può esprimere così:

$$\boldsymbol{v}_0 = v_{0x}\mathbf{i} + v_{0y}\mathbf{j}. \tag{4.19}$$

Conoscendo l'angolo θ_0 fra $\boldsymbol{v}_0$ e il verso positivo dell'asse x, si possono ricavare le componenti v_{0x} e v_{0y}:

$$v_{0x} = v_0\cos\theta_0 \quad \text{e} \quad v_{0y} = v_0 \sin\theta_0. \tag{4.20}$$

Richard Megna/Fundamental Photographs

Figura 4.8 Fotografia stroboscopica di una palla da tennis che rimbalza su una superficie dura. Fra due successivi rimbalzi essa descrive la traiettoria di un proiettile.

Durante il suo moto in due dimensioni il vettore posizione $\boldsymbol{r}$ e il vettore velocità $\boldsymbol{v}$ del proiettile cambiano continuamente, ma il suo vettore accelerazione è costante e *sempre* diretto verso il basso. Il proiettile possiede accelerazione orizzontale *nulla*.

Il moto del proiettile, come quelli nelle figure 4.8 e 4.9, sembra complicato, ma il suo esame è più semplice se si utilizza la seguente proprietà (ben nota dall'esperienza):

> Nel moto del proiettile il moto orizzontale e il moto verticale sono indipendenti l'uno dall'altro; come dire che nessuno dei due influenza l'altro.

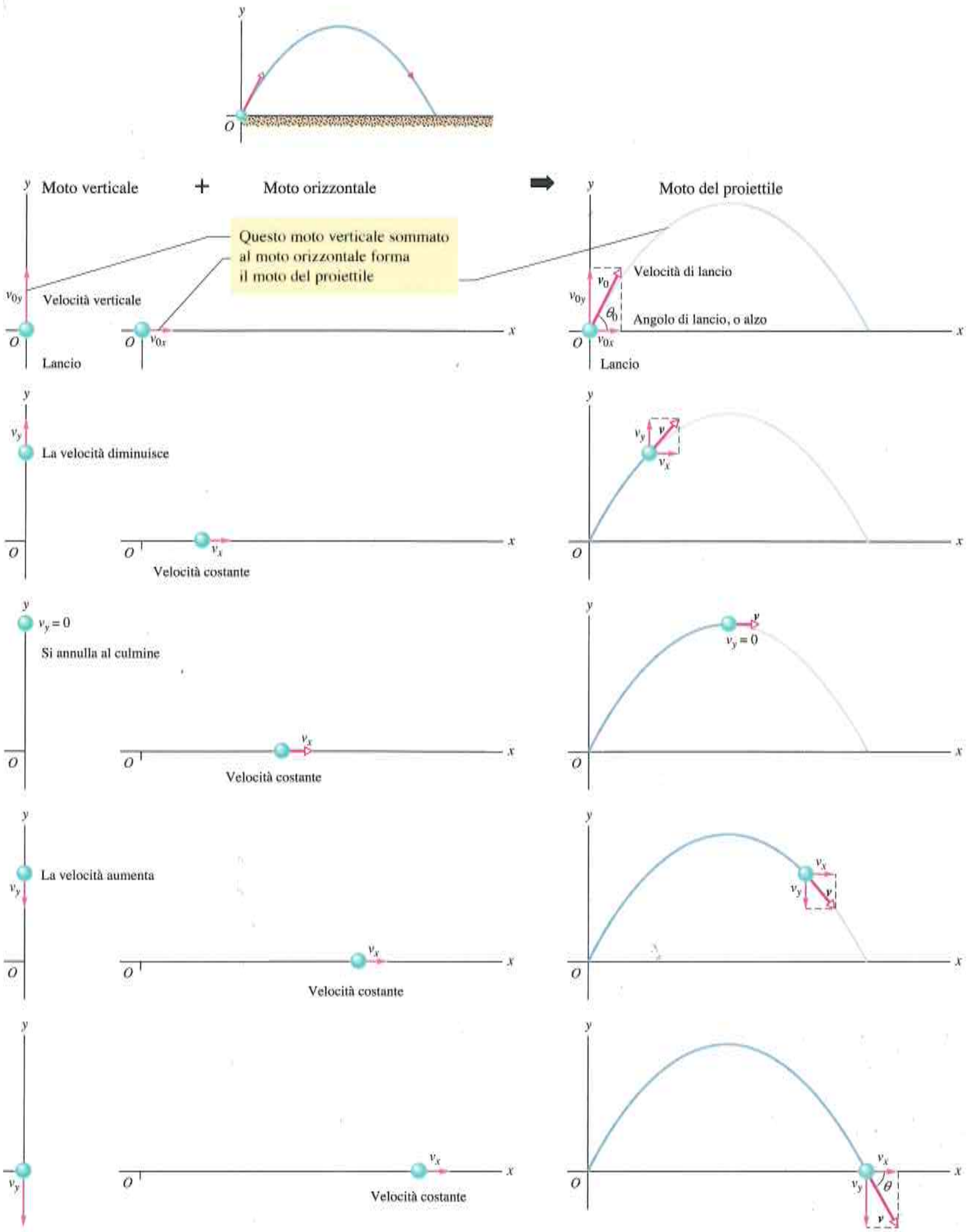
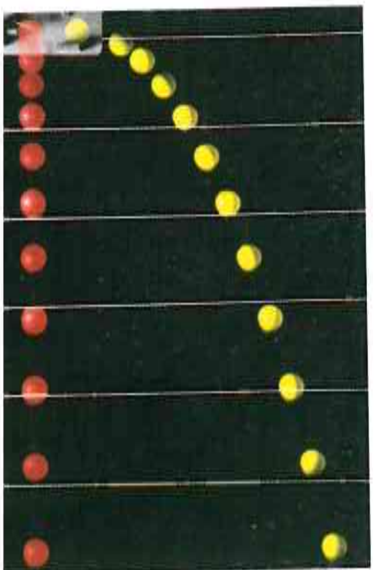


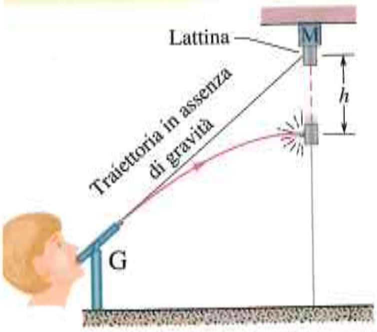
Figura 4.9 *Moto del proiettile* che anima un oggetto lanciato in aria dall'origine delle coordinate con velocità iniziale $\boldsymbol{v}_0$ ad angolo di lancio θ_0. Il moto si può considerare come una combinazione di un moto verticale (ad accelerazione costante) e di un moto orizzontale (a velocità costante) indipendenti, come illustrano le componenti delle velocità.

 ISBN 978-88-08-18229-6



ichard Megna/Fundamental Photographs

gura 4.10 Una pallina è lasciata cade- da ferma nello stesso istante in cui n'altra è sparata orizzontalmente verso estra. I loro moti verticali sono identici.



igura 4.11 La pallina colpisce sempre a lattina. Entrambe cadono di un'ugua- e altezza h dal punto in cui si incontre- ebbero se non esistesse l'accelerazione li gravità.

Questa circostanza ci consente di scindere un problema di moto in due dimensioni in due distinti e più semplici problemi unidimensionali, uno di moto orizzontale (con accelerazione *nulla*) e l'altro di moto verticale (con accelerazione costante diretta verso il basso). Di seguito vengono illustrati due esperimenti che confermano l'indipendenza dei due moti.

Due palline da golf

La figura 4.10 è una fotografia stroboscopica di due palline da golf, una lasciata cadere da ferma e l'altra sparata orizzontalmente da una pistola a molla. Il loro moto verticale è identico, visto che ciascuna copre la stessa distanza verticale nello stesso intervallo di tempo. *Il fatto che una delle due si muova orizzontalmente mentre cade non ha alcun effetto sul suo moto verticale*. Il moto verticale è indipendente da quello orizzontale.

Un'esperienza che affascina gli studenti

Nella figura 4.11 si vede una cerbottana G che usa una pallina come proiettile. Il bersaglio è una lattina trattenuta da un magnete M, contro la quale è puntato a vista il tubo della cerbottana. Un semplice dispositivo fa sganciare la lattina dal magnete nell'istante in cui la pallina esce dalla cerbottana.

Se l'accelerazione di gravità g fosse nulla, la pallina seguirebbe la linea retta indicata nella figura 4.11, e la lattina rimarrebbe sospesa nella sua posizione anche dopo essere stata rilasciata dal magnete. Il proiettile colpirebbe quindi certamente il bersaglio.

Sappiamo, però, che g è *diversa* da zero. Ciononostante la pallina colpisce *ugualmente* il bersaglio! Come risulta dalla figura 4.11, durante il tempo di volo del proiettile sia questo sia il bersaglio coprono la stessa altezza di caduta h rispetto alla posizione che avrebbero avuto in caso di g nulla. E quanto più forte soffia il tiratore, tanto più veloce va il proiettile, tanto minori sono il tempo di volo e l'altezza di caduta h dei due corpi.

VERIFICA 3

In un certo istante una pallina in volo ha velocità $\mathbf{v} = (25\ \text{m/s})\mathbf{i} - (4{,}9\ \text{m/s})\mathbf{j}$, l'asse x è orizzontale e l'asse y è diretto verticalmente verso l'alto. La pallina ha già passato il culmine della sua traiettoria? Si

Moto orizzontale

Siamo ora in grado di analizzare il moto dei proiettili, orizzontalmente e verticalmente. Cominciamo con il moto orizzontale. Dal momento che l'*accelerazione* in direzione orizzontale è *nulla*, la componente orizzontale v_x della velocità rimane invariata e pari a v_{0x} durante tutto il moto, come dimostra la figura 4.12. Lo spostamento orizzontale $x - x_0$ dalla posizione iniziale x_0 è determinato in ogni istante t dall'equazione 2.15, nella quale poniamo $a = 0$:

$$x - x_0 = v_{0x}t,$$

e sostituendo v_{0x} con $v_0 \cos\theta_0$:

$$x - x_0 = (v_0 \cos\theta_0)t. \tag{4.21}$$

Moto verticale

Il moto verticale è quello che abbiamo esaminato nel paragrafo 2.5 per una particella in caduta libera. La caratteristica importante è che l'accelerazione è costante. Sussistono quindi le equazioni della tabella 2.1, in cui a vale $-g$ e la variabile spaziale è y. La (2.15), per esempio, diventa

$$\begin{aligned} y - y_0 &= v_{0y}t - \tfrac{1}{2}gt^2 \\ &= (v_0 \sin\theta_0)t - \tfrac{1}{2}gt^2, \end{aligned} \tag{4.22}$$

in cui a v_{0y} abbiamo sostituito la componente verticale della velocità $v_0 \sin \theta_0$. Le equazioni 2.11 e 2.16 similmente diventano

$$v_y = v_0 \sin \theta_0 - gt \tag{4.23}$$

e

$$v_y{}^2 = (v_0 \sin \theta_0)^2 - 2g(y - y_0). \tag{4.24}$$

Come si vede dalla figura 4.9 e dall'equazione 4.23, la componente verticale della velocità si comporta esattamente come per una palla lanciata verticalmente verso l'alto. È diretta inizialmente verso l'alto, e la sua intensità diminuisce gradatamente fino ad annullarsi quando il proiettile *raggiunge la posizione più elevata della traiettoria.* A questo punto la componente verticale della velocità si inverte e la sua intensità va aumentando sempre più rapidamente.

Jamie Budge

Figura 4.12 La componente verticale della velocità di questo appassionato dello *skateboard* varia, ma non la componente orizzontale, che coincide con la velocità dell'attrezzo: lo skateboard rimane quindi sempre verticalmente sotto il ragazzo, consentendogli di ritrovarlo nell'atterraggio.

Equazione della traiettoria

Possiamo trovare l'equazione del percorso del proiettile (la **traiettoria**) eliminando t fra le equazioni 4.21 e 4.22. Sostituendo nella (4.22) alla variabile t la sua espressione ricavata dalla (4.21), con opportuni adattamenti otteniamo

$$y = (\tan\theta_0)x - \frac{gx^2}{2(v_0 \cos\theta_0)^2} \quad \text{(traiettoria).} \tag{4.25}$$

È questa l'equazione del percorso tracciato nella figura 4.10. Per semplificare, nelle equazioni 4.21 e 4.22 abbiamo posto, rispettivamente, $x_0 = 0$ e $y_0 = 0$. E poiché g, θ_0 e v_0 sono costanti, l'equazione 4.25 risulta della forma $y = ax + bx^2$, con a e b costanti. Si tratta dell'equazione di una parabola e quindi la traiettoria è *parabolica*.

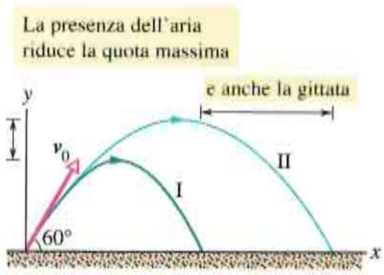


Figura 4.13 (I) Traiettoria di una palla da baseball calcolata tenendo conto della resistenza dell'aria. (II) Il percorso che la palla seguirebbe nel vuoto, calcolato secondo i metodi indicati in questo capitolo. Si veda la tabella 4.1 per i valori corrispondenti. (Da Brancazio P.J., *The Trajectory of a Fly Ball*, «The Physics Teacher», gennaio 1985.)

La gittata orizzontale

La *gittata R* del proiettile è la distanza *orizzontale* percorsa dal proiettile misurata nell'istante in cui il proiettile ripassa alla quota di partenza (quota di lancio). Per ricavarla, poniamo $x - x_0 = R$ nell'equazione 4.21 e $y - y_0 = 0$ nella (4.22):

$$R = (v_0 \cos \theta_0)t$$

e

$$0 = (v_0 \sin\theta_0)t - \tfrac{1}{2}gt^2.$$

Eliminando t fra queste due equazioni otteniamo

$$R = \frac{2v_0^2}{g} \sin\theta_0 \cos\theta_0.$$

Applicando l'identità $\sin(2\,\theta_0) = 2\sin\theta_0 \cos\theta_0$ (app. E), si ottiene

$$R = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\theta_0. \tag{4.26}$$

Attenzione: questa equazione non è valida quando la quota finale considerata *non* è uguale alla quota di lancio.

Si noti che R nella (4.26) ha il valore massimo per $\sin(2\,\theta_0) = 1$, che corrisponde a $2\theta_0 = 90°$ ovvero a $\theta_0 = 45°$.

La gittata orizzontale R è massima quando l'*alzo* (angolo di lancio) è di 45°.

TABELLA 4.1 **Due palle in volo***

	Percorso I (aria)	Percorso II (vuoto)
Gittata	98,5 m	177 m
Altezza massima	53,0 m	76,8 m
Tempo di volo	6,6 s	7,9 s

* Si veda la figura 4.13. L'angolo di lancio è di 60° e la velocità iniziale di 44,7 m/s.

 ISBN 978-88-08-18229-6

Ovviamente, se la quota di atterraggio differisce da quella di lancio, come succede in molti casi anche negli sport, l'angolo di 45° non garantisce la massima distanza tra il punto di lancio e quello di atterraggio.

Effetti dell'aria

Abbiamo assunto che l'aria nella quale il proiettile si muove non abbia alcun effetto sul suo movimento, ipotesi ragionevole a basse velocità. Per velocità più elevate, tuttavia, la discordanza fra i nostri calcoli e l'effettivo moto del proiettile può diventare rilevante, poiché l'aria resiste (si oppone) al moto. La figura 4.13, ad esempio, mostra due traiettorie per una palla da baseball che lascia la mazza a una velocità iniziale di 44,7 m/s sotto un angolo di 60° rispetto al piano orizzontale. La curva I (la palla del giocatore di baseball) rappresenta una traiettoria calcolata tenendo conto delle normali condizioni di gioco, in aria. La curva II (la palla del professore di fisica) è il percorso che la palla seguirebbe nel vuoto.

VERIFICA 4

Una palla da baseball viene battuta in campo esterno. Come variano durante il volo (si trascuri l'effetto dell'aria) le componenti (a) orizzontale e (b) verticale della velocità? Come variano le componenti (c) orizzontale e (d) verticale dell'accelerazione durante l'ascesa e la discesa, e al culmine della traiettoria?

PROBLEMA SVOLTO 4.4 Proiettile lasciato cadere da un aereo

Un aereo da soccorso vola a 198 km/h (= 55 m/s) alla quota costante di 500 m verso un punto posto sulla verticale di una persona che si dibatte in mare, come nella figura 4.14. Il pilota vuole sganciare la capsula salvagente in modo che cada in acqua molto vicino al naufrago.

(a) Sotto quale angolo visuale ϕ il pilota dovrebbe sganciare la capsula salvagente?

SOLUZIONE

Come idea chiave consideriamo che la capsula, una volta sganciata, si comporta come un proiettile, e quindi i moti orizzontale e verticale sono indipendenti e trattabili separatamente (non occorre seguire l'effettiva traiettoria curva). Il sistema di coordinate della figura 4.14 presenta l'origine nel punto di sgancio e da qui vediamo che ϕ è dato da

$$\phi = \arctan \frac{x}{h}, \tag{4.27}$$

ove x è l'ascissa della vittima (e della capsula quando tocca l'acqua) al momento dello sgancio e h è l'altezza dell'aereo. Conosciamo h (500 m) e quindi abbiamo bisogno di x per trovare ϕ. Possiamo ricavarlo dall'equazione 4.21:

$$x - x_0 = (v_0 \cos\theta_0)t. \tag{4.28}$$

Qui ci è noto $x_0 = 0$ perché l'origine è posta nel luogo di sgancio. Dato che la capsula viene *sganciata* e non lanciata dall'aeroplano, la sua velocità iniziale $\vec{v}_0$ è uguale a quella dell'aereo. Il suo modulo è dunque 55,0 m/s e l'angolo θ_0 vale 0°. Ci manca tuttavia il tempo t necessario alla capsula per raggiungere il naufrago. Per trovarlo consideriamo il moto verticale e precisamente l'equazione 4.22:

$$y - y_0 = (v_0 \sin\theta_0)t - \tfrac{1}{2}gt^2. \tag{4.29}$$

Ponendo $y - y_0 = -500$ m (col segno – perché il naufrago si trova al *di sotto* dell'origine) e introducendo gli altri valori nella (4.29) troviamo

$$-500\ \text{m} = (55{,}0\ \text{m/s})(\sin 0°)t - \tfrac{1}{2}(9{,}8\ \text{m/s}^2)t^2, \tag{4.30}$$

che, risolta rispetto a t, fornisce $t = 10{,}1$ s. Introducendo questo valore nella (4.28) si ottiene

$$x - 0 = (55{,}0\ \text{m/s})(\cos 0°)(10{,}1\ \text{s}), \tag{4.31}$$

ovvero

$$x = 555{,}5\ \text{m}.$$

A questo punto torniamo alla (4.27):

$$\phi = \arctan \frac{555{,}5\ \text{m}}{500\ \text{m}} = 48{,}0°.$$

(b) Stabilire la velocità $\vec{v}$ della capsula al momento dell'impatto nella notazione con i versori, specificandone poi modulo e direzione.

SOLUZIONE

(1) Sappiamo che i moti della capsula verticale e orizzontale possono essere considerati in modo indipendente. (2) La componente orizzontale v_x della velocità non cambia il suo valore iniziale $v_{0x} = v_0 \cos\theta_0$, perché l'accelerazione orizzontale è nulla. (3) La componente verticale v_y della velocità cambia dal suo valore iniziale $v_{0y} = v_0 \sin\theta_0$, perché l'accelerazione verticale non è nulla.

Calcoli. Quando la capsula tocca l'acqua,

$$v_x = v_0 \cos\theta_0 = (55{,}0\ \text{m/s})(\cos 0°) = 55{,}0\ \text{m}.$$

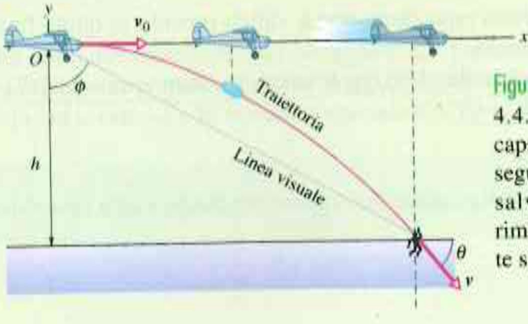


Figura 4.14 Problema svolto 4.4. Un aereo sgancia una capsula di salvataggio e prosegue in volo orizzontale. Il salvagente mentre cade rimane sempre verticalmente sotto all'aereo.

Un'altra idea chiave ci suggerisce che invece la componente verticale v_y della velocità varia perché è sottoposta a un'accelerazione non nulla. In base all'equazione 4.23, sapendo che il tempo di caduta della capsula è $t = 10{,}1$, troviamo all'impatto sull'acqua

$$\begin{aligned} v_y &= v_0 \sin\theta_0 - gt = \\ &= (55{,}0\ \text{m/s})(\sin 0°) - (9{,}8\ \text{m/s}^2)(10{,}1\ \text{s}) = \\ &= -99{,}0\ \text{m/s}. \end{aligned}$$

La velocità vettoriale all'impatto è dunque data da

$$\vec{v} = (55{,}0\ \text{m/s})\mathbf{i} - (99{,}0\ \text{m/s})\mathbf{j}.$$

Infine ne troviamo modulo e direzione tramite l'equazione 3.6:

$$v = 113\ \text{m/s} \quad \text{e} \quad \theta = -60{,}9°.$$

PROBLEMA SVOLTO 4.5 Salto da uno scivolo nautico

Nello sci nautico acrobatico un atleta viene proiettato in alto mediante uno scivolo, per atterrare poi in acqua, come illustrato nella figura 4.15, ove il sistema di coordinate è centrato sul punto di stacco. La distanza D vale 20,0 m, il tempo di volo t è di 2,50 s e l'angolo di lancio è $\theta = 40{,}0°$. Trovare i moduli delle velocità allo stacco e all'ammaraggio.

SOLUZIONE

(1) Possiamo applicare *separatamente* le equazioni per il moto del proiettile con accelerazioni costanti sugli assi verticale e orizzontale. (2) Durante il volo l'accelerazione verticale è costantemente $a_y = -g = -9{,}8$ m/s^2, mentre quella orizzontale è costantemente $a_x = 0$.

Calcoli. Nella maggior parte dei problemi sul moto dei proiettili la sfida iniziale consiste nel capire da che parte cominciare. Non è sbagliato scrivere varie equazioni per vedere se da qualcuna riusciamo a ricavare le velocità. Ma qui c'è un indizio. Dato che applicheremo le equazioni per accelerazione costante separatamente per le componenti verticale e orizzontale, dovremmo ottenere le due componenti delle velocità allo stacco e all'ammaraggio e poi combinarle per ciascuna delle due.

Considerato che ci è noto lo spostamento orizzontale $D = 20{,}0$ m, cominciamo con la componente orizzontale. Dato che $a_x = 0$, la componente orizzontale v_x della velocità è costante e quindi sempre pari a quella di stacco v_{0x}. Possiamo metterla in relazione con lo spostamento $x - x_0$ e il tempo di volo $t = 2{,}50$ s mediante l'equazione 2.15:

$$x - x_0 = v_{0x}t + \tfrac{1}{2}a_x t^2. \tag{4.32}$$

Ponendo $a_x = 0$, questa diventa come la (4.21). Introducendo $x - x_0 = D$ e i dati noti, si ottiene

$$\begin{aligned} 20\ \text{m} &= v_{0x}(2{,}50\ \text{s}) + \tfrac{1}{2}(0)(2{,}50\ \text{s})^2 \\ v_{0x} &= 8{,}00\ \text{m/s}. \end{aligned}$$

Questa è una delle due componenti della velocità di stacco, ma il nostro obiettivo è conoscere il modulo del vettore velocità, mostrato nella figura 4.15b, ove le due componenti costituiscono i cateti di un triangolo rettangolo, la cui ipotenusa è il vettore risultante. Ricorrendo alle regole trigonometriche possiamo dunque trovare il modulo della velocità cercata:

$$\cos\theta_0 = \frac{v_{0x}}{v_0},$$

da cui

$$\begin{aligned} v_0 &= \frac{v_{0x}}{\cos\theta_0} = \frac{8{,}00\ \text{m/s}}{\cos 40°} = \\ &= 10{,}44\ \text{m/s} \approx 10{,}4\ \text{m/s}. \end{aligned}$$

Ora passiamo a cercare il modulo v della velocità di ammaraggio. La componente orizzontale ci è già nota perché è pari a quella iniziale, 8,00 m/s. Conoscendo la componente verticale dell'accelerazione $a_y = -9{,}8$ m/s^2 e il tempo trascorso $t = 2{,}50$ s, per trovare la componente verticale v_y della velocità ricorriamo alla (2.11) scritta come

$$v_y = v_{0y} + a_y t,$$

che diventa, in base alle condizioni geometriche evidenziate nella figura 4.15b,

$$v_y = v_0 \sin\theta_0 + a_y t \tag{4.33}$$

Sostituendo $a_y = -g$ giungiamo all'espressione della (4.23), da cui possiamo ricavare

$$\begin{aligned} v_y &= (10{,}44\ \text{m/s}) \sin(40{,}0°) - (9{,}8\ \text{m/s}^2)(2{,}50\ \text{s}) = \\ &= -17{,}78\ \text{m/s}. \end{aligned}$$

Conoscendo ora entrambe le componenti della velocità di ammaraggio, calcoliamo il modulo di tale velocità utilizzando l'equazione 3.6:

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \\ &= \sqrt{(8{,}00\ \text{m/s})^2 + (-17{,}78\ \text{m/s})^2} = \\ &= 19{,}49\ \text{m/s} \approx 19{,}5\ \text{m/s}. \end{aligned}$$

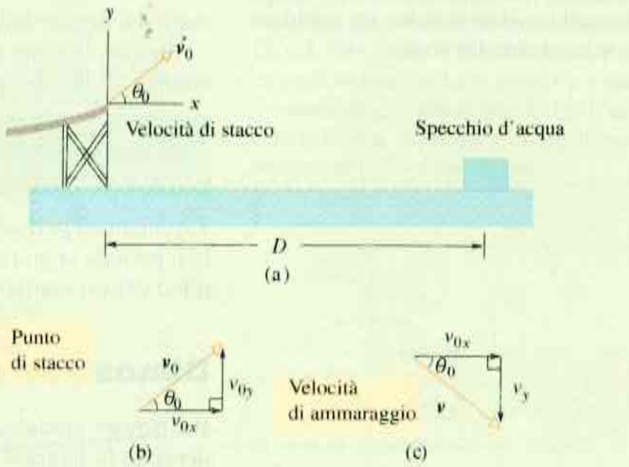


Figura 4.15 Problema svolto 4.5. (a) Salto da uno scivolo nautico con caduta in uno specchio d'acqua. La velocità (b) allo stacco e (c) all'ammaraggio.

 ISBN 978-88-08-18229-6

4.5 MOTO CIRCOLARE UNIFORME

Obiettivi di apprendimento

Dopo aver letto questo paragrafo dovreste essere in grado di...

4.16 Illustrare, su un disegno che rappresenta un moto circolare uniforme, come variano modulo, direzione e verso della velocità e dell'accelerazione durante il moto.

4.17 Applicare le relazioni tra il raggio dell'orbita circolare, il periodo e il modulo di velocità e accelerazioni relative a una particella in moto circolare uniforme.

Idee chiave

- Se un corpo puntiforme percorre una circonferenza o un arco di circonferenza di raggio r a velocità scalare v costante, si dice che è in moto circolare uniforme, avendo un'accelerazione $\boldsymbol{a}$ di modulo costante:
$$a=\frac{v^2}{r}.$$
La direzione di $\boldsymbol{a}$ è radiale ed è rivolta verso il centro della circonferenza o dell'arco, sicché $\boldsymbol{a}$ in tale caso si dice centripeta. Il tempo richiesto alla particella per compiere una rivoluzione, cioè una circonferenza completa, è T,
$$T=\frac{2\pi r}{v},$$
che prende il nome di periodo della rivoluzione.

Moto circolare uniforme

Una particella si definisce in **moto circolare uniforme** se si muove su una circonferenza o su un arco di questa a velocità di modulo costante (*uniforme*). Benché la sua velocità scalare non vari, la *particella accelera*. Questo fatto può destare sorpresa, perché di solito associamo l'accelerazione (variazione di velocità) a un aumento o a una diminuzione di velocità. Ma in realtà $\boldsymbol{v}$ è un vettore, non uno scalare. Se il vettore $\boldsymbol{v}$ cambia anche soltanto la sua direzione, si ha un'accelerazione: questo è il caso del moto circolare uniforme.

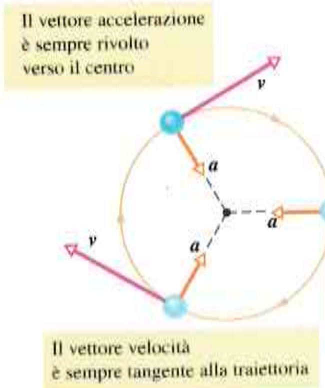


Figura 4.16 Vettori velocità e accelerazione di una particella in moto circolare uniforme in senso antiorario. Hanno entrambi modulo costante, ma cambiano continuamente direzione.

La figura 4.16 mostra la relazione tra i vettori velocità e accelerazione durante il moto circolare uniforme. Al procedere del moto entrambi i vettori restano costanti in modulo, ma le loro direzioni variano continuamente. La velocità è sempre diretta lungo la tangente alla circonferenza nello stesso verso del moto. L'accelerazione è sempre diretta *radialmente verso il centro*. Per questo motivo l'accelerazione associata al moto circolare uniforme è detta **accelerazione centripeta** (ossia "che tende al centro"). Come dimostreremo, il modulo di questa accelerazione è dato da

$$a=\frac{v^2}{r} \quad \text{(accelerazione centripeta)}, \tag{4.34}$$

ove r è il raggio della circonferenza e v è la velocità scalare della particella.

Inoltre, durante questo moto a velocità scalare costante, la particella percorre una circonferenza (di lunghezza $2\pi r$) nel tempo T dato da

$$T=\frac{2\pi r}{v} \quad \text{(periodo)}. \tag{4.35}$$

T è chiamato *periodo di rivoluzione* o semplicemente *periodo* del moto in oggetto. In generale il periodo si può definire come il tempo necessario a una particella per percorrere un cammino chiuso esattamente una volta.

Dimostrazione dell'equazione 4.34

Per trovare modulo, direzione e verso dell'accelerazione nel moto circolare uniforme consideriamo la figura 4.17. Nella figura 4.17a la particella p è animata da velocità $\boldsymbol{v}$ costante e percorre una circonferenza di raggio r. All'istante illustrato p ha coordinate x_p e y_p.

Ricordiamo dal paragrafo 4.2 che il vettore velocità $\boldsymbol{v}$ di un corpo in moto è sempre tangente alla traiettoria del corpo nella posizione considerata. Ciò significa nella figura 4.17a che $\boldsymbol{v}$ è perpendicolare al raggio r relativo alla posizione della particella. Ne consegue che l'angolo θ compreso tra $\boldsymbol{v}$ e l'asse y in p è uguale all'angolo che il raggio considerato forma con l'asse x. Nella figura 4.17b sono mostrate le componenti di $\boldsymbol{v}$. Possiamo quindi esprimere

ISBN 978-88-08-18229-6

la velocità $\boldsymbol{v}$ in funzione di esse:

$$\boldsymbol{v} = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} = (-v \sin\theta)\mathbf{i} + (v \cos\theta)\mathbf{j}. \tag{4.36}$$

Ora, con riferimento alla figura 4.17a, possiamo sostituire $\sin\theta$ con y_p/r e $\cos\theta$ con x_p/r:

$$\boldsymbol{v} = \left(-\frac{v y_p}{r}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{v x_p}{r}\right)\mathbf{j}. \tag{4.37}$$

Al fine di ottenere l'accelerazione $\boldsymbol{a}$ della particella dobbiamo derivare questa espressione rispetto al tempo. Tenendo conto che v ed r non variano nel tempo, si ha

$$\boldsymbol{a} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \left(-\frac{v}{r}\frac{dy_p}{dt}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{v}{r}\frac{dx_p}{dt}\right)\mathbf{j}. \tag{4.38}$$

Osserviamo ora che dy_p/dt non è altro che la componente v_y della velocità e lo stesso dicasi per la componente v_x uguale dx_p/dt. Dato che $v_x = -v \sin\theta$, mentre $v_y = v \cos\theta$, sostituendo nella (4.38) otteniamo

$$\boldsymbol{a} = \left(-\frac{v^2}{r}\cos\theta\right)\mathbf{i} + \left(-\frac{v^2}{r}\sin\theta\right)\mathbf{j}. \tag{4.39}$$

Nella figura 4.17c è tracciato questo vettore con le sue componenti. Servendoci dell'equazione 3.6 possiamo ricavare il modulo di $\boldsymbol{a}$:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \frac{v^2}{r}\sqrt{(\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2} = \frac{v^2}{r}\sqrt{1} = \frac{v^2}{r},$$

come appunto volevasi dimostrare. Riguardo alla direzione di $\boldsymbol{a}$, possiamo trovare l'angolo ϕ indicato nella figura 4.17c:

$$\tan\phi = \frac{a_y}{a_x} = \frac{-(v^2/r)\sin\theta}{-(v^2/r)\cos\theta} = \tan\theta,$$

da cui concludiamo che $\theta = \phi$, cioè che $\boldsymbol{a}$ ha la direzione del raggio r della figura 4.17a, orientata verso il centro della circonferenza, confermando così il nostro asserto.

VERIFICA 5

Un corpo percorre con velocità scalare costante una traiettoria circolare sul piano xy, con centro nell'origine. Quando il corpo si trova a $x = -2$ m, la sua velocità è $-(4\ \text{m/s})\mathbf{j}$. Quali sono (a) la velocità e (b) l'accelerazione centripeta quando si trova a $y = 2$ m?

$\vec{v} = -(4\ m/s)\vec{i}$; $\vec{a}_c = -\frac{16}{2}\ m/s^2\ \vec{j} = -8\ m/s^2\ \vec{j}$

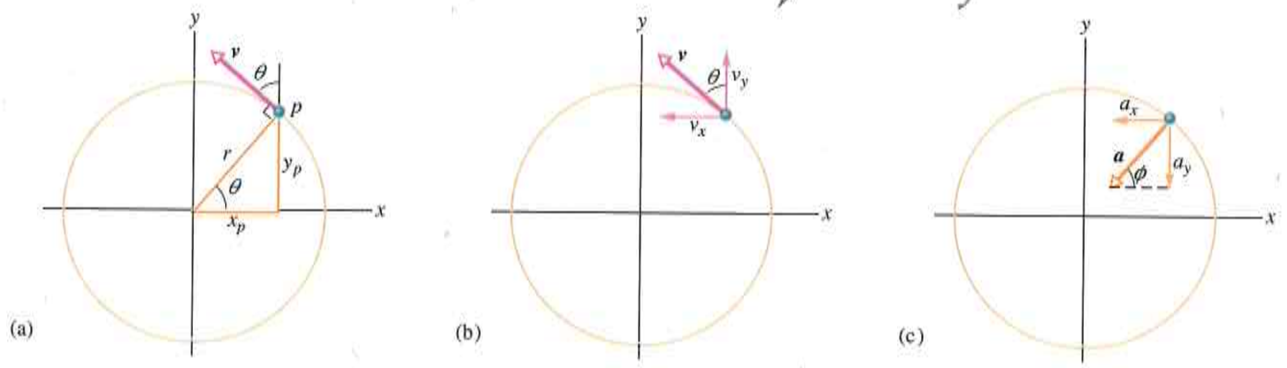


Figura 4.17 La particella p si muove di moto circolare uniforme antiorario. (a) La sua posizione r e la sua velocità $\boldsymbol{v}$ in un certo istante. (b) La velocità $\boldsymbol{v}$ e le sue componenti allo stesso istante. (c) L'accelerazione $\boldsymbol{a}$ della particella e le sue componenti allo stesso istante.

ISBN 978-88-08-18229-6

ROBLEMA SVOLTO 4.6 Piloti da caccia in virata

oti di caccia conoscono bene il pericolo di eseguire un *giro della te* troppo stretto. Dato che il corpo del pilota subisce una forte acce-zione centripeta con la testa rivolta verso il centro di curvatura, la sione sanguigna nel cervello cala, portando a una possibile perdita e funzioni cerebrali.

Diverse spie di emergenza segnalano al pilota la necessità noderare l'effetto: quando l'accelerazione centripeta raggiunge $2g$ o l pilota ha la sensazione di pesantezza. Attorno a $4g$ si perde la per-ione dei colori e il campo visivo si stringe come in una galleria. Se celerazione persiste o aumenta, la visione cessa e subito dopo il ota perde conoscenza, una condizione nota con il termine inglese OC, «g-induced Loss Of Consciousness».

Qual è l'accelerazione centripeta, in multipli di g, cui è sottoposto pilota quando l'aereo impegna una virata su una traiettoria circolare zzontale, entrandovi alla velocità iniziale $\vec{v}_i = (400\mathbf{i} + 500\mathbf{j})$ m/s e endone 24,0 s dopo con velocità finale $\vec{v}_f = (-400\mathbf{i} - 500\mathbf{j})$ m/s?

OLUZIONE

sumiamo che la virata avvenga in moto circolare uniforme. ccelerazione subita dal pilota è centripeta e il suo modulo a è dato ll'equazione 4.34 ($a = v^2/R$), in cui r è il raggio di curvatura. Sappiamo che che il tempo per descrivere una circonferenza completa è il riodo, dato dall'equazione 4.35 ($T = 2\pi R/v$).

Calcoli. Giacché non conosciamo il raggio R, risolviamo la (4.35) per ricavarlo e per poi introdurlo nella (4.34). Otteniamo

$$a = \frac{2\pi v}{T}.$$

La velocità scalare v si ottiene sostituendo i valori noti delle componenti della velocità iniziale nell'equazione 3.6:

$$v = \sqrt{(400 \text{ m/s})^2 + (500 \text{ m/s})^2} = 640{,}31 \text{ m/s}.$$

Per trovare il periodo T del moto circolare uniforme basta osservare che la velocità di uscita è opposta a quella di ingresso e quindi che l'aereo ha percorso una semicirconferenza in 24,0 s. Una circonferenza completa avrebbe dunque richiesto il tempo $T = 48{,}0$ s. Ora si può quindi calcolare a sostituendo i valori:

$$a = \frac{2\pi(640{,}31 \text{ m/s})}{48{,}0 \text{ s}} = 83{,}81 \text{ m/s}^2 \approx 8{,}6g.$$

4.6 MOTO RELATIVO UNIDIMENSIONALE

biettivi di apprendimento

opo aver letto questo paragrafo dovreste essere in grado di…

.18 Applicare la relazione tra la posizione di una particella, la sua velocità vettoriale e l'accelerazione, misurate in due sistemi di riferimento che si muovono uno rispetto all'altro su uno stesso asse a velocità costante.

dee chiave

- Quando due sistemi di riferimento A e B si muovono uno rispetto all'altro a velocità costante, la velocità di una particella P misurata da un osservatore nel sistema A differisce in generale da quella misurata nel sistema B. Le due velocità sono legate dalla relazione

$$v_{PA} = v_{PB} + v_{BA},$$

in cui v_{BA} è la velocità di B rispetto ad A. Entrambi gli osservatori però misurano per la particella la medesima accelerazione:

$$a_{PA} = a_{PB}.$$

Moto relativo unidimensionale

Supponete di osservare un'anatra che vola verso nord, diciamo alla velocità di 30 km/h. A un'altra anatra che le vola a fianco essa appare ferma. In altre parole, la velocità di un corpo dipende dal **sistema di riferimento** della persona che la sta misurando. Ai nostri fini, il sistema di riferimento è l'oggetto fisico al quale viene ancorato il sistema di coordinate. Il sistema di riferimento che ci sembra più naturale nei nostri andirivieni giornalieri è la terra sotto i nostri piedi. Quando un agente della polizia stradale vi dice che stavate andando a 150 km/h, la precisazione «rispetto a un sistema di coordinate collegato rigidamente al terreno» è sottintesa da entrambe le parti.

Supponiamo che Alessio (sistema A) sia parcheggiato lungo un'autostrada a osservare il passaggio dell'auto P (la «particella»). Barbara (sistema B), che viaggia sull'autostrada a velocità costante, sta anche lei osservando la stessa auto P. Supponiamo che,

ISBN 978-88-08-18229-6

come nella figura 4.18, entrambi misurino la posizione di P in un certo istante. Risulta dalla figura che

$$x_{PA} = x_{PB} + x_{BA}. \quad (4.40)$$

Questa equazione ci dice: "La posizione di P misurata da A *è uguale* alla posizione di P misurata da B *più* la posizione di B misurata da A". Notare come l'ordine di lettura sia coerente con la sequenza degli indici al piede dei simboli della variabile x.

Derivando rispetto a t l'equazione 4.40 troviamo

$$\frac{d}{dt}(x_{PA}) = \frac{d}{dt}(x_{PB}) + \frac{d}{dt}(x_{BA}),$$

ossia, essendo $v = dx/dt$:

$$v_{PA} = v_{PB} + v_{BA}. \quad (4.41)$$

In parole, la (4.41) dice: "La velocità di P misurata da A *è uguale* alla velocità di P misurata da B *più* la velocità di B misurata da A". Il termine v_{BA} è la velocità a cui il sistema B si sposta rispetto ad A. (Dato che i moti avvengono lungo un solo asse, nell'equazione 4.41 possiamo usare le componenti lungo quell'asse.)

Considereremo soltanto sistemi di riferimento che si spostano *uno rispetto all'altro* a velocità costante. Nel nostro caso ciò significa che Barbara (sistema B) viaggerà sempre a velocità costante rispetto ad Alessio (sistema A). L'auto P, invece, può accelerare, rallentare, fermarsi o cambiare direzione.

La derivata rispetto al tempo dell'equazione 4.41 fornisce la relazione tra le accelerazioni misurate da Barbara e Alessio:

$$\frac{d}{dt}(v_{PA}) = \frac{d}{dt}(v_{PB}) + \frac{d}{dt}(v_{BA}).$$

Considerato che la velocità relativa di Alessio rispetto a Barbara è costante, l'ultimo termine è nullo e quindi:

$$a_{PA} = a_{PB}. \quad (4.42)$$

In altre parole:

Osservatori in diversi sistemi di riferimento (aventi velocità relative costanti) misureranno la stessa accelerazione per una particella in movimento.

Il riferimento B si muove rispetto ad A mentre entrambi osservano P

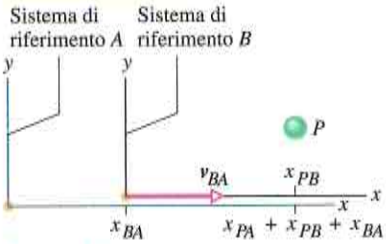


Figura 4.18 Alessio (sistema di riferimento A) e Barbara (sistema di riferimento B) osservano l'auto P, mentre B e P si muovono a velocità diverse lungo l'asse x comune ai due sistemi. Nell'istante indicato, x_{BA} rappresenta la coordinata di B nel sistema di riferimento A. P si trova in un punto di coordinata x_{PB} nel riferimento B e di coordinata $x_{PA} = x_{PB} + x_{BA}$ nel riferimento A.

PROBLEMA SVOLTO 4.7 Moto relativo unidimensionale, Alessio e Barbara

Siamo nella situazione descritta in questo paragrafo e illustrata nella figura 4.18; la velocità costante di Barbara rispetto ad Alessio è v_{BA} = 52 km/h e l'automobile P si sta dirigendo nel verso negativo dell'asse x.

(a) Se Alessio misura la velocità di P ottenendo −78 km/h, quale valore otterrà Barbara per la velocità di P?

SOLUZIONE

Possiamo qui immaginare un sistema di riferimento A solidale con Alessio e un altro B solidale con Barbara. Inoltre, poiché questi due sistemi sono in moto relativo l'uno rispetto all'atro a velocità costante e lungo un medesimo asse, possiamo ricorrere all'equazione 4.41 ($v_{PA} = v_{PB} + v_{BA}$) per mettere in relazione le variabili.

Calcoli. Troviamo

$$-78 \text{ km/h} = v_{PB} + 52 \text{ km/h}.$$

E quindi

$$v_{PB} = -130 \text{ km/h}.$$

Commento. Se l'auto P fosse collegata a quella di Barbara da un cavo arrotolato su una puleggia, quel cavo si svolgerebbe alla velocità di 130 km/h man mano che i due veicoli si allontanano l'uno dall'altro.

(b) Se Alessio osserva P mentre questi frena fino all'arresto in un tempo t = 10 s, quale accelerazione (supposta costante) misura?

SOLUZIONE

Utilizziamo la velocità dell'auto *rispetto ad A* per calcolare l'accelerazione di P *rispetto ad A*. Giacché l'accelerazione è costante, possiamo utilizzare l'equazione 2.11 ($v = v_0 + at$) per mettere in relazione le velocità iniziale e finale di P.

Calcoli. Le velocità iniziale e finale di P rispetto ad Alessio sono rispettivamente pari a −78 km/h e 0 km/h. L'accelerazione è

$$a_{PA} = \frac{v - v_0}{t} = \frac{0 - (-78 \text{ km/h})}{10 \text{ s}} \frac{1 \text{ m/s}}{3{,}6 \text{ km/h}} = 2{,}2 \text{ m/s}^2.$$

 ISBN 978-88-08-18229-6

) E quale sarebbe l'accelerazione misurata da Barbara per l'auto in enata?

OLUZIONE

ra l'idea chiave consiste nell'usare la velocità dell'auto *rispetto a B* per ılcolare l'accelerazione di P *rispetto a B*. Conosciamo la velocità iniale dal risultato della parte (a) (130 kmh), mentre quella finale è 2 km/h (la velocità dell'auto P ferma rispetto a Barbara in moto).

Quindi, sempre dalla (2.11),

$$a_{PB} = \frac{v - v_0}{t} = \frac{-52\ \text{km/h} - (-130\ \text{km/h})}{10\ \text{s}}\ \frac{1\ \text{m/s}}{3{,}6\ \text{km/h}} = 2{,}2\ \text{m/s}^2.$$

Questa è la stessa accelerazione misurata da Alessio, cosa che avremmo dovuto prevedere, dato che la loro velocità relativa è costante.

4.7 MOTO RELATIVO BIDIMENSIONALE

)biettivi di apprendimento

)opo aver letto questo paragrafo dovreste essere in grado di...

.19 Applicare la relazione tra la posizione di una particella, la sua velocità vettoriale e l'accelerazione, misurate in due sistemi di riferimento che si muovono uno rispetto all'altro a velocità costante e in due dimensioni.

dee chiave

- Quando due sistemi di riferimento A e B si muovono uno rispetto all'altro a velocità costante, la velocità di una particella P misurata da un osservatore nel sistema A differisce in generale da quella misurata nel sistema B. Le due velocità sono legate dalla relazione

$$\boldsymbol{v}_{PA} = \boldsymbol{v}_{PB} + \boldsymbol{v}_{BA},$$

in cui $\boldsymbol{v}_{BA}$ è la velocità di B rispetto ad A. Entrambi gli osservatori però misurano per la particella la medesima accelerazione:

$$\boldsymbol{a}_{PA} = \boldsymbol{a}_{PB}.$$

asformazioni
Galileiane

Moto relativo bidimensionale

Possiamo ora passare dal mondo scalare del moto relativo in una dimensione al mondo vettoriale del moto relativo in due (e, per estensione, in tre) dimensioni. La figura 4.19 mostra i sistemi di riferimento A e B, che questa volta sono bidimensionali. I nostri due osservatori stanno ancora seguendo una particella P in movimento. E di nuovo supponiamo che i due sistemi stiano allontanandosi (o avvicinandosi) a una velocità costante $\boldsymbol{v}_{BA}$ e che, per semplicità, i loro assi x e y rimangano paralleli fra loro durante lo spostamento.

La figura 4.19 mostra la situazione in un certo istante. In questo momento il vettore posizione di B rispetto ad A è $\boldsymbol{r}_{BA}$. I vettori posizione della particella sono invece $\boldsymbol{r}_{PA}$ rispetto ad A e $\boldsymbol{r}_{PB}$ rispetto a B. Dal triangolo dei vettori nella figura 4.19 ricaviamo l'equazione vettoriale

$$\boldsymbol{r}_{PA} = \boldsymbol{r}_{PB} + \boldsymbol{r}_{BA}. \tag{4.43}$$

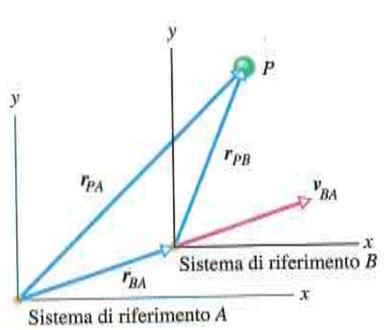


Figura 4.19 Il sistema di riferimento B ha velocità bidimensionale costante $\boldsymbol{v}_{BA}$ rispetto al sistema di riferimento A. Il vettore posizione di B rispetto ad A è $\boldsymbol{r}_{BA}$. I vettori posizione della particella P sono $\boldsymbol{r}_{PA}$ rispetto ad A ed $\boldsymbol{r}_{PB}$ rispetto a B.

Operando la derivata rispetto al tempo della (4.43), troviamo un legame fra le velocità (vettoriali) della particella misurate dai due osservatori:

$$\boldsymbol{v}_{PA} = \boldsymbol{v}_{PB} + \boldsymbol{v}_{BA}. \tag{4.44}$$

Derivando rispetto al tempo la (4.44), troviamo un legame fra le due accelerazioni misurate dai due osservatori. Si noti che, dato che $\boldsymbol{v}_{BA}$ è costante, la sua derivata è zero. Abbiamo dunque

$$\boldsymbol{a}_{PA} = \boldsymbol{a}_{PB}. \tag{4.45}$$

Rimane confermata per il moto in tre dimensioni la seguente regola: tutti gli osservatori da diversi sistemi di riferimento animati da *velocità relative costanti* misureranno la *stessa* accelerazione per una particella in movimento.

PROBLEMA SVOLTO 4.8 Moto relativo bidimensionale, aeroplani

Nella figura 4.20a un aereo sta muovendosi esattamente verso est mentre la prora del velivolo è puntata in una qualche direzione più inclinata verso sud per compensare un vento costante che spira da sud-ovest. L'aeroplano (P) ha velocità $\boldsymbol{v}_{PA}$ rispetto all'aria (A) di modulo 215 km/h e una direzione che forma un angolo θ verso sud rispetto a est. Il vento costante ha velocità $\boldsymbol{v}_{AT}$ rispetto al terreno (T) con modulo di 65,0 km/h e direzione che forma un angolo di 20,0° a est rispetto al nord. Qual è la velocità dell'aereo rispetto al terreno, in modulo, direzione e verso?

SOLUZIONE

È **idea chiave** osservare che la situazione è come nella figura 4.19. Qui la particella in moto è l'aeroplano P, il primo sistema di riferimento è connesso col terreno (T) e il secondo sistema è legato all'aria (A) in moto rispetto al terreno. Dobbiamo costruire un diagramma vettoriale come quello di figura 4.19, ma usando questa volta i tre vettori velocità.

Esprimiamo la relazione vettoriale a parole:

velocità dell'aereo rispetto al terreno	=	velocità dell'aereo rispetto al vento	+	velocità del vento rispetto al terreno
PT		*PA*		*AT*

La relazione si può illustrare come in figura 4.20b e scriverla in forma vettoriale:

$$\boldsymbol{v}_{PT} = \boldsymbol{v}_{PA} + \boldsymbol{v}_{AT}. \tag{4.46}$$

Dobbiamo trovare il modulo del primo vettore e la direzione del secondo. Con due incognite non possiamo risolvere l'equazione con la calcolatrice: dobbiamo invece scomporre i vettori in componenti nel sistema di coordinate di figura 4.20b e poi risolvere l'equazione 4.46 asse per asse (par. 3.2). Per la componente y troviamo

$$v_{PT,y} = v_{PA,y} + v_{AT,y},$$

ovvero

$$0 = -(215 \text{ km/h}) \sin\theta + (65{,}0 \text{ km/h})(\cos 20{,}0°).$$

Risolvendola rispetto a θ si ottiene

$$\theta = \arcsin \frac{(65{,}0 \text{ km/h})(\cos 20{,}0°)}{215 \text{ km/h}} = 16{,}5°.$$

Analogamente, per la componente x abbiamo

$$v_{PT,x} = v_{PA,x} + v_{AT,x}.$$

Qui $\boldsymbol{v}_{PT}$ è parallela all'asse x e la sua componente x è dunque uguale al modulo v_{PT}. Introducendo quindi i dati otteniamo

$$v_{PT} = (215 \text{ km/h})(\cos 16{,}5°) + (65{,}0 \text{ km/h})(\sin 20{,}0°) = \\ = 228 \text{ km/h}.$$

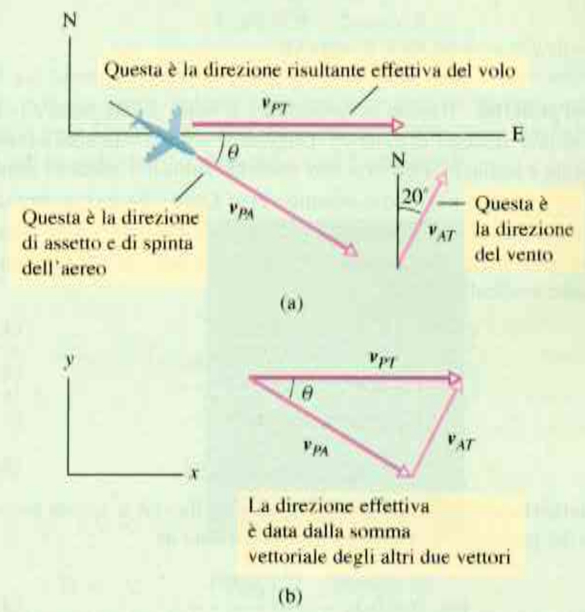


Figura 4.20 Problema svolto 4.8. Per volare con rotta est il pilota deve *orzare* (stringere il vento).

RIEPILOGO & SOMMARIO

Vettore posizione La posizione di una particella rispetto all'origine di un sistema di coordinate è data da un *vettore posizione* $\boldsymbol{r}$, che nella notazione con i versori è espresso da

$$\boldsymbol{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}, \tag{4.1}$$

ove $x\mathbf{i}$, $y\mathbf{j}$ e $z\mathbf{k}$ sono le *componenti vettoriali* del vettore posizione $\boldsymbol{r}$, mentre x, y e z sono, oltreché le coordinate, le sue *componenti scalari*. Un vettore posizione può anche essere definito da un modulo e da uno o più angoli per la direzione e il verso.

Spostamento Se una particella si sposta in modo tale che il suo vettore posizione vari da $\boldsymbol{r}_1$ a $\boldsymbol{r}_2$, il suo *spostamento* $\Delta\boldsymbol{r}$ è definito da

$$\Delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1. \tag{4.2}$$

Lo spostamento si può anche scrivere come

$$\boldsymbol{r} = (x_2 - x_1)\,\mathbf{i} + (y_2 - y_1)\,\mathbf{j} + (z_2 - z_1)\,\mathbf{k}. \tag{4.3}$$

$$\Delta\boldsymbol{r} = \Delta x\mathbf{i} + \Delta y\mathbf{j} + \Delta z\mathbf{k}. \tag{4.4}$$

Velocità media e velocità (istantanea) Se una particella subisce uno spostamento in un intervallo di tempo Δt, la sua *velocità vettoriale media* $\bar{\boldsymbol{v}}$ vale

$$\bar{\boldsymbol{v}} = \frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t}. \tag{4.8}$$

Al tendere a zero di Δt nell'equazione 4.8, $\bar{\boldsymbol{v}}$ tende a un valore limite definito *velocità* (istantanea):

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}, \tag{4.10}$$

relazione che nella notazione con i versori diventa:

$$\boldsymbol{v} = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k}, \tag{4.11}$$

ove $v_x = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t$, $v_y = \mathrm{d}y/\mathrm{d}t$, e $v_z = \mathrm{d}z/\mathrm{d}t$. Tracciando la posizione di una particella in un sistema di coordinate, il vettore velocità istantanea $\boldsymbol{v}$ è sempre tangente alla curva che rappresenta il percorso della particella.