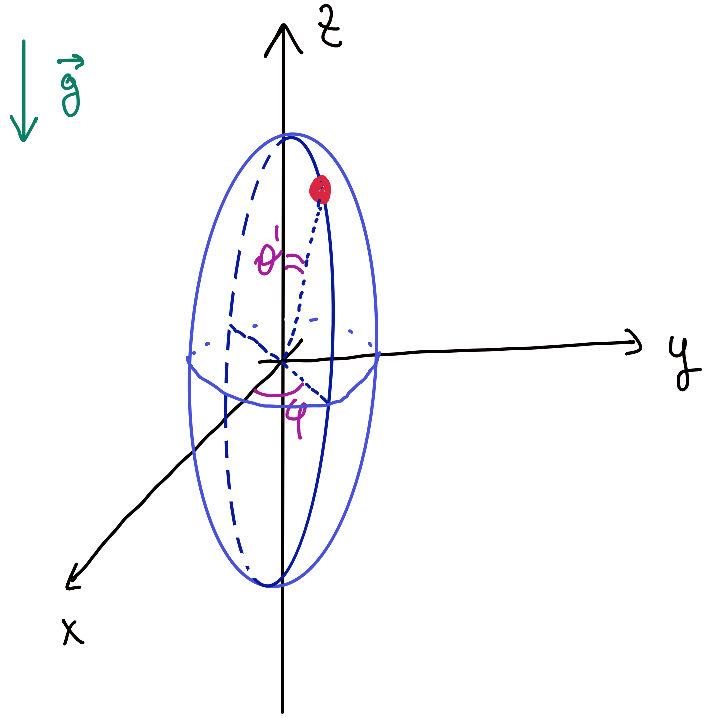
Esame di Introduzione alla Fisica Teorica — 13.07.2020

Laurea triennale in Fisica, UniTS, a.a. 2019/2020

Esercizio



Un punto materiale di massa m è vincolato a giacere su un elissoide di rotazione, come in figura. Lo spazio delle configurazioni è parametrizzato da

$$x = a \sin\vartheta \cos\varphi\,, \qquad y = a \sin\vartheta \sin\varphi\,, \qquad z = b \cos\vartheta \tag{1}$$

dove a e b sono i semiassi dell'ellisse (l'angolo ϑ' in figura è legato alla coordinata ϑ dalla relazione $\tan\vartheta' = \frac{b}{a}\tan\vartheta$). Sul sistema agisce la forza di gravità.

1. Si trovi la Lagrangiana L del sistema in funzione delle coordinate libere φ, ϑ e si scriva la matrice cinetica [2pt].

2. Si dia la definizione di coordinata ciclica e si dimostri che la sua presenza implica una costante del moto. [1pt]

3. Qual è la coordinata ciclica nel sistema in questione? Si scriva il corrispondente integrale del moto e si trovi la Lagrangiana ridotta. [1,5pt]

4. Si scrivano le equazioni di Lagrange equivalenti alle equazioni di Newton, per un sistema meccanico a n gradi di libertà. Si dica quando esse possono essere scritte tramite una Lagrangiana e dimostrarlo. [1pt]

5. Si trovi l'equazione di Lagrange del sistema ridotto. [1pt]

6. Si scriva il potenziale efficace. Si dimostri che esso ammette un punto di equilibrio stabile per un valore $\vartheta^* \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$. [Suggerimento: si mostri che $V_{\text{eff}}(\vartheta) = f(\cos\vartheta)$, si definisca $\xi \equiv \cos\vartheta$ e si studi la funzione $f(\xi)$, giustificando perché questo procedimento da informazioni su massimi e minimi di $V_{\text{eff}}(\vartheta)$.] [1,5pt]

7. Si prenda il valore della costante del moto in modo che il corrispondente insieme di livello contenga la traiettoria con condizione iniziale $\dot{\varphi}(t = 0) = 0$. Per questo valore, si trovi il punto di equilibrio stabile e si linearizzi la Lagrangiana ridotta attorno a tale punto, trovando la frequenza delle piccole oscillazioni. [2pt]

[Lo scritto viene superato con un punteggio di almeno $\frac{6}{10}$.]