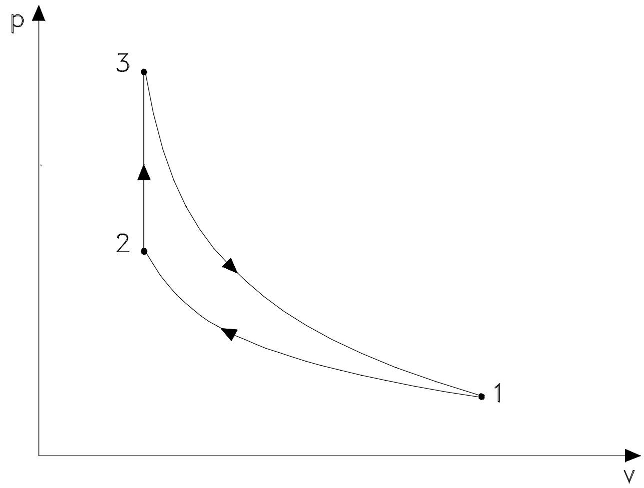
GAS IDEALI

Esercizio 1

Dell'ossigeno, supposto gas ideale con k = 1.4 cost, evolve secondo un ciclo costituito dalle seguenti trasformazioni reversibili:

– Compressione isoterma dallo stato 1 (p_1 = 0.9 bar; v_1 = 0.88 m^3/kg) allo stato 2;
– trasformazione isocora da 2 a 3 (p_3 = 21.5 bar);
– espansione politropica di esponente n = 1.32 da 3 a 1.

Determinare, con riferimento all'unità di massa del fluido:
a) La temperatura massima e minima del ciclo;
b) La quantità di calore scambiata lungo le singole trasformazioni;
c) Il rendimento di I^o principio del ciclo;
d) Le quantità di lavoro scambiate nelle singole trasformazioni.



a) Dalla $pv = \frac{\overline{R}}{M} T = R T$

$$p_1 v_1 = \frac{\overline{R}}{M_1} T_1 \qquad R = \frac{\overline{R}}{M} = \frac{8314}{32} = 259.8 \ J/kg\,K$$

$$T_1 = \frac{p_1 \cdot v_1 \cdot M}{R} = \frac{0.9 \cdot 10^5 \cdot 0.88 \cdot 32}{8314}$$

$$T_1 = 304.8 \text{ K} = 31.7 \ ^oC$$

$$T_2 = T_1 = 304.8 \text{ K} = 31.7 \ ^oC$$

Lungo la trasformazione politropica 1-3:

$$T \cdot p^{\frac{1-n}{n}} = cost$$

da cui:

$$T_3 = T_1 \left(\frac{p_3}{p_1} \right)^{\frac{n-1}{n}} = 304.8 \left(\frac{21.5}{0.9} \right)^{\frac{0.32}{1.32}}$$

$$T_3 = 657.8 \text{ K} = 384.7 \ ^oC$$

Inoltre, dalla $p_3\, v_3 = R\, T_3$:

$$v_3 = \frac{R_1 T_3}{p_3} = \frac{259.8 \cdot 657.8}{21.5 \cdot 10^5}$$

$$v_3 = 79.5 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m^3/kg} \equiv v_2$$

A titolo di completezza, si può ricavare il valore di p_2. Per una trasformazione isocora

$$\frac{T}{p} = \mathrm{cost}, \qquad \text{cioè}$$

$$p_2 = p_3 \frac{T_2}{T_3} = 21.5 \cdot \frac{304.8}{657.8} = 9.96\ \mathrm{bar} = 996\ \mathrm{kPa}$$

b) $$Q_{12} = L_{12} = RT_1 \ln\frac{v_2}{v_1} = 259.8 \cdot 304.8 \cdot \ln\left(\frac{79.5 \cdot 10^{-3}}{0.88}\right)$$

$$Q_{12} = -190.4\ \mathrm{kJ/kg}$$

$$Q_{23} = u_3 - u_2 = c_v\,(T_3 - T_2) = \frac{R}{k-1}(T_3 - T_2)$$

$$Q_{23} = \frac{259.8}{1.4-1}(657.8 - 304.8)$$

$$Q_{23} = 229.3\ \mathrm{kJ/kg}$$

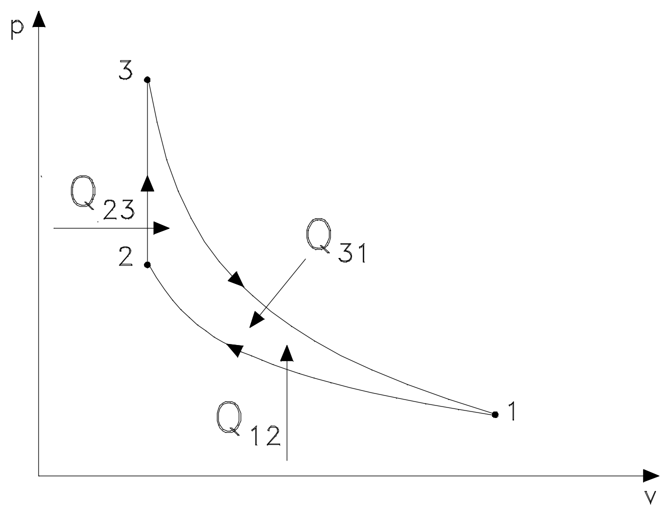
Lungo la trasformazione politropica, trattandosi di gas ideale:

$$Q_{31} = c_v \frac{k-n}{1-n}(T_1 - T_3) = \frac{R}{k-1} \cdot \frac{k-n}{1-n}(T_1 - T_3)$$

$$Q_{31} = \frac{259.8}{1.4-1} \cdot \frac{1.4-1.32}{1-1.32}(304.8 - 657.8)$$

$$Q_{31} = 57.3\ \mathrm{kJ/kg}$$

Quindi lo schema è il seguente:



c) Il lavoro ottenuto per unità di massa vale pertanto (I^o principio)

$$L = Q_{12} + Q_{23} + Q_{31} = -190.4 + 229.3 + 57.3$$
$$L = 96.2 \text{ kJ/kg}$$

Pertanto il rendimento di I^o principio vale:

$$h = \frac{L}{Q_{23} + Q_{31}} = \frac{96.2}{229.3 + 57.3} = 0.336$$

d)
$$L_{12} = Q_{12} = -190.4 \text{ kJ/kg}$$
$$L_{23} = 0 \quad \text{(Considerando S.C.)}$$
$$L_{31} = \int_3^1 p\,dv = c_v \cdot \frac{k-1}{1-n} \cdot (T_1 - T_3) = R \cdot \frac{1}{1-n} \cdot (T_1 - T_3)$$
$$L_{31} = 259.8 \cdot \frac{1}{1-1.32} (304.8 - 657.8)$$
$$L_{31} = 286.6 \ \text{kJ}/\text{kg}$$

Naturalmente è

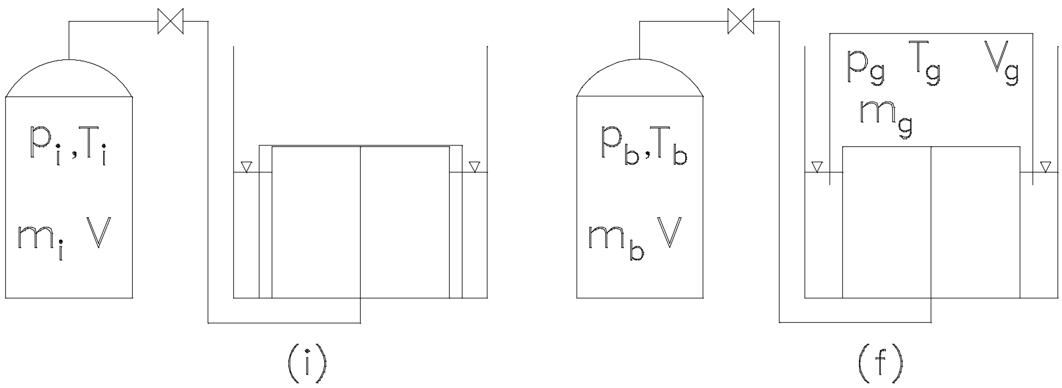
$$L = L_{12} + L_{23} + L_{31} = -190.4 + 286.6 = 92.6 \ \text{kJ}/\text{kg}$$

Esercizio 2

Un gasometro (contenitore a pressione costante e volume variabile), inizialmente vuoto, viene alimentato da una bombola, attraverso un rubinetto riduttore di pressione, con gas elio. L'elio si può considerare, in questo processo, come gas ideale a calori specifici costanti, con k = 1.665 e massa molecolare M = 4.003 kg/kmol. La bombola ha volume V = 0.7 m^3 ed all'inizio del processo contiene gas alla pressione p= 80 ata e temperatura t = 27^{o}C. Alla fine del processo, che può considerarsi ovunque adiabatico, la pressione del gas nella bombola e nel gasometro è p = 1 ata (pari alla pressione atmosferica esterna).

Valutare, considerando quasi-statica l'espansione del gas residuo nella bombola:

1. La massa m_g di gas fluita nel gasometro;
2. La temperatura t_g del gas nel gasometro alla fine del processo (ad equilibrio raggiunto).



1. Il sistema bombola + gasometro costituisce un sistema chiuso (deformabile) adiabatico, pertanto:

$$U_f - U_i = -\hat{L}_{if}$$

Il lavoro è fornito contro la pressione atmosferica (costante) per cui, indicando con g la condizioni finali del gasometro e con b quelle della bombola:

$$\hat{L}_{if} = p_a \cdot V_g = p_g \cdot V_g$$

Inoltre:

$$U_i = m_i \cdot c_{V\,i} \cdot T_i$$

$$U_f = m_b \cdot c_V \cdot T_b + m_g \cdot c_V \cdot T_g \qquad \text{con} \quad m_i = m_b + m_g$$

$$R = \frac{\overline{R}}{M} = \frac{8314}{4.003} = 2077 \ \mathrm{J/kg\,K}$$

La massa iniziale di elio presente nella bombola è:

$$m_i = \frac{p_i\ V_i}{R\ T_i} = \frac{80 \cdot 98066.5 \cdot 0.7}{2077 \cdot 300} = 8.814\ \mathrm{kg}$$

Poiché il processo di espansione del gas residuo nella bombola è adiabatico e quasi-statico:

$$T_i\ p_i^{\frac{1-k}{k}} = T_b\ p_b^{\frac{1-k}{k}}$$

$$T_b = T_i \left(\frac{p_i}{p_b}\right)^{\frac{1-k}{k}} = 300 \cdot 80^{\frac{1-1.665}{1.665}} = 52.12\ \mathrm{K} = -221\ {}^{o}\mathrm{C}$$

La massa di elio residuo nella bombola:

$$m_b = \frac{p_b \cdot V_b}{R \cdot T_b} = \frac{98066.5 \cdot 0.7}{2077 \cdot 52.12} = 0.634\ \mathrm{kg}$$

Quindi la massa di gas m_g fluita nel gasometro vale:

$$m_g = m_i - m_b = 8.814 - 0.634 = 8.18\ \mathrm{kg}$$

2. $$\hat{L}_{if} = p_g\ V_g = m_g\, R\, T_g$$

$$-\hat{L}_{if} = U_f - U_i$$

$$-m_g\, R\, T_g = \left(m_b \cdot c_V \cdot T_b + m_g \cdot c_V \cdot T_g\right) - m_i \cdot c_V \cdot T_i$$

$$-m_g\, R\, T_g = m_b \frac{R}{k-1} T_b + m_g \frac{R}{k-1} T_g - m_i \frac{R}{k-1} T_i$$

$$m_g\left(1 + \frac{1}{k-1}\right) T_g = -m_b \frac{1}{k-1} T_b + m_i \frac{1}{k-1} T_i$$

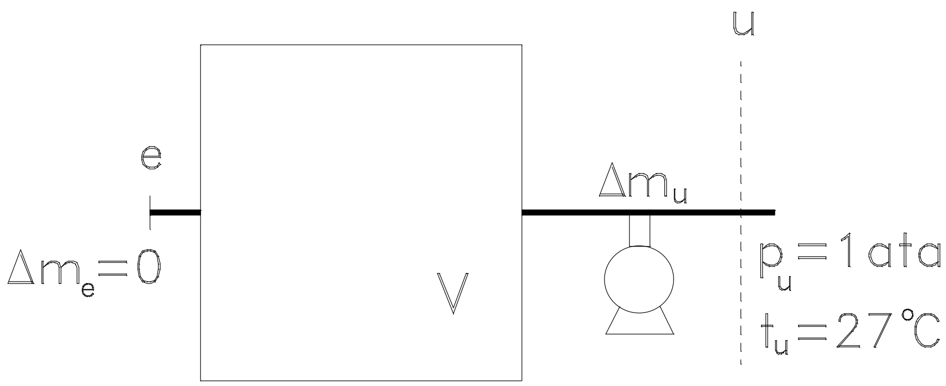
$$T_g = \frac{-m_b \frac{1}{k-1} T_b + m_i \frac{1}{k-1} T_i}{m_g\left(1 + \frac{1}{k-1}\right)} = \frac{-\frac{0.634}{0.665}\, 52.12 + \frac{8.814}{0.665}\, 300}{8.18\left(1 + \frac{1}{0.665}\right)}$$

$$T_g = 191.7\ \text{K} = 81.5\ {}^{o}\text{C}$$

Esercizio 3

Si abbia un serbatoio a pareti rigide di volume $V = 1\ m^3$ contenente aria, considerata gas ideale a calori specifici caratteristici costanti con k = 1.4 e M = 28.97 kg/k mol, in equilibrio con l'ambiente a p_i = 1 ata e t_i = 27 ^{o}C. Mediante un compressore si crei un vuoto del 50% (riducendo la pressione interna a p_f = 0.5 ata).

Trovare il lavoro $\hat{L}_c$ necessario per effettuare questa operazione, considerando tutte le trasformazioni coinvolte adiabatiche quasi statiche.



$$R = \frac{\overline{R}}{M} = \frac{8314}{28.97} = 287\ \text{J}/\text{kg K}$$

Dallo schema, si vede che il sistema in esame costituisce un sistema aperto in regime non stazionario.

Applicando il bilancio dell'energia per un sistema aperto ed osservando che:

- Possono venire trascurati i termini cinetici e potenziali, sia nelle sezioni di ingresso/uscita, che nell'espressione dell'energia globale contenuta nel sistema aperto;
- La massa entrante è nulla;
- Il processo è adiabatico,

si ottiene:

$$U_f - U_i = -\hat{L}_{if} - \Delta m_u \cdot h_u$$

da cui:

$$\hat{L}_{if} = U_i - U_f - \Delta m_u \cdot h_u = m_i \cdot u_i - m_f \cdot u_f - (m_i - m_f) c_p\, T_i$$

e le condizioni i ed u, rispettivamente iniziali e di uscita, coincidono con le condizioni ambiente.

$$\hat{L}_{if} = m_i\, c_v\, T_i - m_f\, c_v\, T_f - (m_i - m_f) c_p\, T_i$$

$$\hat{L}_{if} = m_i \frac{R}{k-1} T_i - m_f \frac{R}{k-1} T_f - (m_i - m_f) \frac{k\,R}{k-1} T_i$$

È ora necessario valutare m_i, m_f eT_f.

- Calcolo di m_i

$$m_i = \frac{p_i\ V_i}{R \cdot T_i} = \frac{98066.5 \cdot 1}{287 \cdot 300} = 1.14\ \text{kg}$$

- Calcolo di T_f considerando il processo adiabatico reversibile da i ad f:

$$T_i \cdot p_i^{\frac{1-k}{k}} = T_f \cdot p_f^{\frac{1-k}{k}}$$

$$T_f = T_i \left(\frac{p_i}{p_f}\right)^{\frac{1-k}{k}} = 300 \cdot 2^{\frac{1-1.4}{1.4}}$$

T_f = 246.1 K

- Calcolo di m_f:

$$m_f = \frac{p_f\ V_f}{R \cdot T_f} = \frac{0.5 \cdot 98066.5 \cdot 1}{287 \cdot 246.1} = 0.694\ \text{kg}$$

Il lavoro è quindi dato da:

$$\hat{L}_{if} = \hat{L}_c = 1.14 \cdot \frac{287}{0.4} \cdot 300 - 0.694 \cdot \frac{287}{0.4} \cdot 246.1 - (1.14 - 0.694) \cdot \frac{1.4 \cdot 287}{0.4} \cdot 300$$

$$\hat{L}_{if} = \hat{L}_c = -11.56\ \text{kJ}$$

Esercizio 4

Si consideri un compressore monostadio alternativo a semplice effetto, che operi con aria (gas ideale: k = 1.4 cost e M = 28.97 kg/k mol), con le seguenti caratteristiche:

- Diametro — d = 12.7 cm
- Corsa — c = 11.4 cm
- Volume nocivo — V_n = 73.7 cm^3
- Pressione di aspirazione — p_e = 0.99 bar
- Temperatura di aspirazione — t_e = 18°C
- Pressione di mandata — p_u = 5.21 bar
- Velocità di rotazione — n_g = 105 giri/minuto

Inoltre, si supponga che le compressioni e le espansioni siano delle politropiche con n = 1.32

Calcolare la portata d'aria e la potenza teorica di compressione.

$$R = \frac{\bar{R}}{M} = \frac{8314}{28.97} = 287\ \text{J/kg K}$$

Il volume generato è dato da:

$$V_g = \frac{\pi\ d^2}{4} \cdot c = \frac{\pi \left(12.7 \cdot 10^{-2}\right)^2}{4} \cdot 11.4 \cdot 10^{-2} = 1.44 \cdot 10^{-3}\ m^3$$

Il volume aspirato è dato da:

$$V_a = V_g + V_n - V_4 = V_g + V_n - V_n \left(\frac{p_u}{p_e}\right)^{\frac{1}{n}}$$

$$V_a = V_g + V_n\left[1-\left(\frac{p_u}{p_e}\right)^{\frac{1}{n}}\right] = 1.44\cdot 10^{-3} + 73.7\cdot 10^{-6}\left[1-\left(\frac{5.21}{0.99}\right)^{\frac{1}{1.32}}\right]$$

$$V_a = 1.254 \cdot 10^{-3} \quad m^3$$

La portata in massa è data da:

$$\dot{m} = \frac{V_a}{v_c}\cdot\frac{n_g}{60}$$

ed il volume specifico dell'aria nelle condizioni di aspirazione è dato da:

$$v_c = \frac{R\,T_e}{p_e} = \frac{287\cdot(273.15+18)}{0.99\cdot 10^5} = 0.844\ m^3/kg$$

Quindi:

$$\dot{m} = \frac{1.254\cdot 10^{-3}}{0.844}\cdot\frac{105}{60} = 2.6\cdot 10^{-3}\ kg/s$$

La potenza teorica è data da:

$$P = \dot{m}\left|L'_{12}\right| = \dot{m}\cdot\frac{n}{n-1}\,p_e\,v_e\left[1-\left(\frac{p_u}{p_e}\right)^{\frac{n-1}{n}}\right]$$

$$P = 2.6\cdot 10^{-3}\cdot\frac{1.32}{0.32}\cdot 0.99\cdot 10^5\cdot 0.844\cdot\left[1-\left(\frac{5.21}{0.99}\right)^{\frac{0.32}{1.32}}\right]$$

$$P = 444 \quad W$$