Integrazione 1-2

EM

March 13, 2020

In questo capitolo, definiamo l'integrale di funzioni a valori reali su uno spazio di misura arbitrario e ricaviamo alcune delle sue proprietà di base. Ci riferiamo a questo integrale come integrale di Lebesgue, indipendentemente dal fatto che il dominio delle funzioni sia o meno un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ dotato della misura di Lebesgue. L'integrale di Lebesgue si applica a una classe di funzioni molto pi ampia rispetto all'integrale di Riemann. Una caratteristica dell'integrale di Lebesgue è che si comporta meglio (rispetto all'integrale di Riemann) relativamente alla convergenza puntuale. La definizione dell'integrale avviene in tre fasi: prima per funzioni semplici positive, poi per funzioni misurabili positive, e infine per funzioni misurabili estese.

4.1 Funzioni semplici
Sia (X, A, μ) uno spazio mensurale (o di misura).

Definizione 4.1 Se $\phi : X \to [0, +\infty)$ è una funzione semplice e positiva[1]

data da,

$$\phi = \sum_{i=1}^{N} c_i \chi_{E_i}$$

dove $c_i \geq 0$ e $E_i \in A$. L'integrale di Φ è definito da,

$$\int \phi d\mu = \sum_{i=1}^{N} c_i \mu(E_i). \tag{1}$$

In (1), usiamo la convenzione che se $c_i = 0$ e $\mu(E_i) = \infty$ allora $0.\infty = 0$, intendendo che l'integrale di 0 su un insieme di misura ∞ è uguale a zero.
L'integrale può essere ∞ (se $c_i > 0$ e $\mu(E_i) = \infty$ per qualche $i = 1 \ldots n$. Si può verificare facilmente che l'integrale in (1) è indipendente dalla rappresentazione della

[1] In queste lezioni il termine funzione positiva sta ad indicare una funzione non negativa salvo esplicito avviso.

funzione semplice Φ come combinazione lineare delle funzioni caratteristiche χ_{E_i}.

Esempio 1. La funzione caratteristica

$$\chi_{\mathbb{Q}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$

dei numeri razionali non è integrabile secondo Riemann su ogni intervallo compatto di lunghezza non nulla. Tuttavia la stessa funzione è integrabile secondo Lebesgue e,

$$\int \chi_{\mathbb{Q}} d\mu = 1 \times \mu(\mathbb{Q}) = 0.$$

L'integrale su funzioni semplici possiede le usuali proprietà dell'integrale studiato nei corsi elementari. In particolare è lineare, positivo e monotono.

Proposizione 1. Siano $\phi, \psi : X \to [0, +\infty)$ funzioni semplici positive su X, allora

$$\int k\,\phi\,d\mu = k \int \phi\,d\mu \quad \text{per ogni } k \in [0, +\infty],$$

$$\int (\phi + \psi)\,d\mu = \int \phi\,d\mu + \int \psi\,d\mu,$$

$$0 \leq \phi \leq \psi \Rightarrow 0 \leq \int \phi\,d\mu \leq \int \psi\,d\mu.$$

Dimostrazione. La dimostrazione segue immediatamente dalla definizione di integrale.

Funzioni positive (non negative)

Definiamo ora l'integrale di una funzione misurabile decomponendola nella sua parte positiva e negativa. Cominciamo con la definizione dell'integrale di una funzione misurabile e positiva (non negativa).

Definizione 2. Sia $f : X \to [0, +\infty]$ una funzione misurabile su X, allora

$$\int f\,d\mu = \sup\{\int \phi\,d\mu : 0 \leq \phi \leq \psi \quad \text{semplici}\}.$$

Una funzione positiva f si dice **integrabile** se è misurabile e

$$\int f\,d\mu < \infty.$$

Nota importante In questa definizione, approssimiamo la funzione f dal di sotto con funzioni semplici. In contrasto con quello che succede con la definizione dell'integrale di Riemann, non è necessario approssimare una funzione misurabile dal di sotto e dal di sopra per definire l'integrale.

Se $A \subset X$ è un insieme misurabile ed $f : X \to [0, +\infty]$ una funzione misurabile, definiamo l'integrale di f su A come,

$$\int_A f \, d\mu = \int f \, \chi_A \, d\mu.$$

Nota importante In contrasto con quello che succede per l'integrale di Riemann, dove la definizione di integrale su insiemi che non sono rettangoli in $\mathbb{R}^2$ presenta dei problemi, è molto facile definire l'integrale di Lebesgue su sottoinsiemi misurabili arbitrari di un insieme su cui è già definito. Le seguenti propriet sono una conseguenza immediata della definizione e delle proprietà corrispondenti delle funzioni semplici.

Proposizione 2. Siano $f, g : X \to [0, +\infty]$ funzioni misurabili e positive su X, allora

$$\int k \, f \, d\mu = k \int f \, d\mu \quad \text{per ogni } k \in [0, +\infty],$$

$$0 \leq f \ \leq g \Rightarrow 0 \leq \int f \, d\mu \leq \int g \, d\mu.$$

Nota importante L'integrale su funzioni misurabili è lineare ma questo non è immediatamente ovvio come nel caso di funzioni semplici,
la linearità dipende dalla proprietà di misurabilità. Per dimostrare la linearità dell'integrale dimostreremo preliminarmente il teorema fondamentale di convergenza monotona detto anche teorema di Beppo Levi.

Teorema 1 (Convergenza monotona - Beppo Levi) Sia $(f_n) : X \to [0, \infty]$ una successione crescente di funzioni misurabili positive

$$0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \ldots \leq f_n \leq f_{n+1} \leq \ldots$$ [2]

con

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x).$$ [3]

Allora,

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu = \int f \, d\mu. \quad (BL)$$

[2] Questo significa che per ogni $x \in X$ si ha $0 \leq f_1(x) \leq f_2(x) \leq \ldots \leq f_n(x) \leq f_{n+1}(x) \leq \ldots$

[3] Notiamo che la possibilità $f(x) = +\infty$ è ammessa.

Osservazione interessante. Notiamo che il teorema di Beppo Levi vale anche se l'ipotesi di convergenza puntuale della successione (f_n) per ogni $x \in X$ viene sostituita dalla convergenza *quasi ovunque.* Cioè

$$f_n \nearrow f \qquad q.o.$$

Infatti, se indichiamo con C l'insieme dove si ha la convergenza, allora $\mu(C^c) = 0$. Sia

$$g_n = \chi_C \, f_n$$

e

$$g = \chi_C \, f.$$

Allora

$$g_n \nearrow g \qquad \text{per ogni} \quad x \in X,$$

e allora possiamo applicare (BL) a g_n e g. Poichè

$$\int g_n \, d\mu = \int f_n \, d\mu$$

e

$$\int g \, d\mu = \int f \, d\mu$$

il teorema vale per f_n ed f.

Dimostrazione. Ovviamente il limite puntuale f esiste poichè la successione (f_n) è crescente. Inoltre, per la monotonia dell'integrale, la successione degli integrali è crescente,

$$0 \leq f_n \, d\mu \leq \int f_{n+1} \, d\mu \leq \int f \, d\mu$$

e allora,

$$\lim_{n\to\infty} f_n \, d\mu \leq \int f \, d\mu.$$

Per completare la dimostrazione ci resta da dimostrare che

$$\lim_{n\to\infty} f_n \, d\mu \geq \int f \, d\mu.$$

Sia $\phi : X \to [0, \infty)$ una funzione semplice con $0 \leq \phi \leq f$. Sia $0 < t < 1$. Allora

$$A_n = \{x \in X : f_n(x) \geq t\phi(x)\},$$

è una successione crescente di insiemi misurabili

$$A_1 \subset A_2 \subset \ldots A_n \subset \ldots$$

tale che

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = X. \quad ^4$$

Conseguentemente,

$$\int f_n \, d\mu \geq \int_{A_n} f_n \, d\mu \geq t \int_{A_n} \phi \, d\mu. \quad (C)$$

In particolare, se

$$\phi = \sum_{i=1}^{N} c_i \chi_{E_i},$$

dalla proprietà di monotonia di $\mu \quad (M)$ [5] si ha che,

$$\int_{A_n} \phi \, d\mu = \sum_{i=1}^{N} c_i \mu(E_i \bigcap A_n) \to \sum_{i=1}^{N} c_i \mu(E_i) = \int \phi \, d\mu.$$

Passando al limite per n$\to \infty$ in (C) otteniamo,

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu \geq t \int \phi \, d\mu.$$

Poichè $0 < t < 1$ è arbitrario, concludiamo che

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu \geq \int \phi \, d\mu.$$

Infine, tenendo conto che ϕ è un'arbitraria funzione semplice tale che $\phi \leq f$, otteniamo

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu \geq \sup_{\phi} \int \phi \, d\mu = \int f \, d\mu.$$

Questo completa la dimostrazione.

[4] Infatti, è ovvio che $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \subset X$. Proviamo che $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \supseteq X$. Ora, se $x \in X$ dimostriamo che $x \in A_n$ per qualche $n \in \mathbb{N}$. Infatti se $x \in X$ e $f(x) = 0$ allora, poiché $0 \leq \phi \leq f$ si ha $\phi(x) = 0$ Dal fatto che $0 \leq f_n \leq f$ segue che $f_n(x) = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. questo implica che $f_n(x) = 0 = t\phi(x)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Allora $x \in A_n$, per ogni $n \in \mathbb{N}$. D'altra parte se $f(x) > 0$, allora poichè $0 \leq \phi \leq f$ si ha $t\phi(x) < f(x)$ perchè $0 < t < 1$. Poichè $f_n \nearrow f$, esiste $N(x) \in \mathbb{N}$ tale che $f_{N(x)}(x) \geq t\,\phi(x)$. Quindi $x \in A_{N(x)}$. Allora, $X \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$.

[5] Se (A_n) è una successione crescente di insiemi misurabili cioè per ogni $n : A_n \subset A_{n+1}$ allora $\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \lim_{i\to\infty} \mu(A_i)$.

Considerazione importante. Il teorema di Beppo Levi implica in particolare che possiamo calcolare l'integrale di una funzione positiva e misurabile come limite di una successione crescente di integrali di funzioni semplici. Quindi non solo come estremo superiore di integrali di funzioni semplici dominati da f. E' ben noto che data una funzione misurabile positiva, esiste sempre una successione crescente di funzioni semplici che converge ad f.

Applicazione importante.

Teorema. Sia $f_n : X \to [0, \infty]$ misurabile per $n = 1, 2 \dots$. Sia

$$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \qquad x \in X,$$

allora,

$$\int_X f \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n(x) \, d\mu.$$

La dimostrazione è lasciata per esercizio. È una conseguenza immediata del teorema di Beppo Levi.

Proposizione 3. (Linearità dell'integrale) Siano $f, g : X \to [0, +\infty]$ funzioni misurabili e positive su X, allora

$$\int (f+g) \, d\mu = \int f \, d\mu + \int g \, d\mu \quad .$$

Dimostrazione. Siano (ϕ_n) e (ψ_n) due successioni crescenti di funzioni semplici e tali che $\phi_n \to f$ e $\psi_n \to g$. Allora, $(\phi_n + \psi_n)$ è una successione crescente di funzioni semplici e positive tale che $\phi_n + \psi_n \to f + g$.
Dal teorema di Beppo Levi e dalla linearità dell'integrale sulle funzioni semplici segue che,

$$\int (f+g) \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int (\phi_n + \psi_n) \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \left(\int \phi_n \, d\mu + \int \psi_n \, d\mu \right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int \phi_n + \lim_{n\to\infty} \int \psi_n \, d\mu = \int f \, d\mu + \int g d\mu.$$