

68. Il momento di una forza di $960 \text{ N} \cdot \text{m}$, applicato a un guscio sferico sottile di raggio $1,90 \text{ m}$, gli conferisce un'accelerazione angolare di $6,20 \text{ rad/s}^2$. (a) Qual è il momento d'inerzia del guscio rispetto all'asse di rotazione passante per il centro della sfera? (b) Calcolate la massa del guscio.

69. Una ruota gira con accelerazione angolare $\alpha = 4at^3 - 3bt^2$, con a e b costanti e unità SI. Scrivere un'espressione per (a) la velocità angolare e (b) la posizione angolare della ruota in funzione del tempo, ponendo come velocità angolare iniziale ω_0 .

70. Durante un intervallo di tempo t il volano di un gruppo generatore ruota di un angolo $\theta = at + bt^3 - ct^4$, ove a , b e c sono costanti e le unità sono SI. Scrivete l'espressione (a) della sua velocità angolare e (b) della sua accelerazione angolare.

71. Un pesante volano rotante sul suo asse sta rallentando per effetto dell'attrito sui suoi cuscinetti. Al termine del primo minuto la sua velocità angolare è pari a $0,900$ volte la sua velocità angolare iniziale di 250 giri/min . Ammettendo che le forze di attrito siano costanti, trovate la sua velocità angolare al termine del secondo minuto.

72. Un satellite per telecomunicazioni è costituito da un cilindro solido di massa 1210 kg , avente diametro $1,21 \text{ m}$ e lunghezza $1,75 \text{ m}$. Prima di lanciarlo dalla stiva della navetta spaziale, come rappresenta schematicamente la figura 10.42, è messo in rotazione alla velocità angolare di $1,52 \text{ giri/s}$ attorno al suo asse longitudinale. Calcolate, per questo satellite, (a) il momento d'inerzia rispetto all'asse di rotazione e (b) l'energia cinetica rotazionale.

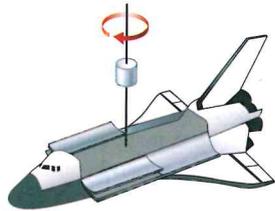


Figura 10.42 Problema 72.

73. Un disco fonografico sta girando su un giradischi alla velocità angolare di $33,33 \text{ giri/min}$. (a) Quanto vale in radianti al secondo? Quant'è il modulo della velocità lineare sotto la puntina, quando questa si trova a (b) 15 cm e (c) $7,4 \text{ cm}$ dal perno del piatto giradischi?

74. Qual è l'accelerazione angolare di un'automobile che viaggia alla velocità di 50 km/h e affronta una curva circolare di raggio 110 m ?

75. La molecola dell'ossigeno, O_2 , ha massa totale $5,30 \cdot 10^{-26} \text{ kg}$ e momento d'inerzia $1,94 \cdot 10^{-46} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ rispetto a un asse normale al punto di mezzo del segmento che unisce i due atomi. Trovate la sua velocità angolare, sapendo che si sposta in un gas alla velocità di 500 m/s , e che la sua energia cinetica rotazionale è uguale a due terzi della sua energia cinetica di traslazione.

76. Calcolate (a) il momento della forza, (b) l'energia e (c) la potenza media richiesti per accelerare in un giorno la Terra dallo stato di quiete alla sua attuale velocità angolare.

77. Ammettendo che la Terra sia una sfera di densità uniforme, calcolate: (a) il suo momento d'inerzia e (b) la sua energia cinetica rotazionale. (c) Nell'ipotesi che potessimo catturare questa energia per nostro uso, per quanto tempo ciascuno dei $5 \cdot 10^9$ abitanti della Terra potrebbe disporre di una potenza di $1,0 \text{ kW}$?

78. Un funambolo deve mantenere il proprio centro di massa costantemente al di sopra della fune. Di solito porta con sé una lunga e pesante asta che gli serve per compensare gli sbilanciamenti: se pende ad esempio verso destra (il suo cdm si sposta a destra), muove l'asta a sinistra per rallentare la rotazione di caduta e consentire il proprio ribilanciamento. Ammettiamo che abbia una massa di $70,0 \text{ kg}$ e un momento d'inerzia attorno al filo di $15,0 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$. Calcolare il modulo della sua accelerazione angolare attorno al filo se il suo centro di massa si trova $5,00 \text{ cm}$ a destra rispetto al filo e (a) egli è privo di asta, (b) porta un'asta di massa $14,0 \text{ kg}$ che in quell'istante ha il proprio centro di massa 10 cm a sinistra del filo.

Rotolamento, momento torcente e momento angolare

11.1 ROTOLAMENTO: UNA COMBINAZIONE DI TRASLAZIONE E ROTAZIONE

Obiettivi di apprendimento

Dopo aver letto questo paragrafo dovreste essere in grado di...

11.01 Rendervi conto che il rotolamento è una combinazione di un moto puramente rotatorio e un moto puramente traslatorio.

11.02 Applicare la relazione tra la velocità del centro di massa e la velocità angolare di un corpo che rotola.

Idee chiave

- Per una ruota di raggio R che rotola si ha

$$v_{\text{cdm}} = \omega R,$$

in cui v_{cdm} è la velocità lineare del centro di massa della ruota e ω è la velocità angolare della ruota attorno al suo centro.

- La ruota può anche essere vista come in rotazione attorno a un punto P di contatto con il suolo che muta a ogni istante. La velocità angolare della ruota attorno a questo punto è la stessa velocità angolare che presenta attorno al suo centro.

L'aspetto fisico

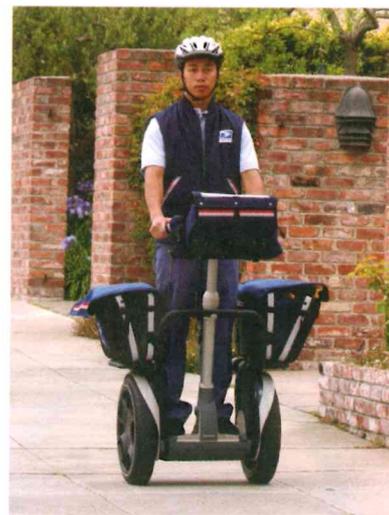
La fisica comprende lo studio della rotazione – lo abbiamo visto nel capitolo 10. Non è difficile indovinare che la più importante applicazione di questa branca della fisica è il moto della ruota e dei corpi simili. Un'applicazione che data da millenni. Per esempio, i preistorici abitanti dell'isola di Pasqua trascinarono le loro gigantesche statue di pietra dalla cava ai loro siti mediante dei rulli. Molto più tardi i conquistatori del West, nel secolo XIX, trasportavano i loro beni prima con carri e diligenze e poi con il treno. Il mondo d'oggi pullula di automobili, autocarri, motocicli, biciclette e una quantità di altri veicoli su ruote.

L'ingegneria del rotolamento ha radici così antiche e sviluppate da far pensare che non resti più niente da studiare. A buona smentita, basta pensare agli skateboard e ai pattini in linea, inventati e sviluppati di recente e divenuti un affare economico di gran successo. Vengono ora alla ribalta veicoli da trasporto personale, come il *Segway* (fig. 11.1), che sta ritto da solo e promette una rivoluzione nel modo di spostarsi. Le applicazioni fisiche del rotolamento possono essere ancora sorprendenti e remunerative!

Rotolamento: una combinazione di traslazione e rotazione

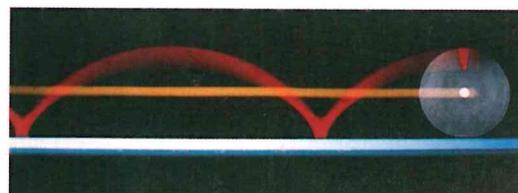
Consideriamo solo corpi che rotolano dolcemente su una superficie senza slittare: non strisciano e non saltellano. La figura 11.2 illustra quanto sia complicato questo moto di rotolamento puro: sebbene il centro della ruota segua una traiettoria rettilinea parallela alla superficie, non altrettanto fa un punto qualsiasi sul suo bordo. Possiamo tuttavia analizzare questo tipo di moto come traslazione del centro di massa e come simultanea rotazione degli altri punti attorno al medesimo centro.

Figura 11.2 Una fotografia a posa lunga di un disco che rotola. Al disco sono state fissate due piccole luci, una al centro, l'altra vicino al bordo. Quest'ultima descrive una curva chiamata *cicloide*.



Justin Sullivan/Getty Images, Inc.

Figura 11.1 Il veicolo di locomozione personale *Segway*, capace di star ritto da solo.



Richard Megna/Fundamental Photographs

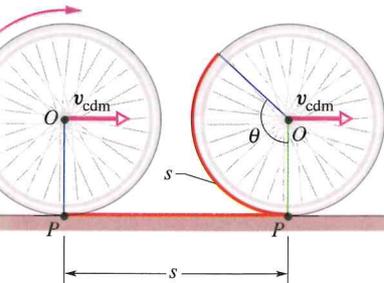


Figura 11.3 Il centro di massa O di una ruota che rotola percorre una distanza s alla velocità v_{cdm} mentre la ruota gira di un angolo θ . Anche il punto P di contatto fra la ruota e la superficie di rotolamento si sposta di una distanza s .

Immaginiamo di stare a osservare la ruota di una bicicletta che passa a velocità costante rotolando senza slittamenti, su un fondo stradale liscio. Come si vede nella figura 11.3, il centro di massa O della ruota si sposta in avanti a velocità costante v_{cdm} . Anche il punto P nel quale la ruota tocca il fondo stradale si sposta in avanti con la stessa velocità v_{cdm} , rimanendo così sempre direttamente al di sotto di O .

Durante un intervallo di tempo t , vedremo O e P muoversi insieme in avanti di un tratto s . Il ciclista vede la ruota girare di un angolo θ intorno al proprio centro, mentre il punto della ruota che era a contatto del terreno all'inizio dell'intervallo t si muove di una lunghezza s lungo un arco di circonferenza con centro in O . L'equazione 10.17 esprime la relazione fra la lunghezza s dell'arco e l'angolo di rotazione θ :

$$s = R\theta, \tag{11.1}$$

ove R è il raggio della ruota. La velocità lineare v_{cdm} del centro di massa della ruota (il centro di massa di questa ruota omogenea) vale ds/dt , e la velocità angolare ω della ruota rispetto al proprio centro vale $d\theta/dt$. Derivando la (11.1) rispetto al tempo, si ha

$$v_{\text{cdm}} = \omega R \quad (\text{moto di rotolamento, senza slittamento}). \tag{11.2}$$

Combinazione dei moti. La figura 11.4 dimostra che il moto di rotolamento di una ruota è una combinazione di moti di traslazione pura e di rotazione pura. Nella figura 11.4a vediamo soltanto il moto di pura rotazione, come se l'asse di rotazione passante per il centro fosse stazionario: ogni punto della ruota gira intorno al centro con la stessa velocità angolare ω . (Si tratta del tipo di moto che abbiamo studiato nel capitolo 10.) Ogni punto della periferia della ruota ha una velocità lineare uguale alla v_{cdm} che si ricava dall'equazione 11.2. La figura 11.4b riguarda invece il moto di pura traslazione, come se la ruota non ruotasse affatto: ogni punto della ruota si sposta verso destra alla stessa velocità v_{cdm} .

La figura 11.4c, combinazione della 11.4a e della 11.4b, mostra l'effettivo moto di rotolamento della ruota. Si nota che in questo moto combinato l'elemento più basso della ruota (nel punto P) ha velocità nulla, mentre l'elemento più alto (nel punto T) ha una velocità $2v_{\text{cdm}}$, maggiore di quella di qualsiasi altro elemento della ruota. Ciò balza agli occhi nella figura 11.5, che è una fotografia «a lunga esposizione» di una ruota di bicicletta in movimento. L'immagine evanescente dei raggi in alto, rispetto a quelli in basso, prova che il moto della parte superiore della ruota è più rapido di quello della parte inferiore.

Il moto di qualunque corpo di forma circolare che rotola su una superficie può essere scisso in due moti, uno di traslazione pura e l'altro di rotazione pura, come esemplificato nelle figure 11.4a e 11.4b.

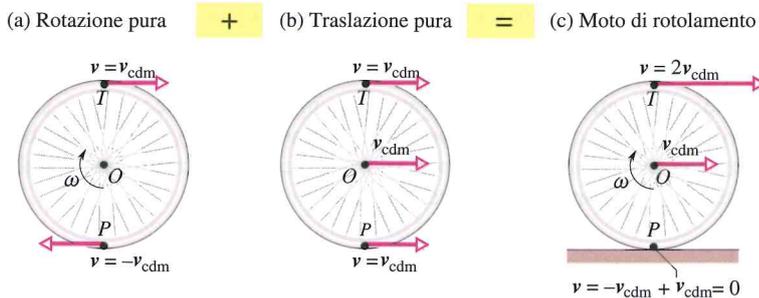
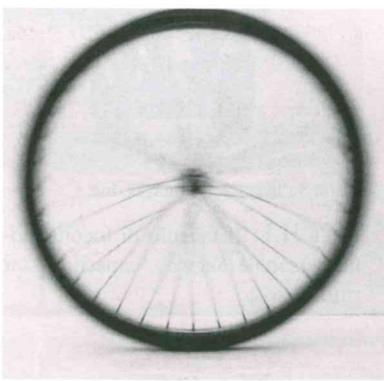


Figura 11.4 Rotolamento di una ruota visto come combinazione di un moto di pura rotazione con un moto di pura traslazione. (a) Il moto di pura rotazione: tutti i punti della ruota si muovono alla stessa velocità angolare ω . I punti sul bordo esterno della ruota si muovono tutti alla stessa velocità lineare (scalare) $v = v_{\text{cdm}}$. Sono anche messe in evidenza le velocità lineari vettoriali \mathbf{v} di due di questi punti, il più alto (T) e il più basso (P) della ruota. (b) Il moto di pura traslazione: tutti i punti della ruota si muovono verso destra con la stessa velocità lineare v_{cdm} del centro di massa della ruota. (c) Il moto di rotolamento della ruota è la combinazione di (a) e di (b).



Courtesy Alice Halliday

Figura 11.5 Fotografia di una ruota di bicicletta che rotola. I raggi vicino alla parte più alta appaiono più confusi di quelli in basso, perché si muovono più rapidamente, come risulta dalla precedente figura 11.4c.

Il rotolamento come rotazione pura

La figura 11.6 propone un altro modo di descrivere il moto di una ruota che rotola, e precisamente come una rotazione pura intorno a un asse che passa sempre per il punto in cui la ruota è a contatto con il piano di rotolamento: nella figura 11.4c, un asse passante per il punto P e

perpendicolare al piano della figura. I vettori nella figura 11.6 rappresentano le velocità istantanee di alcuni punti della ruota che rotola.

Domanda. Un osservatore fermo quale velocità angolare attribuirebbe, intorno a questo nuovo asse, a una ruota di bicicletta che rotola?

Risposta. La stessa velocità angolare ω che il ciclista attribuisce alla ruota quando la osserva in rotazione pura intorno a un asse passante per il suo centro di massa.

Tenendo per buona questa affermazione, proviamo a calcolare la velocità lineare del punto più alto della ruota T dal punto di vista di un osservatore fermo. Chiamando R il raggio della ruota, nella figura 11.6, T si trova a una distanza $2R$ dall'asse passante per P , e la sua velocità lineare, per la (11.2), vale

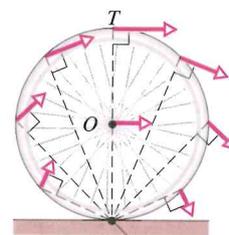
$$v_T = (\omega)(2R) = 2(\omega R) = 2 v_{\text{cdm}},$$

in perfetto accordo con la figura 11.4c. Possiamo verificare in modo analogo la corrispondenza delle velocità indicate dalla stessa figura per i punti O e P nella figura 11.4c.

✓ VERIFICA 1

La ruota posteriore di una bicicletta da circo ha raggio doppio dell'anteriore. (a) La velocità lineare al punto superiore della ruota di dietro è maggiore, minore o uguale a quella della ruota davanti? (b) La velocità angolare della ruota posteriore è maggiore, minore o uguale a quella della ruota anteriore?

(a) uguale
(b) minore



Asse di rotazione in P

Figura 11.6 Il rotolamento può essere visto come pura rotazione, a velocità angolare ω , intorno a un asse passante per P in ogni istante. I vettori mostrano le velocità istantanee lineari di alcuni punti caratteristici della ruota. Si possono ottenere i vettori combinando i moti di traslazione e di rotazione come nella figura 11.4.

11.2 FORZE ED ENERGIA CINETICA NEL ROTOLAMENTO

Obiettivi di apprendimento

Dopo aver letto questo paragrafo dovreste essere in grado di...

- 11.03** Calcolare l'energia cinetica di un corpo che rotola come la somma di energia cinetica traslazionale del centro di massa ed energia cinetica rotazionale attorno al centro di massa.
- 11.04** Applicare la relazione che lega il lavoro svolto su un corpo che rotola e la variazione della sua energia cinetica.
- 11.05** Ricorrere ai principi di conservazione per correlare i valori di energia iniziali a quelli finali di un corpo che rotola senza slittare.
- 11.06** Disegnare un diagramma delle forze di un corpo che rotola accelerando su piano orizzontale o inclinato.
- 11.07** Applicare la relazione esistente tra l'accelerazione del centro di massa e l'accelerazione angolare.
- 11.08** Applicare, per un corpo che rotola su o giù per un piano inclinato, la relazione che intercorre tra l'accelerazione del corpo, il suo momento d'inerzia e l'angolo d'inclinazione del piano.

Idee chiave

- Una ruota che rotola senza slittamenti ha energia cinetica

$$K = \frac{1}{2} I_{\text{cdm}} \omega^2 + \frac{1}{2} M v_{\text{cdm}}^2,$$

in cui I_{cdm} è il momento d'inerzia della ruota attorno al suo centro di massa ed M è la massa della ruota.

- Se la ruota accelera rotolando, l'accelerazione del suo centro di massa a_{cdm} è legata all'accelerazione angolare rispetto al centro dalla relazione

$$a_{\text{cdm}} = \alpha R.$$

- Se una ruota scende rotolando per un piano inclinato di un angolo θ , la sua accelerazione lungo l'asse x giacente sul piano è data da

$$a_{\text{cdm},x} = - \frac{g \sin \theta}{1 + I_{\text{cdm}} / MR^2}.$$

L'energia cinetica nel rotolamento

Calcoliamo ora l'energia cinetica della ruota che rotola come può essere misurata da un osservatore fermo. Se egli considera il rotolamento come una pura rotazione intorno all'asse P della figura 11.6, trova dall'equazione 10.27,

$$K = \frac{1}{2} I_P \omega^2, \quad (11.3)$$

ove ω è la velocità angolare della ruota e I_p è il suo momento d'inerzia rispetto all'asse P . Per il teorema degli assi paralleli, la (10.29) ci dà

$$I_p = I_{\text{cdm}} + MR^2, \quad (11.4)$$

ove M è la massa della ruota e I_{cdm} è il momento d'inerzia rispetto a un asse passante per il suo centro di massa. Sostituendo l'equazione 11.4 nella 11.3, si ha

$$K = \frac{1}{2} I_{\text{cdm}} \omega^2 + \frac{1}{2} MR^2 \omega^2,$$

da cui, per la (11.2), $v_{\text{cdm}} = \omega R$, si ottiene

$$K = \frac{1}{2} I_{\text{cdm}} \omega^2 + \frac{1}{2} M v_{\text{cdm}}^2. \quad (11.5)$$

Il primo termine del secondo membro si può interpretare come l'energia cinetica associata alla rotazione della ruota intorno al suo centro di massa, come nella figura 11.4a, mentre il secondo termine rappresenta l'energia cinetica associata al moto di traslazione della ruota, come nella figura 11.4b. Vale quindi la seguente regola:

➤ Un oggetto rotolante possiede due tipi di energia cinetica: un'energia cinetica rotazionale connessa alla rotazione attorno al suo centro di massa, e un'energia cinetica traslazionale connessa alla traslazione del suo centro di massa.

Le forze nel rotolamento

L'attrito nel rotolamento

Se una ruota rotola a velocità costante, come nella figura 11.3, non ha alcuna tendenza a strisciare nel punto di contatto P , dove non si manifesta pertanto alcuna forza di attrito fra ruota e piano di rotolamento. Ma se è soggetta a una forza che tende a far variare la velocità v_{cdm} del suo centro di massa, o la velocità angolare ω intorno al suo centro, la ruota tende a strisciare nel punto P , dove nasce di conseguenza una forza di attrito che agisce sulla ruota nel senso di opposizione allo slittamento.

Fino a quando la ruota non comincia a slittare, la forza è di attrito *statico* e il moto è *volvente*; in questo caso il legame tra l'accelerazione lineare a_{cdm} e l'accelerazione angolare α si può trovare differenziando l'equazione 11.2 rispetto al tempo (mantenendo R costante). Per il moto volvente abbiamo dunque

$$a_{\text{cdm}} = \alpha R \quad (\text{moto volvente senza slittamento}). \quad (11.6)$$

Se invece la ruota striscia quando su di essa agisce una forza netta, la forza d'attrito applicata nel punto P della figura 11.3 è di tipo *dinamico*. Il moto non è dunque di puro tipo volvente e per esso l'equazione 11.6 non vale. In questo capitolo tratteremo solo il moto volvente.

Nella figura 11.7 vediamo una ruota che, rotolando su una superficie piana, è indotta a rotolare sempre più velocemente, come una ruota di bicicletta alla partenza di una gara. L'accelerazione della ruota tende a far strisciare il punto di contatto P col terreno verso sinistra nella figura. Qui agisce una forza d'attrito, diretta verso destra, che si oppone allo slittamento. Se la ruota non striscia, questa forza d'attrito è di tipo statico f_s , il moto è volvente e si applica l'equazione 11.6. Se non esistesse l'attrito, i ciclisti starebbero fermi e le gare diventerebbero un po' noiose.

Se la ruota di figura 11.7 fosse indotta, al contrario, a ruotare più lentamente mentre si trova in corsa, come su una bicicletta in frenata, la figura sarebbe diversa in due dettagli: sia l'accelerazione del centro di massa sia la forza d'attrito sarebbero dirette verso sinistra.

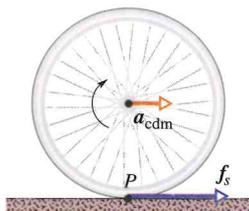


Figura 11.7 Una ruota rotola orizzontalmente senza strisciare mentre accelera con accelerazione lineare a_{cdm} come in una bicicletta alla partenza. Una forza di attrito statico f_s agisce sulla ruota in P , opponendosi alla tendenza a slittare della ruota.

Rotolare giù per una discesa

La figura 11.8 mostra un corpo rotondo omogeneo di massa M e raggio R che rotola giù per un piano inclinato senza strisciare. L'asse x è parallelo al piano inclinato e forma un angolo θ col piano orizzontale. Cerchiamo un'espressione per l'accelerazione $a_{\text{cdm},x}$ cui è sottoposto il corpo rotolante sotto l'effetto della gravità. La troveremo ricorrendo alla seconda legge di Newton nella forma lineare ($F_{\text{net}} = Ma$) e in quella angolare ($\tau_{\text{net}} = I\alpha$).

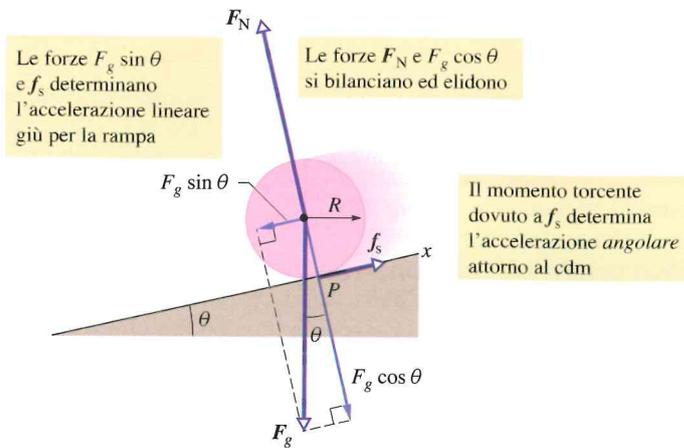


Figura 11.8 Un corpo rotondo omogeneo di raggio R rotola giù per una rampa. Le forze che su di esso agiscono sono la forza gravitazionale F_g , una forza normale F_N e una forza di attrito f_s diretta verso l'alto della rampa. (Per maggior chiarezza il vettore F_N è stato spostato lungo la sua linea d'azione in modo che la sua coda sia venuta a coincidere con il centro di massa del corpo.)

Cominciamo col tracciare il diagramma delle forze applicate al corpo come in figura 11.8:

1. La forza gravitazionale è diretta verso il basso. La coda del vettore è applicata al centro di massa del corpo. La sua componente lungo la rampa è $F_g \sin \theta$, che è uguale a $Mg \sin \theta$.
2. La forza normale F_N è perpendicolare al piano inclinato e agisce sul punto di contatto P , ma nella figura il vettore è stato traslato lungo la sua retta di applicazione fino a far coincidere la sua coda col centro di massa.
3. Nel punto di contatto P agisce anche una forza d'attrito statico f_s diretta lungo la rampa verso l'alto. (È chiaro il perché? Se il corpo dovesse scivolare in P , scenderebbe lungo la rampa. La forza d'attrito che vi si oppone deve dunque puntare nel verso opposto.)

Possiamo ora scrivere la seconda legge di Newton per la componente x di figura 11.8:

$$f_s - Mg \sin \theta = Ma_{\text{cdm},x} \quad (11.7)$$

Qui abbiamo due incognite: la forza d'attrito e l'accelerazione. *Non* possiamo supporre che f_s abbia il suo valore massimo $f_{s,\text{max}}$. Sappiamo solo che f_s ha per intensità quel tanto che basta a impedire al corpo di scivolare durante il suo rotolamento.

Applichiamo ora la seconda legge di Newton in forma rotazionale al corpo che ruota attorno al suo centro di massa. Dapprima scriviamo, in base alla (10.34), l'espressione del momento torcente agente sul corpo rispetto al perno di rotazione. La forza d'attrito f_s è applicata con braccio R e quindi genera un momento Rf_s positivo perché tende a ruotare il corpo nel senso antiorario di figura 11.8. Le forze F_g e F_N hanno braccio nullo rispetto al centro di massa e quindi il loro momento è nullo. Possiamo così scrivere la seconda legge di Newton in forma rotazionale rispetto a un asse passante per il centro di massa come

$$Rf_s = I_{\text{cdm}}\alpha. \quad (11.8)$$

Anche qui abbiamo due incognite, accelerazione angolare e forza d'attrito.

Siccome però il corpo ruota in un moto volvente senza slittare, l'equazione 11.6 sussiste e può essere utile per esprimere α in funzione dell'accelerazione lineare del centro di massa. Dobbiamo fare solo attenzione ai loro segni che sono discordi: mentre l'accelerazione angolare è positiva (senso antiorario), quella lineare è negativa (verso negativo delle x). Quindi poniamo $\alpha = -a_{\text{cdm},x}/R$ nella (11.8) e la risolviamo rispetto a f_s ottenendo

$$f_s = -I_{\text{cdm}} \frac{a_{\text{cdm},x}}{R^2}. \quad (11.9)$$

Introducendo quest'espressione nella (11.7) si trova

$$a_{\text{cdm},x} = -\frac{g \sin \theta}{1 + I_{\text{cdm}}/(MR^2)}. \quad (11.10)$$

Quest'equazione può servire a trovare l'accelerazione lineare di qualsiasi corpo che rotoli scendendo da un piano inclinato.

Si osservi che la forza di gravità provoca la discesa del corpo lungo il piano inclinato, ma è la forza d'attrito che provoca il rotolamento. Se si elimina l'attrito o comunque si rende $Mg \sin \theta$ maggiore di $f_{s,\text{max}}$, il corpo non rotola, ma scivola giù per la rampa.



VERIFICA 2

I dischi A e B sono identici e rotolano sul pavimento a uguale velocità. A un certo punto il disco A rotola salendo per un piano inclinato scabro, mentre B fa lo stesso, salvo che il piano è privo di attrito. La massima altezza raggiunta da A è maggiore, minore o uguale a quella raggiunta da B ?

minore

PROBLEMA SVOLTO 11.1 Boccia che rotola giù per una rampa

Una boccia omogenea, avente raggio R e massa $M = 6,00$ kg (rappresentata dalla sfera nella figura 11.8), rotola, partendo da ferma, giù per una rampa inclinata di $30,0^\circ$, che realizza un dislivello verticale h di $1,20$ m.

(a) A che velocità corre la boccia quando arriva in fondo alla rampa?

SOLUZIONE

Mettere in relazione la velocità della boccia con l'energia cinetica che essa assume costituisce una prima **idea chiave**. Una seconda **idea chiave** scaturisce dal presumere la conservazione dell'energia meccanica E del sistema boccia-Terra durante la discesa. Ciò perché l'unica forza che agisce sulla boccia è quella di gravità, una forza conservativa. Infatti la forza normale non compie lavoro perché è sempre perpendicolare alla velocità dell'elemento della boccia a contatto con la rampa e la forza d'attrito non converte lavoro in energia termica perché si tratta di un moto volvente, senza slittamento. Possiamo dunque utilizzare il teorema di conservazione dell'energia meccanica ($E_f = E_i$):

$$K_f + U_f = K_i + U_i \quad (11.11)$$

ove i pedici «f» e «i» si riferiscono rispettivamente alla condizione finale, in fondo alla rampa, e alla condizione iniziale, alla partenza da fermo. L'energia potenziale gravitazionale all'inizio è $U_i = Mgh$ (M è la massa della boccia), mentre alla fine vale zero. L'energia cinetica è inizialmente nulla, mentre per quella finale ci occorre un'altra idea: la boccia rotola e quindi sia la componente traslazionale sia quella rotazionale dell'energia cinetica sono diverse da zero. L'equazione 11.5 le include entrambe. Introducendo queste espressioni nella (11.11) abbiamo

$$\left(\frac{1}{2}I_{\text{cdm}}\omega^2 + \frac{1}{2}Mv_{\text{cdm}}^2\right) + 0 = 0 + Mgh, \quad (11.12)$$

in cui I_{cdm} è il momento d'inerzia della boccia rispetto a un asse passante per il centro di massa, v_{cdm} è la velocità in fondo alla rampa richiesta dal problema e ω è la velocità angolare nello stesso istante. Dalla tabella 10.2f si ricava che, per una sfera piena, è $I_{\text{cdm}} = \frac{2}{5}MR^2$. Possiamo anche sostituire a ω l'espressione equivalente v_{cdm}/R data dalla (11.2).

Risolviendo rispetto a v_{cdm} troviamo così

$$v_{\text{cdm}} = \sqrt{\frac{10}{7}gh} = \sqrt{\frac{10}{7}(9,8 \text{ m/s}^2)(1,20 \text{ m})} = 4,10 \text{ m/s}.$$

Si noti che il risultato non dipende dalla massa o dal raggio della boccia.

(b) Qual è, in modulo e direzione, la forza d'attrito che agisce sulla boccia durante la discesa?

SOLUZIONE

Possiamo ricavare la forza d'attrito con l'equazione 11.9, sapendo che il rotolamento è volvente e cioè non comporta slittamenti.

Calcoli. Prima però ci serve conoscere l'accelerazione della boccia $a_{\text{cdm},x}$. Utilizziamo a questo scopo l'equazione 11.10:

$$\begin{aligned} a_{\text{cdm},x} &= -\frac{g \sin \theta}{1 + I_{\text{cdm}}/(MR^2)} = -\frac{g \sin \theta}{1 + \frac{2}{5}MR^2/(MR^2)} = \\ &= -\frac{(9,8 \text{ m/s}^2) \sin 30,0^\circ}{1 + \frac{2}{5}} = -3,50 \text{ m/s}^2. \end{aligned}$$

Anche qui il risultato non dipende né dalla massa né dal raggio della boccia. Di conseguenza qualunque boccia, purché omogenea e in moto volvente, discende la rampa inclinata di $30,0^\circ$ animata dalla stessa accelerazione. Possiamo ora risolvere l'equazione 11.9:

$$\begin{aligned} f_s &= -I_{\text{cdm}} \frac{a_{\text{cdm},x}}{R^2} = -\frac{2}{5}MR^2 \frac{a_{\text{cdm},x}}{R^2} = -\frac{2}{5}Ma_{\text{cdm},x} = \\ &= \frac{2}{5}(6,00 \text{ kg})(-3,50 \text{ m/s}^2) = 8,40 \text{ N}. \end{aligned}$$

Ora invece, sebbene il raggio non entri nel calcolo, la massa interviene nel determinare la forza d'attrito. Di conseguenza la forza d'attrito su una boccia di $6,00$ kg che rotola giù per una rampa inclinata di $30,0^\circ$ è di $8,40$ N, indipendentemente dalle sue dimensioni, ma aumenta col crescere della massa.

11.3 LO YO-YO

Obiettivi di apprendimento

Dopo aver letto questo paragrafo dovreste essere in grado di...

11.09 Disegnare un diagramma delle forze per uno yo-yo che sale e scende avvolgendosi sulla corda.

11.10 Rendervi conto che lo yo-yo è effettivamente un corpo che rotola su e giù senza slittamenti per un piano inclinato di 90° .

11.11 Applicare, per uno yo-yo che sale e scende avvolgendosi sulla corda, la relazione che lega la sua accelerazione con il suo momento d'inerzia.

11.12 Determinare la tensione della corda di uno yo-yo mentre scende o sale.

Idee chiave

- Uno yo-yo che sale o scende verticalmente per avvolgimento di una corda su di esso si può trattare come una ruota che rotola lungo un piano inclinato con angolo $\theta = 90^\circ$.

Lo yo-yo

Uno yo-yo è un laboratorio di fisica tascabile. Quando uno yo-yo rotola giù lungo il filo per un'altezza h , perde una quantità mgh di energia potenziale ma aumenta la propria energia cinetica sia di traslazione ($\frac{1}{2}mv_{\text{cdm}}^2$), sia di rotazione ($\frac{1}{2}I_{\text{cdm}}\omega^2$). Nella corsa di risalita, invece, perde energia cinetica e guadagna energia potenziale.

In uno yo-yo moderno il filo non è fissato al mozzo, ma è avvolto intorno a esso. Quando raggiunge il punto più basso ha un leggero rimbalzo, nel quale perde il residuo di energia cinetica di traslazione che ancora possedeva, e comincia a girare sul posto («dormendo»), animato da sola energia cinetica rotazionale, fino a che non lo si «risvegli» con un piccolo strappo sul filo, che gli fa recuperare l'aderenza al filo. Questo comincia così a riavvolgersi sul mozzo, facendo risalire lo yo-yo. L'energia cinetica rotazionale dello yo-yo in fondo al filo (e quindi il tempo di stallo) può essere sensibilmente aumentata lanciando lo yo-yo verso il basso, invece di farlo partire da fermo, in modo che parta già con una certa velocità lineare v_{cdm} e angolare ω .

Per trovare un'espressione dell'accelerazione lineare a_{cdm} dello yo-yo mentre scende, applichiamo la seconda legge di Newton (nelle forme lineare e rotazionale) come abbiamo fatto per la boccia sul piano inclinato della figura 11.8. L'analisi è simile, con queste variazioni:

1. Invece che un piano inclinato di un angolo θ , qui si tratta di una discesa verticale e quindi $\theta = 90^\circ$ rispetto al piano orizzontale.
2. Anziché rotolare sulla superficie esterna con raggio R , lo yo-yo rotola sul mozzo di raggio R_0 (fig. 11.9a).
3. Anziché essere trattenuto da una forza d'attrito, lo yo-yo è trattenuto dalla forza di tensione T esercitata dal filo (fig. 11.9b).

L'analisi ci conduce quindi all'equazione 11.10, dove modifichiamo la notazione e poniamo $\theta = 90^\circ$:

$$a_{\text{cdm}} = - \frac{g}{1 + I_{\text{cdm}}/(MR_0^2)}, \quad (11.13)$$

in cui I_{cdm} rappresenta il momento d'inerzia dello yo-yo attorno al suo centro e M è la sua massa. L'accelerazione verso il basso non cambia neppure quando lo yo-yo è in fase di salita, perché le forze coinvolte sono sempre quelle di figura 11.9b.

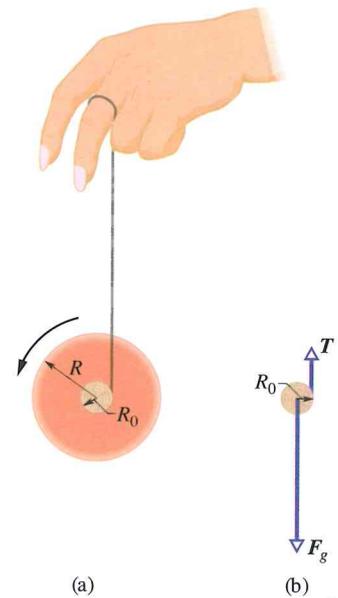


Figura 11.9 (a) Uno yo-yo in sezione. Il filo, di spessore trascurabile, è avvolto intorno a un mozzo di raggio R_0 . (b) Un diagramma delle forze per lo yo-yo in fase di caduta. È visibile soltanto il mozzo.

11.4 RIVEDIAMO IL MOMENTO TORCENTE

Obiettivi di apprendimento

Dopo aver letto questo paragrafo dovreste essere in grado di...

- 11.13** Capire che il momento torcente è una grandezza vettoriale.
11.14 Sapere che va sempre specificato il punto rispetto al quale si calcola un momento torcente.
11.15 Ottenere il momento torcente di una forza esercitata su una particella calcolando il prodotto vettoriale del suo vettore posizione

con il vettore forza, operando sia coi versori sia con moduli e orientamenti.

- 11.16** Applicare la regola della mano destra per individuare la direzione e il verso del prodotto vettoriale ottenuto.

Idee chiave

- In tre dimensioni il momento torcente $\boldsymbol{\tau}$ è una quantità vettoriale definita rispetto a un punto fisso, ove normalmente si pone l'origine degli assi, dall'espressione

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F},$$

ove \mathbf{F} è la forza applicata alla particella ed \mathbf{r} è il vettore posizione che localizza la particella rispetto al punto fisso.

- Il modulo di $\boldsymbol{\tau}$ è dato da

$$\tau = rF \sin \phi = rF_{\perp} = r_{\perp}F,$$

in cui ϕ rappresenta l'angolo minore formato dalle direzioni di \mathbf{F} ed \mathbf{r} , F_{\perp} è la componente di \mathbf{F} perpendicolare ad \mathbf{r} ed r_{\perp} è il braccio di \mathbf{F} .

- La direzione e il verso di $\boldsymbol{\tau}$ sono dati dalle regole per il prodotto vettoriale.

Rivediamo il momento torcente

Nel capitolo 10 abbiamo definito il momento τ di una forza per un corpo rigido, che possa ruotare intorno a un asse fisso in modo che ogni particella del corpo sia obbligata a muoversi su una circonferenza concentrica con quell'asse. Vogliamo ora generalizzare la definizione di «momento torcente» per poterla applicare, oltre che a un corpo rigido, anche a una *particella* in moto, invece che rispetto a un asse fisso, rispetto a un *punto fisso*. Il percorso seguito dalla particella non deve necessariamente essere una circonferenza intorno a quel punto, o giacere su un piano. Per questo siamo ora obbligati a scrivere τ come un vettore, suscettibile di assumere qualunque direzione. Possiamo calcolare l'intensità del momento torcente tramite le formule e stabilire il suo orientamento con le stesse regole dettate dal prodotto vettoriale.

La figura 11.10a si riferisce a una particella nel punto A del piano xy , la cui posizione rispetto all'origine O è definita dal vettore r . Una sola forza F , che giace nel piano xy , agisce sulla particella. Il momento esercitato sulla particella da questa forza rispetto all'origine O è una quantità vettoriale definita dalla

$$\tau = r \times F \quad (\text{definizione del momento torcente}). \quad (11.14)$$

Secondo le convenzioni riguardanti il prodotto vettoriale (par. 3.3), τ è perpendicolare al piano contenente r ed F . Perciò il vettore τ della figura 11.10b è parallelo all'asse z , nel verso delle z crescenti. Per applicare la regola della mano destra, conviene in questo caso traslare il vettore F parallelamente a se stesso fino a far coincidere la sua coda con l'origine O degli assi. Anche τ è applicato all'origine.

Il modulo del vettore τ , ricavabile dall'equazione 3.27, è

$$\tau = rF \sin \phi, \quad (11.15)$$

in cui ϕ è l'angolo minore tra le direzioni di r ed F . Osservando la figura 11.10b, vediamo che l'equazione 11.15 può risciversi anche come

$$\tau = rF_{\perp}, \quad (11.16)$$

ove F_{\perp} è la componente di F perpendicolare a r . La (11.15) può anche essere riscritta nella forma

$$\tau = r_{\perp}F, \quad (11.17)$$

ove r_{\perp} (il braccio di F) è la distanza del punto O dalla linea di azione di F , ossia la distanza dal punto O (misurata perpendicolarmente) alla retta su cui giace il vettore F .

✓ VERIFICA 3

Il vettore posizione r di una particella è diretto nel verso positivo dell'asse z . Se il momento torcente esercitato sulla particella è (a) nullo, (b) orientato nel verso negativo dell'asse x , o (c) orientato nel verso negativo dell'asse y , che direzione ha la forza generatrice di questo momento?

(a) parallelo a z ; $\pm z$
 (b) $+y$
 (c) $-x$

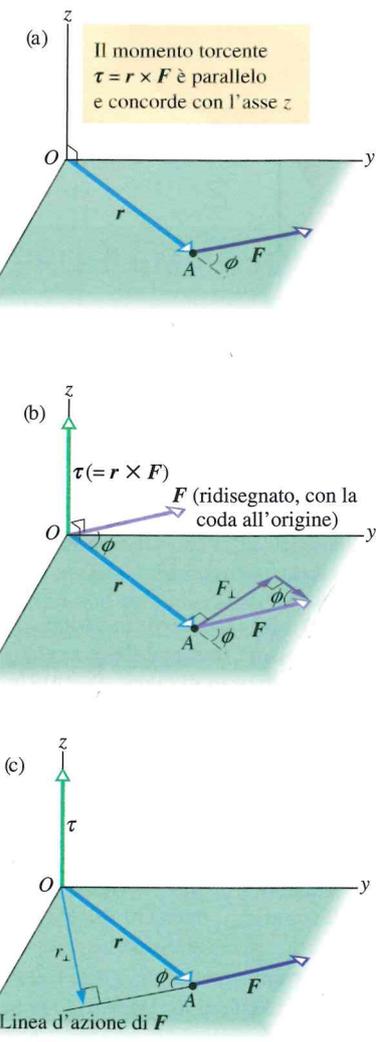


Figura 11.10 Definizione del momento torcente. (a) Una forza F , che giace nel piano xy , agisce su una particella situata nel punto A . (b) Questa forza esercita sulla particella un momento $\tau (= r \times F)$ rispetto all'origine O . Il vettore momento torcente è diretto nella direzione dell'asse z come si può dedurre dalla regola della mano destra. La sua intensità è data da rF_{\perp} in (b) o da $r_{\perp}F$ in (c).

PROBLEMA SVOLTO 11.2 Momento torcente di una forza esercitata su una particella

Nella figura 11.11a tre forze uguali di intensità 2,0 N agiscono su una particella localizzata nel punto A del piano xz dal vettore di posizione r , avente $r = 3,0$ m e $\theta = 30^\circ$. La forza F_1 è parallela all'asse x , la F_2 è parallela all'asse z e la F_3 è parallela all'asse y . Qual è il momento dovuto a ognuna delle tre forze rispetto all'origine O ?

SOLUZIONE

Poiché le grandezze qui considerate non giacciono su un medesimo piano, occorre operare dei prodotti vettoriali, con i moduli dati dall'equazione 11.15 e gli orientamenti dettati dalla regola della mano destra.

I momenti delle forze richiesti si intendono rispetto all'origine e quindi il vettore r coincide col vettore posizione della particella. Per valutare l'angolo che ciascuna forza forma col vettore posizione trasliamo a turno i tre vettori forza della figura 11.11a. Le figure 11.11b, c e d riportano sul piano xz questi vettori traslati, rispettivamente F_1 , F_2 ed F_3 facendoli partire da O (gli angoli così si valutano molto meglio). Nella figura 11.11d la forza F_3 forma un angolo di 90° con r ed è rappresentata dal segno \otimes , che può suggerire l'immagine della coda di una freccia e significa che il vettore è entrante nel piano della pagina. Se F_3 fosse in verso opposto, un puntino al centro di un cerchietto \odot simulerebbe la punta di una freccia.

Troviamo ora i moduli dei momenti delle tre forze applicando l'equazione 11.15:

$$\tau_1 = rF_1 \sin \phi_1 = (3,0 \text{ m})(2,0 \text{ N})(\sin 150^\circ) = 3,0 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$\tau_2 = rF_2 \sin \phi_2 = (3,0 \text{ m})(2,0 \text{ N})(\sin 120^\circ) = 5,2 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$\tau_3 = rF_3 \sin \phi_3 = (3,0 \text{ m})(2,0 \text{ N})(\sin 90^\circ) = 6,0 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Per trovare i versi dei tre momenti useremo la regola della mano destra, immaginando di mettere le dita della mano destra nel senso di rotazione che porta r a sovrapporsi a F descrivendo il *minore* dei due angoli formati dai due vettori. Il pollice indica il verso del vettore momento: τ_1 entra nel piano della pagina in figura 11.11b, τ_2 esce dal piano della pagina in figura 11.11c e τ_3 è diretta come si vede nella figura 11.11d. Tutti e tre i momenti delle forze sono riprodotti nella figura 11.11e.

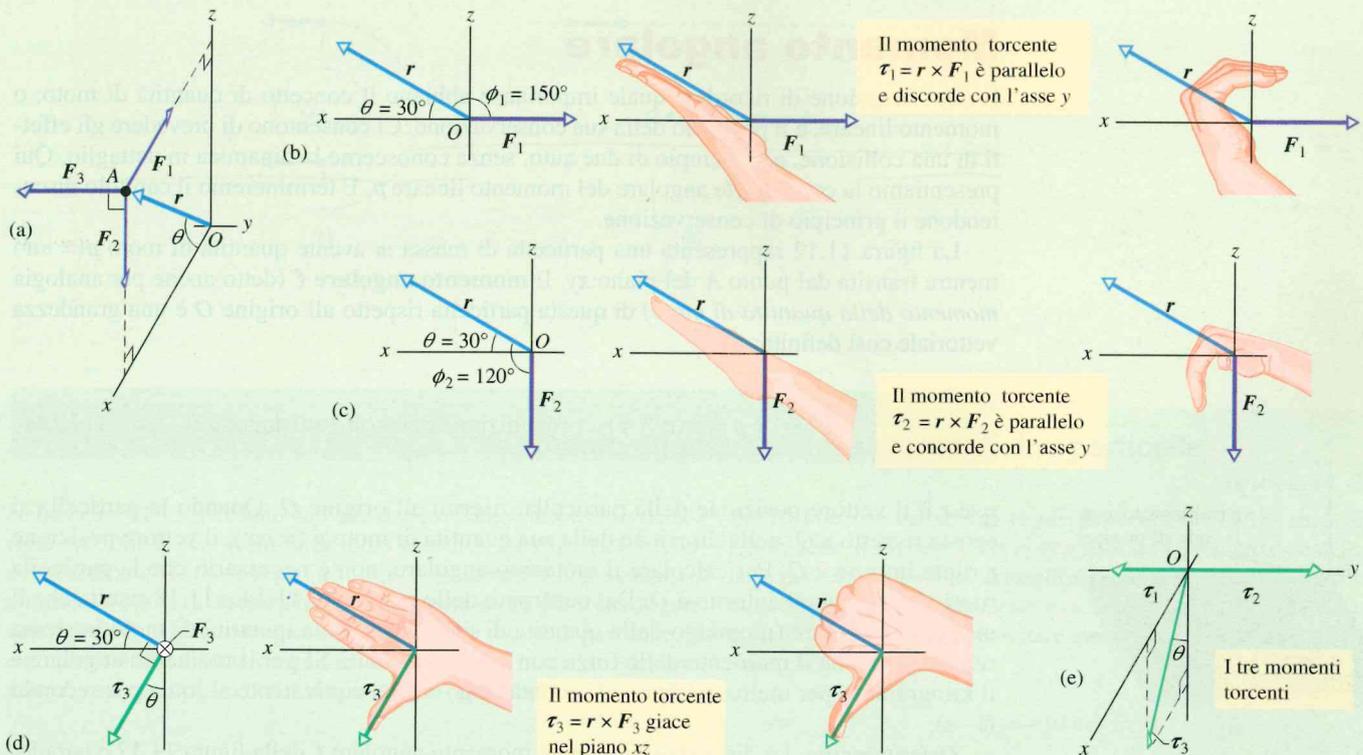


Figura 11.11 Problema svolto 11.2. (a) Su una particella situata in A agiscono tre forze, ciascuna parallela a uno degli assi coordinati. Gli angoli ϕ (usati per trovarne i momenti) sono indicati in (b) per F_1 e in (c) per F_2 . (d) Il momento τ_3 è perpendicolare sia a r sia a F_3 (il simbolo \otimes indica che il vettore F_3 «entra» perpendicolarmente nel piano della figura). (e) I momenti delle forze che agiscono sulla particella rispetto all'origine O .

11.5 MOMENTO ANGOLARE

Obiettivi di apprendimento

Dopo aver letto questo paragrafo dovrete essere in grado di...

- 11.17 Sapere che il momento angolare è una grandezza vettoriale.
- 11.18 Sapere che va sempre specificato il punto rispetto al quale si calcola un momento angolare.
- 11.19 Ottenere il momento angolare di una particella calcolando il prodotto vettoriale del suo vettore posizione con il vettore quan-

tità di moto, operando sia coi versori sia con moduli e orientamenti.

- 11.20 Applicare la regola della mano destra per individuare la direzione e il verso del prodotto vettoriale ottenuto.



Idee chiave

- Il momento angolare di una particella avente quantità di moto \mathbf{p} , massa m e velocità \mathbf{v} è una quantità vettoriale definita rispetto a un punto fisso, ove normalmente si pone l'origine degli assi, dall'espressione

$$\boldsymbol{\ell} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = m(\mathbf{r} \times \mathbf{v}).$$

- Il modulo di $\boldsymbol{\ell}$ è dato da

$$\ell = rmv \sin \phi = rp_{\perp} = rmv_{\perp} = r_{\perp}p = r_{\perp}mv,$$

in cui ϕ è l'angolo minore compreso tra \mathbf{r} e \mathbf{p} , p_{\perp} e v_{\perp} sono le componenti di \mathbf{p} e \mathbf{v} perpendicolari a \mathbf{r} , e r_{\perp} è la distanza del punto fisso dalla direzione di \mathbf{p} .

- La direzione e il verso di $\boldsymbol{\ell}$ sono dati dalle regole del prodotto vettoriale.

Momento angolare

È ora l'occasione di ricordare quale importanza abbiano il concetto di quantità di moto, o momento lineare, e il principio della sua conservazione. Ci consentono di prevedere gli effetti di una collisione, per esempio di due auto, senza conoscerne la dinamica in dettaglio. Qui presentiamo la controparte angolare del momento lineare \mathbf{p} . E termineremo il capitolo discutendone il principio di conservazione.

La figura 11.12 rappresenta una particella di massa m avente quantità di moto $\mathbf{p}(=m\mathbf{v})$ mentre transita dal punto A del piano xy . Il **momento angolare** $\boldsymbol{\ell}$ (detto anche per analogia *momento della quantità di moto*) di questa particella rispetto all'origine O è una grandezza vettoriale così definita:

$$\boldsymbol{\ell} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = m(\mathbf{r} \times \mathbf{v}) \quad (\text{definizione del momento angolare}), \quad (11.18)$$

ove \mathbf{r} è il vettore posizione della particella, riferito all'origine O . Quando la particella si sposta rispetto a O , nella direzione della sua quantità di moto $\mathbf{p}(=m\mathbf{v})$, il vettore posizione \mathbf{r} ruota intorno a O . Per calcolare il momento angolare, non è necessario che la particella ruoti effettivamente intorno a O . Dal confronto delle equazioni 11.14 e 11.18 risulta che il momento angolare (momento della quantità di moto) ha con la quantità di moto la stessa relazione che ha il momento delle forze con la forza. L'unità SI per il momento angolare è il kilogrammo per metro quadrato al secondo ($\text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$), equivalente al joule per secondo ($\text{J} \cdot \text{s}$).

Orientamento. La direzione del vettore momento angolare $\boldsymbol{\ell}$ della figura 11.12 è parallela all'asse z , e ha verso concorde con l'asse z . Dunque $\boldsymbol{\ell}$ è positivo, in accordo con la rotazione antioraria del vettore posizione \mathbf{r} della particella (fig. 11.12) intorno all'asse z . (Un $\boldsymbol{\ell}$ negativo, corrispondente a una rotazione oraria di \mathbf{r} intorno all'asse z , sarebbe diretto nel verso opposto a z).

Modulo. Il modulo (o intensità) di $\boldsymbol{\ell}$ è dato (eq. 3.24) da

$$\ell = rmv \sin \phi, \quad (11.19)$$

ove ϕ è l'angolo minore fra le direzioni di \mathbf{r} e di \mathbf{p} . Da uno sguardo alla figura 11.12a riconosciamo che la (11.19) si può anche scrivere

$$\ell = rp_{\perp} = rmv_{\perp}, \quad (11.20)$$

ove p_{\perp} è la componente di \mathbf{p} perpendicolare a \mathbf{r} e v_{\perp} è la componente di \mathbf{v} perpendicolare a \mathbf{r} . Ma la (11.19) si può anche riscrivere, in base alla figura 11.12b, nella forma

$$\ell = r_{\perp}p = r_{\perp}mv, \quad (11.21)$$

ove r_{\perp} è la distanza, misurata perpendicolarmente, del punto O dalla retta cui appartiene il vettore \mathbf{p} .

Importante. Si osservino queste caratteristiche: (1) il momento angolare ha un significato soltanto se riferito a un punto origine; (2) la direzione del vettore momento angolare è sempre perpendicolare al piano formato dai vettori \mathbf{r} e \mathbf{p} .

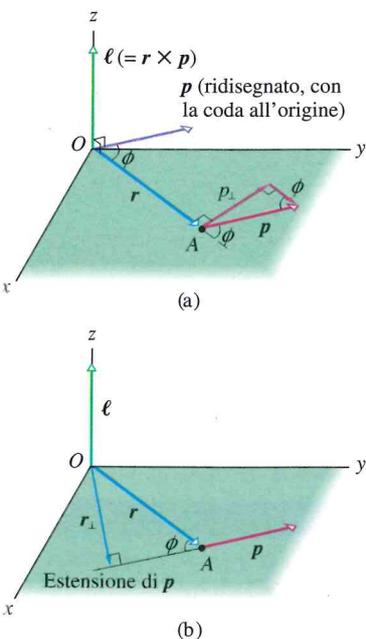
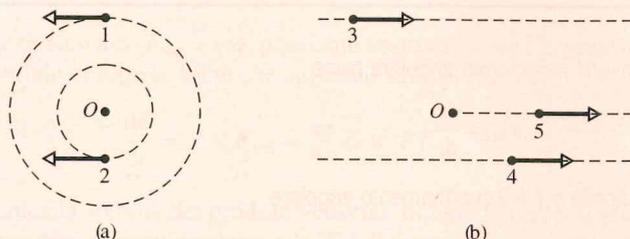


Figura 11.12 Definizione del momento angolare. Una particella di massa m situata nel punto A ha una quantità di moto (o momento lineare) $\mathbf{p}(=m\mathbf{v})$, che si suppone giaccia nel piano xy . La particella ha un momento angolare $\boldsymbol{\ell}(=\mathbf{r} \times \mathbf{p})$ rispetto all'origine O . Il vettore momento angolare, per la regola della mano destra, è orientato come l'asse z . (a) L'intensità (o modulo) di $\boldsymbol{\ell}$ è data dalle espressioni $\ell = rp_{\perp} = rmv_{\perp}$. (b) L'intensità di $\boldsymbol{\ell}$ è anche data dalle espressioni $\ell = r_{\perp}p = r_{\perp}mv$.



VERIFICA 4

Nella parte (a) di questa figura si vedono le particelle 1 e 2 muoversi attorno al centro O in versi opposti, con raggi di 4 m e 2 m rispettivamente. Nella parte (b) le particelle 3 e 4 viaggiano in linea retta nella stessa direzione e con distanze delle traiettorie da O pari rispettivamente a 4 m e 2 m. La particella 5 segue una traiettoria passante per O . Tutte e cinque hanno la stessa massa e stesso modulo della velocità. (a) Ponetele in ordine secondo i valori decrescenti dei moduli del momento angolare rispetto a O . (b) Quali particelle hanno momento angolare negativo rispetto al punto O ?



(a) 3, 2, 1, 4, 5
(b) 2, 3

PROBLEMA SVOLTO 11.3 Momento angolare di un sistema di due particelle

Nella figura 11.13 si vedono dall'alto due particelle muoversi su traiettorie orizzontali con quantità di moto costante. La particella 1, con quantità di moto in modulo pari a $5,0 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$, ha vettore di posizione r_1 e transita a $2,0 \text{ m}$ di distanza minima dal punto O . La particella 2, con quantità di moto in modulo pari a $2,0 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$, ha vettore di posizione r_2 e transita a $4,0 \text{ m}$ di distanza minima da O . Qual è il momento angolare netto L rispetto al punto O del sistema di due particelle?

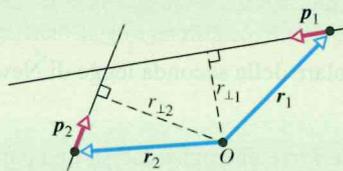


Figura 11.13 Problema svolto 11.3. Due particelle passano vicino al punto O .

SOLUZIONE

Idea chiave. Per conoscere L dobbiamo prima trovare i due singoli vettori momento angolare ℓ_1 e ℓ_2 delle particelle, e poi sommarli. Il calcolo dei moduli può essere fatto attraverso una qualsiasi delle equazioni da (11.19) a (11.21), ma la (11.21) è più semplice da applicare in questo caso, perché ci sono date le distanze perpendicolari oltre ai moduli delle quantità di moto. Per trovare il modulo di ℓ_1 poniamo $r_{\perp 1} = 2,0 \text{ m}$ e $p_1 = 5,0 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$:

$$\ell_1 = r_{\perp 1} p_1 = (2,0 \text{ m})(5,0 \text{ kg} \cdot \text{m/s}) = 10 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}.$$

Per la direzione del vettore ℓ_1 serviamoci della (11.18) applicando la regola della mano destra. Per $r_1 \times p_1$ il vettore prodotto esce dalla pagina verso l'alto perpendicolarmente al piano della figura 11.13. Il verso è dunque positivo, coerentemente con la rotazione antioraria del vettore posizione r_1 rispetto a O . Il vettore momento angolare della particella 1 è quindi

$$\ell_1 = +10 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}.$$

In modo analogo il modulo di ℓ_2 è

$$\ell_2 = r_{\perp 2} p_2 = (4,0 \text{ m})(2,0 \text{ kg} \cdot \text{m/s}) = 8,0 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s},$$

e il segno è l'opposto del caso precedente, sicché il vettore è entrante nel piano della pagina, coerentemente con la rotazione oraria di r_2 . Quindi per la particella 2 si ha

$$\ell_2 = -8,0 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}.$$

Il momento angolare risultante del sistema di due particelle è in definitiva

$$L = \ell_1 + \ell_2 = +10 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s} + (-8,0 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}) = +2,0 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}.$$

Il segno "più" significa che il verso di questo vettore è uscente dal piano della pagina verso l'alto.

11.6 SECONDA LEGGE DI NEWTON IN FORMA ANGOLARE

Obiettivi di apprendimento

Dopo aver letto questo paragrafo dovreste essere in grado di...

- 11.21** Applicare la seconda legge di Newton nella sua forma angolare per mettere in relazione il momento torcente che agisce sulla particella con la variazione temporale del suo momento angolare, tutti espressi rispetto a un punto dato.

Idee chiave

- La seconda legge di Newton per una particella può scriversi nella forma angolare come

$$\tau_{\text{net}} = \frac{d\ell}{dt},$$

ove τ_{net} è il momento torcente netto esercitato sulla particella e ℓ è il suo momento angolare.

Seconda legge di Newton in forma angolare

La seconda legge di Newton scritta nella forma

$$\mathbf{F}_{\text{net}} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \quad (\text{corpo puntiforme}), \quad (11.22)$$

è l'espressione della relazione esistente fra forza e quantità di moto di un corpo puntiforme. Abbiamo ormai acquisito un'esperienza sufficiente sul parallelismo fra grandezze lineari e angolari per esser certi dell'esistenza di una relazione analoga fra momento torcente e momento angolare. Guidati dall'equazione 11.22, possiamo spingerci ad affermare che dovrebbe essere

$$\tau_{\text{net}} = \frac{d\ell}{dt} \quad (\text{corpo puntiforme}). \quad (11.23)$$

La (11.23) è proprio un'espressione in forma angolare della seconda legge di Newton:

La somma (vettoriale) di tutti i momenti delle forze che agiscono su una particella è uguale alla derivata rispetto al tempo del momento angolare della particella.

La (11.23) è priva di senso se i vettori del momento torcente $\boldsymbol{\tau}$ e del momento angolare ℓ non sono definiti rispetto a uno stesso punto – normalmente l'origine degli assi coordinati.

Dimostrazione dell'equazione 11.23

Partiamo dall'equazione 11.18, definizione del momento angolare:

$$\ell = m(\mathbf{r} \times \mathbf{v}),$$

ove \mathbf{r} è il vettore posizione della particella e \mathbf{v} è la velocità della particella. Derivando¹ entrambi i membri rispetto al tempo t si ottiene

$$\frac{d\ell}{dt} = m \left(\mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{v} \right). \quad (11.24)$$

¹ Nell'operare la derivata di un prodotto vettoriale bisogna fare attenzione a non cambiare l'ordine dei due fattori del prodotto (in questo caso prima \mathbf{r} e poi \mathbf{v}). Si veda l'equazione 3.25.

Ma dv/dt è l'accelerazione a della particella, e dr/dt è la sua velocità v . L'equazione 11.24 si può perciò riscrivere così:

$$\frac{d\ell}{dt} = m(\mathbf{r} \times \mathbf{a} + \mathbf{v} \times \mathbf{v}).$$

Però $\mathbf{v} \times \mathbf{v}$ è nullo, perché il prodotto vettoriale di un vettore per se stesso, come più in generale di due vettori paralleli, è nullo. Ne consegue:

$$\frac{d\ell}{dt} = m(\mathbf{r} \times \mathbf{a}) = \mathbf{r} \times m\mathbf{a}.$$

Per la seconda legge di Newton ($\mathbf{F}_{\text{net}} = m\mathbf{a}$) possiamo sostituire a $m\mathbf{a}$ l'espressione equivalente, la risultante vettoriale di tutte le forze che agiscono sulla particella:

$$\frac{d\ell}{dt} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}_{\text{net}} = \sum (\mathbf{r} \times \mathbf{F}). \quad (11.25)$$

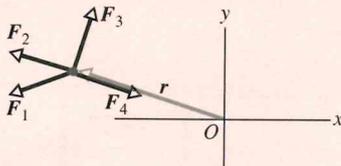
Qui il simbolo \sum indica la somma dei prodotti vettoriali di tutte le forze. E infine, dall'equazione 11.14 sappiamo che ciascun prodotto $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$ è il momento associato alla forza \mathbf{F} , per cui la 11.25 diventa

$$\boldsymbol{\tau}_{\text{net}} = \frac{d\ell}{dt},$$

ossia la (11.23), come volevasi dimostrare.

✓ VERIFICA 5

La figura a fianco mostra il vettore posizione \mathbf{r} di una particella in un certo istante, e quattro possibili direzioni per una forza destinata ad accelerarla. Tutte le direzioni giacciono sul piano xy . (a) Mettete in ordine i casi secondo i valori decrescenti del modulo della derivata temporale ($d\ell/dt$) del suo momento angolare rispetto al punto O . (b) Quali sono le scelte che daranno luogo a un risultato negativo?



(a) F_3, F_1, F_2 e F_4
(b) F_3

PROBLEMA SVOLTO 11.4 Momento torcente e derivata temporale del momento angolare

La figura 11.14a è la rappresentazione istantanea di una particella di massa 0,500 kg che si muove in linea retta, nella posizione che all'istante $t = 0$ è data da

$$\mathbf{r} = (-2,00t^2 - t)\mathbf{i} + 5,00\mathbf{j},$$

ove i coefficienti hanno dimensioni tali che \mathbf{r} , il vettore posizione della particella rispetto all'origine, risulti in metri quando t è dato in secondi. Si trovi l'espressione, facendo uso dei versori, che descrive il momento angolare ℓ della particella e il momento torcente $\boldsymbol{\tau}$ esercitato sulla particella, entrambi rispetto all'origine. Si discutano i segni in relazione al moto della particella.

SOLUZIONE

(1) Va sempre specificato il punto di riferimento rispetto a cui si calcola il momento angolare: qui è l'origine. (2) Il momento angolare ℓ di una particella è dato dall'equazione 11.18. (3) Il segno di tale momento angolare è stabilito dal verso di rotazione del vettore posizione attorno all'asse di rotazione: positivo se antiorario, negativo se orario. (4) Se il momento torcente esercitato su una particella e il suo momento angolare

sono riferiti al medesimo punto, tra di essi sussiste la relazione data dalla (11.23).

Calcoli. Per usare la (11.18) ci occorre prima un'espressione per la velocità della particella che otteniamo derivando il vettore posizione rispetto al tempo. In base all'equazione 4.10 scriviamo

$$\mathbf{v} = \frac{d}{dt}[(-2,00t^2 - t)\mathbf{i} + 5,00\mathbf{j}] = (-4,00t - 1,00)\mathbf{i}.$$

Ora eseguiamo il prodotto vettoriale di \mathbf{r} per \mathbf{v} secondo la traccia della (3.27):

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_y b_z - b_y a_z)\mathbf{i} + (a_z b_x - b_z a_x)\mathbf{j} + (a_x b_y - b_x a_y)\mathbf{k}.$$

Nel nostro caso poniamo \mathbf{r} in luogo di \mathbf{a} e \mathbf{v} in luogo di \mathbf{b} . Prima di procedere, però, onde non fare fatica inutile esaminiamo i termini di questo prodotto vettoriale una volta introdotte le sostituzioni. Poiché \mathbf{r} manca della componente z e \mathbf{v} manca delle componenti y e z , l'unico termine non nullo nel prodotto vettoriale è l'ultimo, $(-b_x a_y)\mathbf{k}$. Sicché

$$\mathbf{r} \times \mathbf{v} = -(-4,00t - 1,00)(5,00)\mathbf{k} = (20,0t + 5,00)\mathbf{k} \text{ m}^2/\text{s}.$$

Il vettore che ne risulta ha, come sempre nei prodotti vettoriali, la direzione perpendicolare a entrambi i vettori r e v .

Ora applichiamo la (11.18) moltiplicando anche per la massa:

$$\ell = (0,500 \text{ kg})[(20,0t + 5,00)\mathbf{k} \text{ m}^2/\text{s}] = (10,0t + 2,50)\mathbf{k} \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}.$$

Il momento torcente rispetto all'origine segue immediatamente grazie all'equazione 11.23:

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{d}{dt}(10,0t + 2,50)\mathbf{k} \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s} = \\ &= 10,0\mathbf{k} \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2 = 10,0\mathbf{k} \text{ N} \cdot \text{m}, \end{aligned}$$

che è concorde al verso positivo dell'asse z .

Dal risultato si vede che anche il momento angolare è concorde all'asse z positivo.

Per spiegare tale risultato, esaminiamo la serie delle posizioni in diversi istanti:

$$\begin{aligned} t = 0, & \quad r_0 = 5,00\mathbf{j} \text{ m} \\ t = 1,00 \text{ s}, & \quad r_1 = (-3,00\mathbf{i} + 5,00\mathbf{j}) \text{ m} \\ t = 2,00 \text{ s}, & \quad r_2 = (-10,0\mathbf{i} + 5,00\mathbf{j}) \text{ m}. \end{aligned}$$

Riportando questi dati su un grafico (fig. 11.14b), notiamo che r ruota in verso antiorario, cioè in verso positivo. Anche se la particella avanza in linea retta, il momento angolare la segue ruotando in senso antiorario rispetto all'origine.

Nella figura 11.14c simbolizziamo il vettore ℓ come perpendicolare e uscente dal piano della pagina che coincide col piano xy , in coerenza col nostro risultato. Nella figura indichiamo anche il verso di τ , che è parallelo a ℓ e anche concorde, giacché il momento angolare va crescendo in intensità.

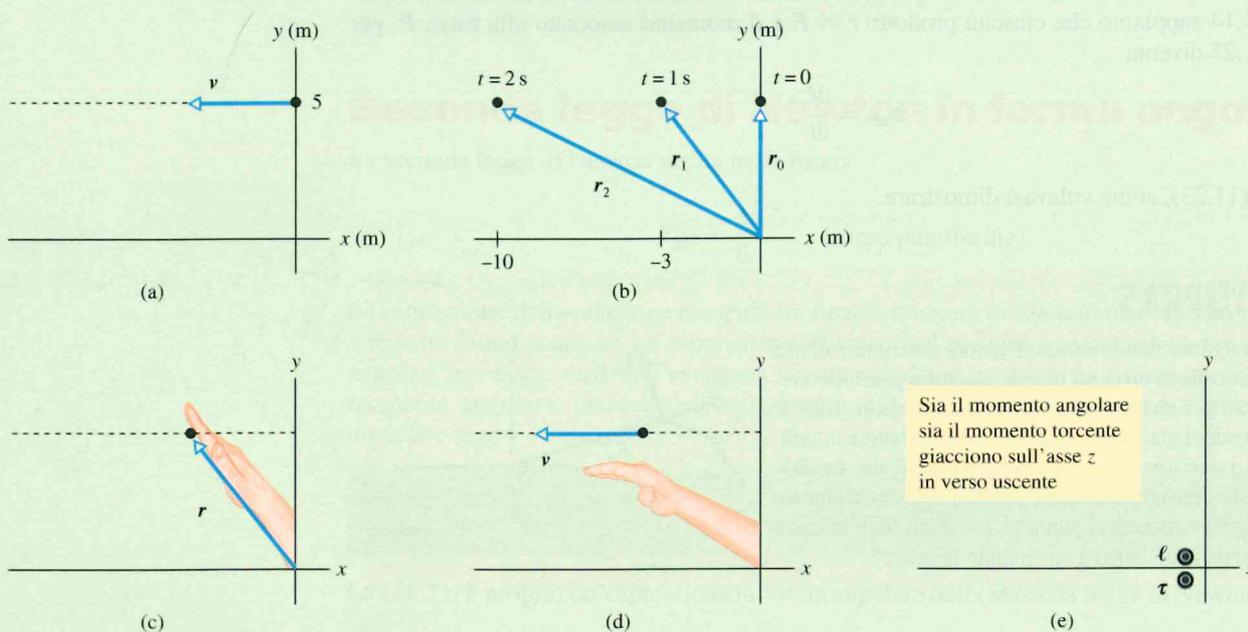


Figura 11.14 Problema svolto 11.4. (a) Una particella che avanza in linea retta mostrata all'istante $t = 0$. (b) I vettori posizione per gli istanti $t = 0$, $t = 1,00 \text{ s}$ e $t = 2,00 \text{ s}$. (c) Il vettore momento angolare e il vettore momento torcente sono disposti lungo l'asse z con verso uscente dal piano della figura.

11.7 MOMENTO ANGOLARE DI UN CORPO RIGIDO

Obiettivi di apprendimento

Dopo aver letto questo paragrafo dovreste essere in grado di...

11.22 Applicare la seconda legge di Newton in forma angolare a un sistema di particelle per porre in relazione il momento torcente netto esercitato sul sistema con la variazione temporale del suo momento angolare.

11.23 Applicare la relazione che lega il momento angolare di un corpo rigido rotante attorno a un asse fisso al suo momento d'inerzia e alla sua velocità angolare attorno al medesimo asse.

11.24 Calcolare il momento angolare totale di due corpi rigidi che ruotano attorno al medesimo asse.

Idee chiave

- Il momento angolare L di un sistema di particelle è la somma vettoriale dei momenti angolari di ogni singola particella:
- Per un corpo rigido rotante attorno a un asse fisso la componente del suo momento angolare parallela all'asse di rotazione è

$$\mathbf{L} = \boldsymbol{\ell}_1 + \boldsymbol{\ell}_2 + \boldsymbol{\ell}_3 + \dots + \boldsymbol{\ell}_n = \sum_{i=1}^n \boldsymbol{\ell}_i,$$

$$L = I\omega \quad (\text{corpo rigido, asse fisso}).$$

- La derivata temporale di questo momento angolare è uguale al momento torcente netto esercitato sul sistema da parte di forze esterne:

$$\boldsymbol{\tau}_{\text{net}} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} \quad (\text{sistema di particelle}).$$

Momento angolare di un sistema di particelle

Passiamo ora a studiare il moto di un sistema di punti materiali rispetto un sistema di riferimento. Il momento angolare totale L di un sistema di particelle è la somma (vettoriale) dei momenti angolari $\boldsymbol{\ell}$ delle singole particelle:

$$\mathbf{L} = \boldsymbol{\ell}_1 + \boldsymbol{\ell}_2 + \boldsymbol{\ell}_3 + \dots + \boldsymbol{\ell}_n = \sum_{i=1}^n \boldsymbol{\ell}_i, \quad (11.26)$$

ove l'indice i ($= 1, 2, 3, \dots, n$) identifica le diverse particelle.

I momenti angolari delle singole particelle variano nel tempo, sia per interazioni (fra le diverse particelle) all'interno del sistema, sia per effetto di eventi esterni al sistema che agiscono su particelle componenti il sistema. Possiamo rappresentare la variazione nel tempo del momento angolare totale L del sistema derivando la (11.26) rispetto al tempo:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{d\boldsymbol{\ell}_i}{dt}. \quad (11.27)$$

Ma l'equazione 11.23 dice che $d\boldsymbol{\ell}_i/dt$ è proprio $\sum \boldsymbol{\tau}_i = \boldsymbol{\tau}_{\text{net},i}$, la somma (vettoriale) dei momenti delle forze che agiscono sulla i -esima particella. Possiamo anche scrivere quest'espressione come

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \sum_{i=1}^n \boldsymbol{\tau}_{\text{net},i}. \quad (11.28)$$

Come dire che il rapporto temporale di variazione del momento angolare totale è uguale alla somma di tutti i momenti risultanti delle forze che agiscono sulle singole particelle. Alcuni di questi momenti sono *interni*, associati a forze che le particelle interne al sistema esercitano le une sulle altre; altri sono *esterni*, associati cioè a forze che agiscono sulle particelle dall'esterno del sistema. Però le forze interne, per il principio di azione e reazione di Newton, si annullano a coppie. Nello sviluppo della sommatoria dobbiamo dunque prendere in considerazione soltanto i momenti associati a forze esterne al sistema, le uniche in grado di variare il momento angolare complessivo.

Momento torcente esterno netto. Chiamando $\boldsymbol{\tau}_{\text{net}}$ la somma di tutti i momenti netti delle forze agenti sul sistema di particelle dall'esterno, la (11.28) diventa

$$\boldsymbol{\tau}_{\text{net}} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} \quad (\text{sistema di particelle}). \quad (11.29)$$

L'equazione 11.29 esprime in termini di quantità angolari la seconda legge di Newton per un sistema di particelle. Essa afferma:

La somma $\boldsymbol{\tau}_{\text{net}}$ (vettoriale) dei *momenti delle forze esterne* che agiscono su un sistema di particelle è uguale alla variazione del *momento angolare* del sistema stesso rispetto al tempo.

$$\vec{F}_{net} = \frac{d\vec{P}}{dt}$$

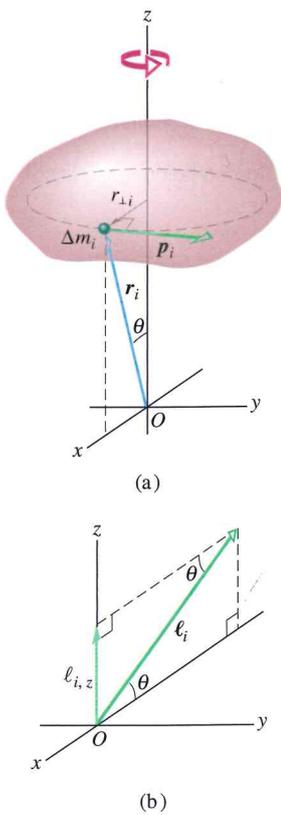


Figura 11.15 (a) Un corpo rigido ruota intorno all'asse z a velocità angolare ω . Un elemento di massa Δm_i interno al corpo descrive intorno all'asse z una circonferenza di raggio $r_{\perp i}$. La sua quantità di moto è \mathbf{p}_i e la sua posizione rispetto all'origine O è definita dal vettore posizione \mathbf{r}_i . La figura rappresenta Δm_i in una posizione in cui $r_{\perp i}$ è parallelo all'asse x . (b) Diagramma schematico del momento angolare ℓ_i , rispetto a O , dell'elemento di massa Δm_i . È indicata anche la componente $\ell_{i,z}$ di ℓ_i secondo z .

Quest'equazione è l'analogo della (9.27) ed è valida soltanto se i vettori dei momenti delle forze e i vettori dei momenti angolari sono riferiti alla stessa origine. Se il centro di massa del sistema non è animato da moto accelerato in un riferimento inerziale, la (11.29) può essere applicata rispetto a qualsiasi punto di origine. In un sistema di riferimento che accelera (come una ruota che scende rotolando per una rampa), l'equazione 11.29 può essere applicata soltanto rispetto al centro di massa del sistema. Ad esempio consideriamo una ruota come un sistema di particelle. Se gira attorno a un asse fisso rispetto al terreno, qualsiasi punto a riposo rispetto al terreno può essere preso come origine per l'applicazione della (11.29). Se però la ruota gira rispetto a un asse in moto accelerato (come quando scende per una rampa), solo il centro di massa della ruota costituisce un'origine valida per l'applicazione della (11.29).

Momento angolare di un corpo rigido che ruota intorno a un asse fisso

Consideriamo ora il momento angolare per il caso particolare di un sistema di particelle costituenti un corpo rigido rotante. La figura 11.15a illustra una situazione di questo genere: il corpo è obbligato a girare intorno a un asse fisso, che si fa coincidere con l'asse z , passante attraverso il corpo, e la velocità angolare ω è costante. Vogliamo trovare il momento angolare del corpo rispetto a quest'asse.

A questo scopo possiamo fare la somma delle componenti secondo z dei momenti angolari degli elementi che costituiscono la massa del corpo. Nella figura 11.15a, Δm_i , un elemento rappresentativo della massa del corpo, si muove descrivendo una circonferenza intorno all'asse z . La sua posizione rispetto all'origine è data dal vettore di posizione \mathbf{r}_i . Il raggio del percorso circolare è $r_{\perp i}$, la distanza dell'elemento di massa i dall'asse z , misurata perpendicolarmente.

Il modulo del momento angolare ℓ_i di questa massa elementare rispetto a O si ricava dalla (11.19):

$$\ell_i = (r_i) (p_i) (\sin 90^\circ) = (r_i) (\Delta m_i v_i),$$

ove p_i e v_i sono la quantità di moto e la velocità lineare della massa elementare, e l'angolo minore compreso fra \mathbf{r}_i e \mathbf{p}_i risulta di 90° . Il vettore momento angolare ℓ_i dell'elemento di massa della figura 11.15a è disegnato nella figura 11.15b; la sua direzione è perpendicolare a quelle di \mathbf{r}_i e \mathbf{p}_i .

Componente secondo l'asse z . Quella che ci interessa è la componente di ℓ_i parallela all'asse di rotazione, che qui è l'asse z . Essa vale

$$\ell_{i,z} = \ell_i \sin \theta = (r_i \sin \theta) (\Delta m_i v_i) = r_{\perp i} \Delta m_i v_i.$$

La componente secondo z del momento angolare complessivo del corpo rigido rotante è data dalla somma dei contributi di tutti gli elementi di massa che formano il corpo. E, poiché $v = \omega r_{\perp}$, si può scrivere

$$\begin{aligned} L_z &= \sum_{i=1}^n \ell_{i,z} = \sum_{i=1}^n \Delta m_i v_i r_{\perp i} = \\ &= \sum_{i=1}^n \Delta m_i (\omega r_{\perp i}) r_{\perp i} = \omega \left(\sum_{i=1}^n \Delta m_i r_{\perp i}^2 \right). \end{aligned} \tag{11.30}$$

Possiamo estrarre dalla sommatoria il fattore costante ω , che ha lo stesso valore in tutti i punti del corpo.

La quantità $\sum \Delta m_i r_{\perp i}^2$ dell'equazione 11.30 è il momento d'inerzia I del corpo rispetto all'asse fisso (vedi l'equazione 10.33). La (11.30) si riduce così a

$$L = I\omega \quad (\text{corpo rigido rispetto a un asse fisso}). \tag{11.31}$$

Abbiamo ommesso l'indice z , ma teniamo presente che il momento angolare definito dalla (11.31) è soltanto la componente del vettore momento angolare parallela all'asse di rotazione. E così anche I è il momento d'inerzia rispetto allo stesso asse.

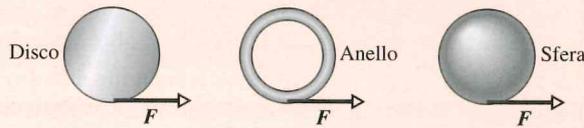
La tabella 11.1, che amplia la tabella 10.3, aumenta la lista delle corrispondenze fra espressioni lineari e angolari.

TABELLA 11.1 Altre corrispondenze fra espressioni relative a moti di traslazione e di rotazione^a

Traslazione		Rotazione	
Forza	F	Momento della forza	$\tau (= r \times F)$
Quantità di moto	p	Momento angolare	$\ell (= r \times p)$
Quantità di moto ^b	$P (= \sum p_i)$	Momento angolare ^b	$L (= \sum \ell_i)$
Quantità di moto ^b	$P = M v_{\text{cdm}}$	Momento angolare ^c	$L = I\omega$
Seconda legge di Newton ^b	$F_{\text{net}} = \frac{dP}{dt}$	Seconda legge di Newton ^b	$\tau_{\text{net}} = \frac{dL}{dt}$
Legge di conservazione ^d	$P = \text{costante}$	Legge di conservazione ^d	$L = \text{costante}$

^a Vedi anche la tabella 10.3.^b Per sistemi di particelle, corpi rigidi compresi.^c Per un corpo rigido rotante intorno a un asse fisso, essendo L la componente lungo quest'asse.^d Per un sistema chiuso e isolato.**✓ VERIFICA 6**

Nella figura vediamo un disco, un anello e una sfera solida che vengono fatti ruotare attorno all'asse centrale fisso per mezzo



di una corda avvolta su di essi, che produce la stessa forza tangenziale costante F su tutti e tre gli oggetti. Essi hanno stessa massa e stesso raggio e sono inizialmente fermi. Metteteli in ordine decrescente di (a) momento angolare rispetto all'asse centrale e (b) velocità angolare, dopo che le corde sono state tirate per un certo tempo t .

(a) tutti uguali, stesso $\tau \Rightarrow$ stessa ΔL
 (b) sfera, disco, anello
 \rightarrow ordine inverso di I

11.8 CONSERVAZIONE DEL MOMENTO ANGOLARE

Obiettivi di apprendimento

Dopo aver letto questo paragrafo dovrete essere in grado di...

11.25 Applicare, per il caso in cui il momento torcente esterno netto rispetto a un dato asse sia nullo, il principio di conservazione del momento angolare per stabilire la relazione tra i valori di momento angolare iniziale e finale lungo quell'asse.

Idee chiave

- Il momento angolare L di un sistema rimane costante purché sia nullo il momento torcente esterno netto che agisce sul sistema:

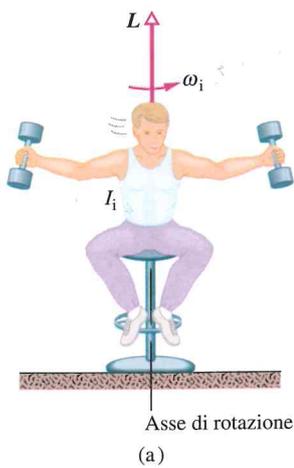
$$L = \text{costante}, \quad \text{cioè} \quad L_i = L_f \quad (\text{per un sistema isolato}).$$

Ciò costituisce il principio di conservazione del momento angolare.

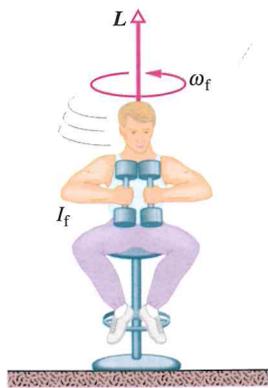
Conservazione del momento angolare

Abbiamo finora esaminato due leggi di conservazione molto importanti: la conservazione dell'energia e la conservazione della quantità di moto. Passiamo ora all'esame di una terza legge dello stesso tipo, la *conservazione del momento angolare*. Partiamo dall'equazione 11.29 ($\tau_{\text{net}} = dL/dt$), la seconda legge di Newton in forma rotazionale. Se il momento netto delle forze esterne agenti sul sistema è nullo, questa equazione si riduce a $dL/dt = 0$, ossia

$$L = \text{costante} \quad (\text{per un sistema isolato}). \quad (11.32)$$



(a)



(b)

Figura 11.16 (a) Lo studente ha un momento d'inerzia relativamente grande e una velocità angolare relativamente piccola. (b) Lo studente, facendo diminuire il proprio momento d'inerzia, aumenta automaticamente la propria velocità angolare. Il momento angolare L del sistema rotante rimane invariato.

Quest'equazione esprime il **principio di conservazione del momento angolare**, che può anche essere scritto come

$$L_i = L_f \quad (\text{per un sistema isolato}), \quad (11.33)$$

ove i pedici si riferiscono a valori di L in un certo istante iniziale e finale. Queste equazioni stabiliscono che:

➤ Se il momento netto delle forze esterne agenti su un sistema è nullo, il (vettore) momento angolare L del sistema rimane costante, indipendentemente dai cambiamenti che intervengono all'interno del sistema.

Le equazioni 11.32 e 11.33 sono equazioni vettoriali, e come tali equivalgono a tre equazioni scalari che corrispondono alla conservazione del momento angolare rispetto a tre direzioni fra loro ortogonali. A seconda del momento torcente che agisce su un sistema, il suo momento angolare potrebbe conservarsi solo lungo una o due direzioni, ma non in tutte:

➤ Se una componente del momento netto delle forze esterne che agiscono su un sistema è nulla, la componente del momento angolare del sistema lungo la stessa direzione rimane invariata, indipendentemente dalle altre variazioni che avvengono nel sistema.

Si tratta di una condizione molto vantaggiosa: possiamo considerare solo gli stati iniziale e finale ignorando gli stati intermedi. Possiamo applicare questa legge al sistema isolato di figura 11.15, che ruota attorno all'asse z . Supponiamo che il corpo inizialmente rigido in qualche modo ridistribuisca la sua massa rispetto all'asse di rotazione, variando il momento d'inerzia. Le equazioni 11.32 e 11.33 stabiliscono che il momento angolare del sistema non può cambiare. Sostituendo l'equazione 11.31 (per il momento angolare lungo l'asse di rotazione) nella (11.33) scriviamo il principio di conservazione come

$$I_i \omega_i = I_f \omega_f. \quad (11.34)$$

Qui i pedici si riferiscono ai valori precedenti e successivi alla redistribuzione della massa.

Al pari delle altre due leggi di conservazione studiate in precedenza, la (11.32) e la (11.33) sono valide oltre i limiti della meccanica newtoniana. Sono valide per particelle con velocità prossime a quella della luce, nel dominio della teoria della relatività, e rimangono valide nel mondo delle particelle subatomiche, dove regna la meccanica quantistica. A questa legge non è stata finora trovata alcuna eccezione.

Esaminiamo ora quattro esempi applicativi di questa legge.

1. Lo studente-trottola. La figura 11.16 ci presenta uno studente seduto su uno sgabello che può ruotare liberamente intorno a un asse verticale. Lo studente, che è stato messo in rotazione a una ridotta velocità angolare iniziale ω_i , tiene nelle mani, con le braccia stese in fuori, due pesi ginnici. Il vettore del suo momento angolare L appartiene all'asse verticale di rotazione ed è orientato verso l'alto.

Ora l'insegnante gli chiede di stringere a sé le braccia: ciò riduce il suo momento d'inerzia dal valore iniziale I_i a un valore minore I_f , per lo spostamento di parte della sua massa più vicino all'asse di rotazione. La sua velocità di rotazione aumenta sensibilmente, da ω_i a ω_f . Se vuole rallentare, deve soltanto stendere ancora in fuori le braccia.

Sul sistema costituito da studente, sgabello e pesi, il momento netto di forza esterna è nullo. Il momento angolare del sistema rispetto all'asse di rotazione deve perciò restare costante, comunque lo studente manovri i suoi pesi. Nella figura 11.16a, la velocità angolare dello studente ω_i è relativamente bassa e il suo momento d'inerzia I_i relativamente alto. Nella figura 11.16b, la sua velocità angolare deve aumentare, in accordo con l'equazione 11.34, per compensare la diminuzione del suo momento d'inerzia.

2. Il tuffatore. La figura 11.17 ci presenta una tuffatrice che esegue un salto mortale e mezzo in avanti. Come è da aspettarsi, il suo centro di massa descrive una parabola. Ella ha lasciato il trampolino con un certo momento angolare L rispetto a un asse passante per il

Figura 11.17 Il momento angolare L della tuffatrice rimane costante durante tutto il volo, ed è indicato dal simbolo \otimes , che vuole rappresentare la coda di una freccia che penetra nel piano della figura. Si noti anche che il centro di massa della tuffatrice (rappresentato da un puntino) descrive una traiettoria parabolica.

Il momento angolare non cambia, ma la tuffatrice può controllare la sua velocità angolare



suo centro di massa, rappresentato da un vettore che entra nel piano della figura 11.17, normalmente alla pagina. Quando è in volo, la tuffatrice costituisce un sistema isolato e il suo momento angolare non può variare. Tirando a sé braccia e gambe in *posizione rannicchiata*, riesce a ridurre sensibilmente il proprio momento d'inerzia rispetto all'asse di rotazione (eq. 11.34), aumentando così in modo ragguardevole la propria velocità angolare. Al termine del tuffo, uscendo dalla posizione rannicchiata per passare alla posizione di *massima estensione*, aumenta il proprio momento d'inerzia e rallenta così la velocità di rotazione, in modo da entrare nell'acqua riducendo al minimo gli spruzzi. Anche in tuffi più complicati, con rotazioni intorno all'asse longitudinale del corpo, il momento angolare del tuffatore deve conservarsi, sia in modulo, sia in direzione, per tutta la durata del volo.

3. Salto in lungo. Quando un atleta si stacca dalla pedana per spiccare il salto in lungo, le forze agenti sul piede di stacco gli danno un momento angolare con una rotazione in avanti lungo l'asse orizzontale. Tale rotazione non gli consente di atterrare convenientemente: nel toccare terra le gambe dovrebbero essere unite ed estese in avanti con un angolo tale da permettergli di toccare la sabbia coi talloni il più lontano possibile. Una volta che l'atleta si trova in aria, il suo momento angolare non può più cambiare (si conserva) perché non esistono su di lui momenti torcenti esterni apprezzabili. Però il saltatore può trasferire gran parte del momento angolare alle braccia facendole ruotare come un mulino a vento (fig. 11.18). Così facendo, il busto rimane ritto e in posizione appropriata per l'atterraggio.

4. Il tour jeté. Per gli esperti di balletto classico, in un *tour jeté* il ballerino balza sul pavimento con un leggero moto di torsione su un piede mentre tiene l'altra gamba perpendicolare al corpo (fig. 11.19a). La velocità angolare è così modesta che gli spettatori difficilmente la percepiscono. Mentre si eleva nel salto, abbassa rapidamente la gamba tesa e contemporaneamente alza un poco l'altra gamba finché sono unite e inclinate entrambe di un angolo θ (fig. 11.19b). Il movimento è aggraziato e serve al ballerino per aumentare la sua rotazione perché l'abbassamento della gamba riduce il suo momento d'inerzia. Dato che, mentre è in volo, non agiscono su di lui momenti torcenti esterni, il suo momento angolare non può variare. Riducendo il momento d'inerzia cresce la velocità angolare. Il ballerino sembra ruotare rapidamente e dopo 180° , invertendo l'orientamento iniziale delle gambe, atterra: allungando in fuori l'altra gamba, infatti, la rotazione pare svanire.

✓ VERIFICA 7

Un bambino sta sul bordo di un disco rotante simile a una giostra. Se a un certo punto decide di spostarsi verso il centro del disco, stabilite se le seguenti grandezze, tutte rispetto all'asse centrale, aumentano, diminuiscono o rimangono invariate: (a) il momento d'inerzia del sistema bimbo-disco; (b) il momento angolare del sistema; (c) la velocità angolare del bimbo e del disco.

(a) diminuisce
(b) invariato
(c) aumenta



Figura 11.18 La rotazione delle braccia a mulinello durante il salto in lungo aiuta a mantenere il corpo in un orientamento appropriato per l'atterraggio.

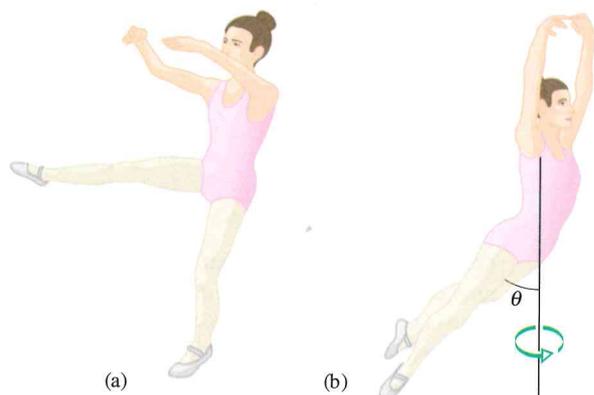


Figura 11.19 (a) Fase iniziale di un *tour jeté*: maggiore momento d'inerzia e minore velocità angolare. (b) Fase successiva: minor momento d'inerzia e maggiore velocità angolare.

PROBLEMA SVOLTO 11.5 Conservazione del momento angolare, capovolgimento della ruota

Nella figura 11.20a vediamo un altro studente, seduto sullo stesso sgabello della figura 11.16, che, stando fermo, tiene con una mano, in posizione verticale, il prolungamento del mozzo di una ruota di bicicletta col cerchione riempito di piombo, avente momento d'inerzia $I = 1,2 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ rispetto all'asse passante per il centro di massa. (Il piombo serve ad accrescere considerevolmente il momento d'inerzia I della ruota.) La ruota gira a velocità angolare $\omega_i = 3,9 \text{ giri/s}$; visto dall'alto, il senso di rotazione è antiorario: il momento angolare L_i della ruota è pertanto diretto verticalmente verso l'alto. Lo studente a un certo punto (fig. 11.20b) capovolge l'asse della ruota, in modo che ora, vista dall'alto, giri in senso orario e il suo momento angolare diventi $-L_i$. In seguito a ciò, studente e sgabello cominciano a ruotare intorno all'asse dello sgabello. Il momento d'inerzia I_0 complessivo del sistema *studente + sgabello + ruota*, rispetto all'asse dello sgabello, vale $6,8 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$. Con quale velocità angolare e in quale direzione girerà lo studente?

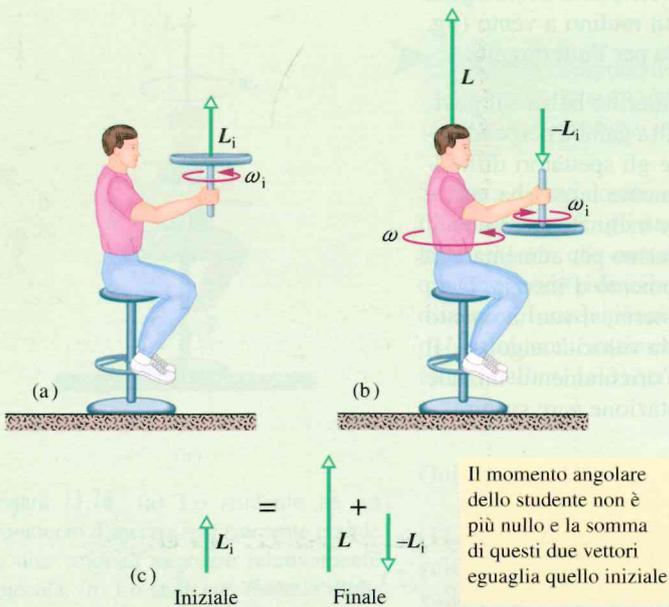


Figura 11.20 Problema svolto 11.5. (a) Uno studente tiene con la mano una ruota di bicicletta che gira intorno a un asse verticale. (b) Lo studente capovolge la ruota, provocando così una rotazione di se stesso attorno all'asse dello sgabello. (c) Il momento angolare complessivo del sistema deve infatti rimanere costante nonostante l'inversione del senso di rotazione della ruota di bicicletta.

SOLUZIONE

Queste le **idee chiave**:

1. La velocità angolare ω_i del sistema composto (studente + sgabello + ruota) è correlata al suo momento angolare finale L attorno all'asse di rotazione dello sgabello tramite l'equazione 11.31 ($L = I\omega$).
2. La velocità angolare iniziale ω_i della ruota è legata al suo momento angolare L_i attorno al suo asse tramite la medesima equazione.
3. La somma di L e di L_i dà il momento angolare totale L_{tot} del sistema studente + sgabello + ruota.
4. Al capovolgimento della ruota non esiste alcun momento di forze esterne che agisca sul sistema atto a variare il momento angolare totale, indipendentemente dall'asse verticale rispetto al quale lo si consideri. Le forze che intervengono tra lo studente e la ruota nell'atto del capovolgimento sono forze interne al sistema. Sicché il momento angolare totale rispetto a qualsiasi asse verticale si conserva.

Questa conservazione è rappresentata dai vettori di figura 11.20c. Possiamo anche esprimerla in termini di componenti lungo un asse verticale:

$$L_{\text{tot},f} = L_{\text{tot},i} = L_i, \quad (11.35)$$

dove i pedici «i» ed «f» si riferiscono agli stati iniziale (prima del capovolgimento) e finale (dopo il capovolgimento). Il momento angolare iniziale coincide con quello della ruota, essendo lo studente inizialmente fermo e, dato che il capovolgimento ha invertito il momento angolare della ruota, il momento angolare totale $L_{\text{tot},f}$ alla fine è pari alla somma di L e $-L_i$. La (11.35) diventa dunque

$$L = 2L_i.$$

In base all'equazione 11.31, sostituiamo ora $I\omega$ a L e $I_i\omega_i$ a L_i . Risolvendo rispetto a ω si ricava

$$\omega = \frac{2I\omega_i}{I_0} = \frac{(2)(1,2 \text{ kg} \cdot \text{m}^2)(3,9 \text{ giri/s})}{6,8 \text{ kg} \cdot \text{m}^2} = 1,4 \text{ giri/s}.$$

Il segno positivo del risultato trovato ci conferma che lo studente gira in senso antiorario visto dall'alto. Se vuole smettere di girare, deve soltanto capovolgere nuovamente la ruota.

PROBLEMA SVOLTO 11.6 Conservazione del momento angolare, maggiolino sul disco

Nella figura 11.21 vediamo un maggiolino di massa m che gira come su una giostra su un disco di massa $6,00m$ e raggio R . Il disco ruota attorno all'asse centrale con velocità angolare $\omega_i = 1,50 \text{ rad/s}$, mentre il maggiolino si trova inizialmente a una distanza dal centro $r = 0,800R$. Ma questi si sposta a un certo punto sul bordo del disco. Trattando il maggiolino come un corpo puntiforme, calcolarne la velocità angolare finale.

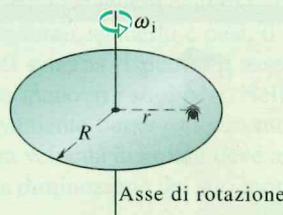


Figura 11.21 Problema svolto 11.6. Un maggiolino ruota su un disco a mo' di giostra, a distanza r dal centro.

SOLUZIONE

- (1) La mossa del maggiolino varia la distribuzione delle masse e quindi il momento d'inerzia del sistema disco-maggiolino. (2) Il momento angolare del sistema non cambia perché non esistono momenti torcenti esterni che possano agire (lo spostamento del maggiolino coinvolge solo forze e momenti torcenti interni al sistema). (3) Il modulo del momento angolare per un corpo rigido è dato dall'equazione 11.31.

Calcoli. Si richiede la velocità angolare finale. L'idea è eguagliare il momento angolare finale L_f a quello iniziale L_i poiché entrambi coinvolgono la velocità angolare. Però richiedono anche di conoscere il momento d'inerzia I , per cui cominciamo col calcolarlo per il sistema disco-maggiolino nelle due condizioni iniziale e finale.

Nella tabella 10.2c troviamo, per un disco rotante attorno al proprio asse, $I = \frac{1}{2}MR^2$. Sostituendo alla massa M il valore $6,00m$, otteniamo

$$I_d = 3,00mR^2. \quad (11.36)$$

I valori di m e R non ci sono dati, ma proseguiamo nell'ipotesi che essi si elidano e non servano. Il momento d'inerzia del maggiolino (una particella) rispetto all'asse è dato dall'equazione 10.33, $I = mr^2$. Introducendovi i valori iniziale ($r = 0,800R$) e finale ($r = R$), troviamo

$$I_{m,i} = 0,64mR^2, \quad (11.37)$$

per il valore iniziale, e

$$I_{m,f} = mR^2, \quad (11.38)$$

per quello finale. I momenti d'inerzia iniziale e finale per il sistema disco-maggiolino sono dunque rispettivamente

$$I_i = I_d + I_{m,i} = 3,64mR^2, \quad (11.39)$$

e

$$I_f = I_d + I_{m,f} = 4,00mR^2. \quad (11.40)$$

Ora imponiamo l'uguaglianza, esplicitandola con l'equazione 11.31, tra i momenti angolari iniziale e finale:

$$I_f \omega_f = I_i \omega_i,$$

ossia

$$4,00mR^2 \omega_f = 3,64mR^2 (1,50 \text{ rad/s}).$$

Le incognite m ed R si elidono come speravamo e quindi resta

$$\omega_f = 1,37 \text{ rad/s}.$$

La velocità angolare è diminuita perché una parte della massa totale si è spostata più lontano dall'asse aumentando il momento d'inerzia del sistema.

11.9 PRECESSIONE DEL GIROSCOPIO

Obiettivi di apprendimento

Dopo aver letto questo paragrafo dovrete essere in grado di...

11.26 Capire che la forza di gravità agente su un giroscopio provoca una rotazione conoidale del vettore momento angolare, e quindi dell'apparecchio, attorno al suo asse di rotazione, un fenomeno chiamato precessione.

11.27 Calcolare la velocità di precessione di un giroscopio.

11.28 Rendervi conto che la velocità di precessione non dipende dalla massa.

Idee chiave

- Un giroscopio può subire un moto di precessione rispetto all'asse di rotazione verticale con velocità di precessione data da

$$\Omega = \frac{Mgr}{I\omega},$$

ove M è la massa del giroscopio, r il suo braccio, I il suo momento d'inerzia e ω la sua velocità angolare.

Precessione del giroscopio

Il giroscopio semplice consiste in una ruota fissata a un albero e libera di ruotare attorno a tale albero. Se appoggiamo un'estremità dell'albero su un supporto mentre il giroscopio è fermo, come in figura 11.22a, e lo lasciamo andare, esso semplicemente cade a terra inclinandosi verso il basso con una rotazione attorno al punto d'appoggio. Trattandosi di una rotazione, il fenomeno è regolato dalla seconda legge di Newton in forma angolare, data dall'equazione 11.29:

$$\tau = \frac{dL}{dt}. \quad (11.41)$$

Da qui deduciamo che il momento torcente che provoca la caduta (rotazione) modifica il momento angolare L del giroscopio, che all'inizio era nullo. Il momento torcente τ è dovuto alla forza di gravità Mg agente sul centro di massa del giroscopio, che supponiamo sia al centro geometrico della ruota. Il braccio rispetto alla cima del supporto, situato in O nella figura 11.22a, è r . Il modulo di τ è dunque dato da

$$\tau = Mgr \sin 90^\circ = Mgr, \quad (11.42)$$

considerato che Mg ed r sono ortogonali, e la direzione è mostrata nella figura 11.22a.

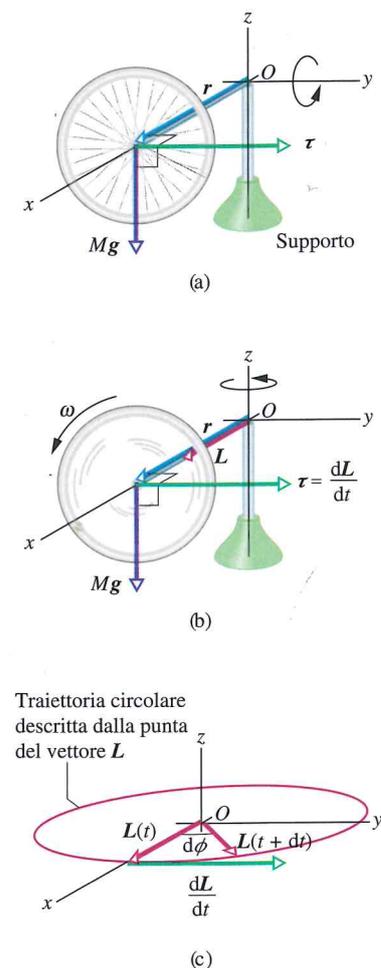


Figura 11.22 (a) Un giroscopio non rotante con l'albero appoggiato solo in O semplicemente cade per terra, ruotando nel piano xz per effetto del momento torcente τ . (b) Un giroscopio in rapida rotazione, dotato di elevato momento angolare L , segue un moto di precessione nel piano xy attorno all'asse z . (c) La variazione dL/dt del momento angolare porta alla rotazione di L attorno a O .

Un giroscopio in rapida rotazione si comporta in modo ben diverso. Assumiamo di lasciarlo andare mentre l'albero è leggermente inclinato verso l'alto. L'albero dapprima ruota verso il basso cadendo leggermente, ma poi, mentre la ruota continua a girare velocemente attorno all'albero, quest'ultimo ruota orizzontalmente attorno all'asse verticale passante per il supporto e il punto O , in un moto chiamato **precessione**.

Perché non cade? Perché il giroscopio in rapida rotazione rimane sospeso in aria invece di cadere a terra come fa il giroscopio fermo? Perché, una volta lasciato andare il giroscopio, il momento torcente dovuto a Mg dovrebbe modificare un momento angolare che non è più inizialmente nullo, come nel primo caso, ma ha un valore finito dovuto al moto di rotazione della ruota.

Per capire come mai questo momento angolare iniziale non nullo conduca al moto di precessione, consideriamo dapprima il momento angolare L del giroscopio dovuto alla rotazione della ruota. Per semplificare assumiamo che la velocità di rotazione sia così elevata da rendere trascurabile rispetto a L il momento angolare legato al lento moto rotatorio di precessione. Assumiamo inoltre che all'inizio della precessione l'albero sia orizzontale, come in figura 11.22b. Il modulo di L è dato dall'equazione 11.31:

$$L = I\omega, \quad (11.43)$$

ove I è il momento d'inerzia del giroscopio attorno all'albero e ω è la velocità angolare della sua rotazione. Il vettore L è orientato lungo l'asse dell'albero, come si vede nella figura 11.22b. Dato che L è parallelo a r , il momento τ dev'essere perpendicolare a L .

Secondo la (11.41) il momento torcente τ provoca un incremento dL del momento angolare del giroscopio in un intervallo incrementale di tempo dt :

$$dL = \tau dt. \quad (11.44)$$

Ma se il giroscopio gira *rapidamente*, il modulo di L è fissato dall'equazione 11.43 e il momento torcente può solo modificarne la direzione, non il modulo.

L'equazione 11.44 indica che la direzione di dL è quella di τ , perpendicolare a L . L'unico modo quindi di variare la direzione di L in direzione di τ senza modificarne il modulo è far ruotare L attorno all'asse z , come illustra la figura 11.22c. Così L conserva il proprio modulo inalterato e la punta del vettore L segue un moto circolare in modo che τ rimanga sempre perpendicolare e quindi tangente alla traiettoria circolare. Dato che L è sempre parallelo all'asse dell'albero, l'albero deve ruotare attorno all'asse z seguendo il verso imposto da τ . Ecco come si instaura il moto di precessione. Il giroscopio rotante, obbedendo alla seconda legge di Newton per i moti rotatori, in risposta ad ogni variazione del suo momento angolare iniziale deve *precedere* anziché banalmente cadere a terra.

Precessione. La **velocità di precessione** Ω si trova ricavando innanzitutto il modulo di dL dalle equazioni 11.44 e 11.42:

$$dL = \tau dt = Mgr dt. \quad (11.45)$$

Per un incremento dL in un tempo dt l'albero e il momento angolare precedono attorno all'asse z di un angolo incrementale $d\phi$. Nella figura 11.22c l'angolo $d\phi$ è disegnato di ampiezza esagerata per esigenze di chiarezza. Con l'ausilio della (11.43) e della (11.45) troviamo $d\phi$:

$$d\phi = \frac{dL}{L} = \frac{Mgr dt}{I\omega}.$$

Dividendo per dt in modo da porre $\Omega = d\phi/dt$, otteniamo

$$\Omega = \frac{Mgr}{I\omega}. \quad (11.46)$$

Il risultato è valido sotto l'ipotesi che la rotazione del giroscopio sia *rapida*. Si noti che Ω cresce al diminuire di ω e che non si avrebbe precessione se non agisse la forza di gravità Mg . La velocità di precessione Ω è indipendente dalla massa, grazie al fatto che nell'equazione 11.46 quest'ultima si elide poiché I dipende da M .

L'equazione 11.46 rimane valida anche se l'albero del giroscopio non è orizzontale. Vale anche per una trottola, che è essenzialmente un giroscopio con asse di rotazione più prossimo a quello verticale.

RIEPILOGO & SOMMARIO

Rotolamento Per una ruota di raggio R che rotola senza strisciare si ha

$$v_{\text{cdm}} = \omega R, \quad (11.2)$$

ove v_{cdm} è la velocità lineare del centro della ruota e ω è la velocità angolare della ruota intorno al suo centro. Si può anche considerare la ruota in rotazione istantanea intorno al punto P del piano di rotolamento che è a contatto con la ruota. La velocità angolare della ruota intorno a questo punto è identica a quella intorno al suo centro.

Tenendo presente questo fatto, si può dimostrare che l'energia cinetica della ruota che rotola è

$$K = \frac{1}{2} I_{\text{cdm}} \omega^2 + \frac{1}{2} M v_{\text{cdm}}^2, \quad (11.5)$$

ove I_{cdm} è il momento d'inerzia della ruota rispetto al suo centro di massa ed M è la massa della ruota. Se la ruota accelera, sempre senza strisciare, l'accelerazione del centro di massa a_{cdm} è in relazione con l'accelerazione angolare α attorno al centro nel modo seguente:

$$a_{\text{cdm}} = \alpha R. \quad (11.6)$$

Una ruota che rotola senza slittare giù per una rampa inclinata di un angolo θ subisce un'accelerazione, lungo l'asse x parallelo al piano inclinato, data da

$$a_{\text{cdm},x} = -\frac{g \sin \theta}{1 + I_{\text{cdm}} / (MR^2)}. \quad (11.10)$$

Il momento torcente visto come un vettore In un sistema a tre dimensioni, il *momento torcente* τ (o momento meccanico) è una grandezza vettoriale definita rispetto a un punto fisso (in generale coincidente con l'origine), che vale

$$\tau = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \quad (11.14)$$

ove \mathbf{F} è una forza applicata a una particella ed \mathbf{r} è un vettore posizione che localizza la particella rispetto al punto fisso (o all'origine). L'intensità di τ può essere espressa da una delle relazioni

$$\tau = rF \sin \phi = rF_{\perp} = r_{\perp} F, \quad (11.15, 11.16, 11.17)$$

ove ϕ è l'angolo minimo fra \mathbf{F} ed \mathbf{r} , F_{\perp} è la componente di \mathbf{F} perpendicolare a \mathbf{r} ed r_{\perp} il braccio di \mathbf{F} . La direzione di τ è data dalla regola della mano destra.

Momento angolare di una particella Il *momento angolare* ℓ di una particella avente quantità di moto \mathbf{p} , massa m e velocità lineare \mathbf{v} è una grandezza vettoriale definita rispetto a un punto fisso (in generale coincidente con l'origine), che vale

$$\ell = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = m(\mathbf{r} \times \mathbf{v}). \quad (11.18)$$

L'intensità di ℓ può essere espressa da una delle relazioni

$$\ell = rmv \sin \phi, \quad (11.19)$$

$$\ell = rp_{\perp} = rmv_{\perp}, \quad (11.20)$$

$$\ell = r_{\perp} p = r_{\perp} mv, \quad (11.21)$$

ove ϕ è l'angolo minimo fra \mathbf{r} e \mathbf{p} , p_{\perp} e v_{\perp} sono le componenti di \mathbf{p} e \mathbf{v} perpendicolari a \mathbf{r} ed r_{\perp} è la distanza (misurata lungo la perpendicolare) dal punto fisso alla *linea d'azione* di \mathbf{p} (ossia la retta cui appartiene il vettore \mathbf{p}). La direzione di ℓ è data dalla regola della mano destra.

Seconda legge di Newton in forma rotazionale per una particella La seconda legge di Newton per una particella può essere così scritta in forma vettoriale rotazionale:

$$\tau_{\text{net}} = \frac{d\ell}{dt}, \quad (11.23)$$

ove τ_{net} è il momento netto (risultante) delle forze che agiscono sulla particella ed ℓ è il momento angolare della particella.

Momento angolare di un sistema di particelle Il momento angolare L di un sistema di particelle è la somma vettoriale dei momenti angolari delle singole particelle:

$$L = \ell_1 + \ell_2 + \dots + \ell_n = \sum_{i=1}^n \ell_i. \quad (11.26)$$

La derivata rispetto al tempo di questo momento angolare netto è uguale alla somma dei momenti delle forze esterne che agiscono sul sistema, ossia dei momenti dovuti a interazioni fra particelle del sistema e altre particelle esterne al sistema, purché l'origine sia un punto fisso o il centro di massa. Quindi si ha

$$\tau_{\text{net}} = \frac{dL}{dt} \quad (\text{sistema di particelle}). \quad (11.29)$$

Momento angolare di un corpo rigido Per un corpo rigido rotante intorno a un asse fisso, la componente del momento angolare parallela all'asse di rotazione è

$$L = I\omega \quad (\text{corpo rigido, asse fisso}). \quad (11.31)$$

Conservazione del momento angolare Il momento angolare L di un sistema rimane costante se il momento netto delle forze esterne che agiscono sul sistema è zero:

$$L = \text{costante} \quad (\text{per un sistema isolato}), \quad (11.32)$$

cioè

$$L_i = L_f \quad (\text{per un sistema isolato}). \quad (11.33)$$

È questo il **principio di conservazione del momento angolare**. È una delle fondamentali leggi di conservazione della natura, che ha confermato la sua validità perfino per quei casi (di particelle ad altissime velocità, o di dimensioni subatomiche) per i quali le leggi di Newton cadono in difetto.

Precessione del giroscopio

Un giroscopio in rapida rotazione può *precedere* attorno a un asse verticale passante per il suo punto d'appoggio con velocità di precessione data da

$$\Omega = \frac{Mgr}{I\omega}, \quad (11.46)$$

in cui M è la massa del giroscopio, r è il braccio di precessione, I è il momento d'inerzia e ω è la velocità angolare del giroscopio.