Lezione 2

Predicati, quantificatori

Predicato: dipende da una o più variabili

es. $p(x)$ "l'astronomo x osserva la luna"

es. $q(x,y)$ "l'astronomo x osserva la stella y"

es. $r(x,y,z)$ "il viaggiatore x conosce y e non conosce z"

la località — la località

- le variabili di un predicato variano in un ambiente predefinito
- predicati diventano proposizioni quando le variabili prendono un valore negli ambienti di cui sopra.

es. L'astronomo Gianluca osserva la luna

Quantificatori

quantificatore universale   Simbolo $\forall$ si legge "per ogni"

$\forall x, p(x)$ tutti gli astronomi osservano la luna

quantificatore esistenziale

x è sparita $\rightarrow$ ($\exists x : p(x)$ c'è almeno un astronomo che osserva la luna)

x è sparita $\rightarrow$ ($\forall x, p(x,y)$ ogni astronomo osserva la stella y

y è sparita $\rightarrow$ ($\exists y : p(x,y)$ l'astronomo x osserva almeno una stella

x e y è sparita $\rightarrow$ ($\forall x, \exists y : p(x,y)$ ogni astronomo osserva almeno una stella

Come si fa negazione di un predicato con un quantificatore? ③

$$\neg\left(\forall x,\ p(x)\right) \iff \exists x:\ \neg p(x)$$

$$\neg\left(\exists x,\ p(x)\right) \iff \forall x,\ \neg p(x)$$

es. non è vero che ogni astronomo osserva la luna
cioè c'è almeno un astronomo che non osserva la luna

es. non è vero che c'è un astronomo che osserva tutte le stelle

$$\neg\left(\exists x:\ \forall y,\ q(x,y)\right)$$

(per ogni astronomo c'è almeno una stella che non viene da lui osservata)

$$\neg\left(\exists x:\ \left(\forall y,\ q(x,y)\right)\right) \qquad \forall x,\ \neg\left(\forall y,\ q(x,y)\right)$$

$$\forall x,\ \exists y:\ \neg q(x,y)$$

ogni astronomo non osserva almeno una stella

Insiemi:

Indichiamo gli elementi con lettere minuscole
a, b, c

Indichiamo gli insiemi con lettere maiuscole
A, B, C

Per dire che un elemento a appartiene a un insieme A
scriviamo

$$a \in A$$ si legge "a appartiene a A".

Oss. Gli insiemi sono caratterizzati dagli elementi che contengono (e basta, non conta l'ordine con cui gli elementi sono messi dentro)

def. Siano A, B insiemi.
A si dice <u>sottoinsieme</u> di B se ogni elemento di A

è elemento di B

scriviamo $A \subseteq B$ (si legge "A è contenuto in B" ovvero "A è sottoinsieme di B")

$$\left(\forall x,\ x \in A \Rightarrow x \in B\right) \Longleftrightarrow A \subseteq B$$

di conseguenza

def. A, B insiemi

$$A = B \text{ se } (A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)$$

così $A = B \Longleftrightarrow \forall x,\ (x \in A \Rightarrow x \in B) \wedge (x \in B \Rightarrow x \in A)$

def. chiamiamo insieme vuoto un insieme che non ha elementi
(in sostanza stiamo postulando l'esistenza di questo strano insieme)

oss. Poiché gli insiemi sono caratterizzati dagli elementi dati due insiemi senza elementi, essi saranno uno dentro l'altro, e quindi uguali

conclusione: l'insieme vuoto è unico ed è un sottoinsieme di qualunque altro insieme

def. sia A un insieme; l'insieme dei suoi sottoinsiemi è un insieme che chiamiamo insieme delle parti

lo indico con $\mathcal{P}(A)$

<u>Es</u> $A = \{a, b, c\}$

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\}$$

Es

	A	$\mathcal{P}A$	
0 elementi →	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	← 1 elemento
1 elemento →	$\{a\}$	$\{\emptyset, \{a\}\}$	← 2 elementi
2 elementi	$\{a,b\}$	$\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$	← 4 elementi
Congettura:	n elementi	2^n elementi	

Supponiamo di sapere che

se ho un insieme A con n elementi
allora l'insieme $\mathcal{P}(A)$ ha 2^n elementi

questo lo so per tutti gli insiemi con n elementi

Ora prendo un insieme B con $n+1$ elementi
e cerco di contare gli elementi di $\mathcal{P}(B)$

$$B = A \cup \{a^*\}$$

n elementi

I sottoinsiemi di B sono di 2 tipi

a) contengono a^*

b) non contengono a^*

9

a) sono i sottoinsiemi di A quindi sono k | ← per esempio qui c'è $\emptyset$

b) sono i sottoinsiemi di A a cui si aggiunge a^*) per esempio qui non ci può essere $\emptyset$

quindi sono altri k

(oss. non ce ne sono altri perché un sottoinsieme di B o non contiene a^* allora siamo nel caso a) oppure contiene a^* allora siamo nel caso b))

quindi sono 2k

conclusione: se passo da n a n+1 raddoppio i sottoinsiemi siccome partivo da 1 sottoinsieme nel caso di $\emptyset$ (10)

ottengo $1, \ 2, \ 2 \cdot 2, \ 2 \cdot 2 \cdot 2, \ \ldots, \ 2^n, \ \ldots$