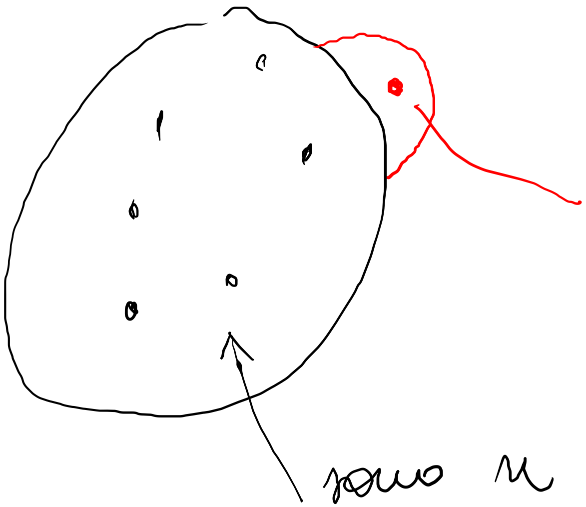
Lezione 3



Problema: conta i sott. dell'insieme nero + rosso

= sottoinsiemi di quello nero (sono k)
+ quelli che contengono l'el. rosso

li ottengo prendendo quelli di prima (k) e aggiungo l'elemento rosso: sono k li rimetto ancora e ottengo $2k$

partivo da 1 (per 0 elementi)
raddoppio a ogni passo
al passo n ho quindi 2^n.

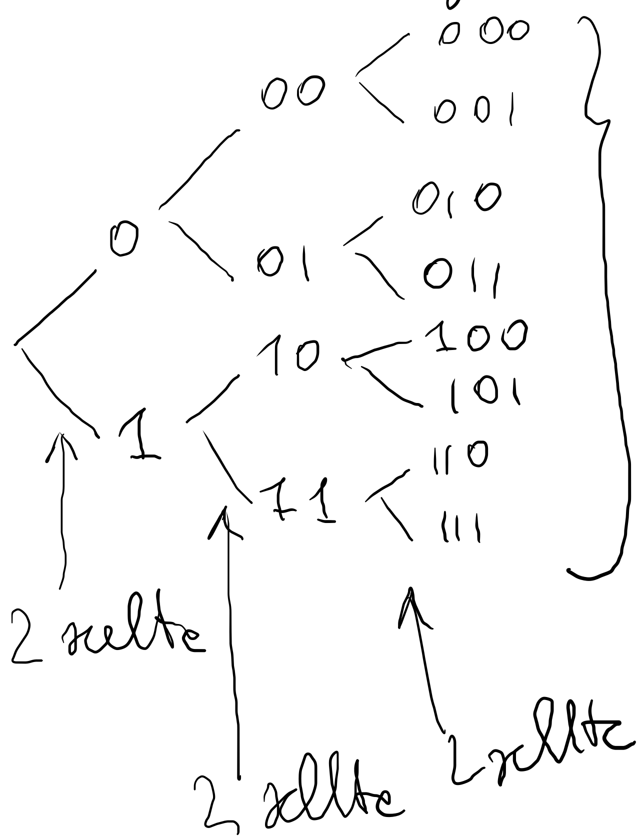
---

modo alternativo per contare i sottoinsiemi
di un insieme con n elementi

0	1	0	0	1	1	0	0
1	2	3	4	5	6	7	8

$\longrightarrow \{2, 5, 6\}$

conto le stringhe (vettori) di 0 e 1 lunghe n



$2 \times 2 \times 2$ scelte

n bit n scelte
cioè 2^n

Insiemi

$$A = \{\underbrace{a, b, c, d}_{\text{elementi}}\} \qquad a \in A$$

insieme — elementi — appartiene

rappresentazione estensiva

si possono usare i predicati

rappresentazione estensiva

$$A = \{x \in U : p(x)\}$$

è l'insieme degli elementi di un certo insieme U di riferimento (l'insieme "universo") che godono della proprietà $p(x)$ cioè $p(x)$ è vera

Operazioni sugli insiemi

def. sia A insieme $(A \subseteq U)$

$$\overline{A}^{U} = \{x \in U : \underbrace{x \notin A}_{\neg(x \in A)}\}$$

$$= \complement_U A$$

complementare di A

in particolare $\complement_U U = \emptyset$, $\complement_U \emptyset = U$

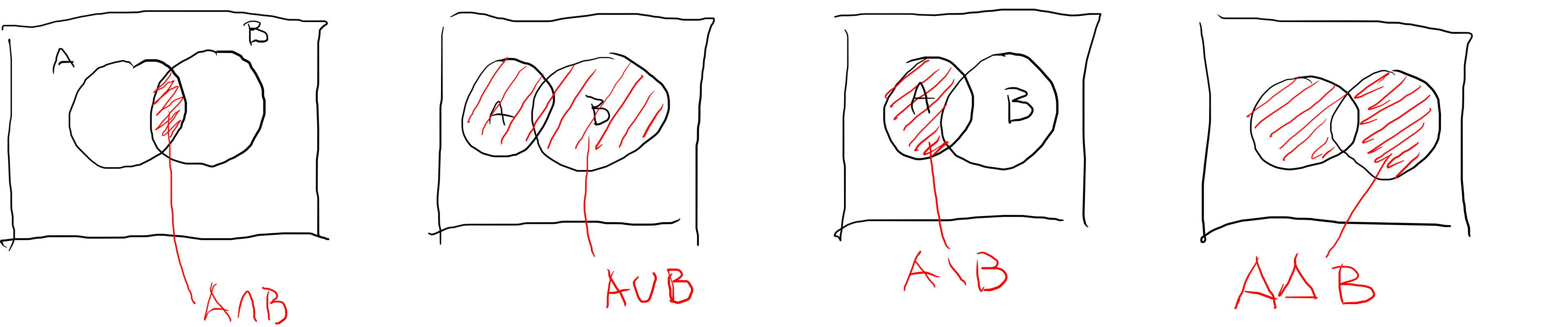
def A, B insiemi $\left(A, B \subseteq U \text{ cioè } A, B \in \mathcal{P}(U)\right)$

$$A \cap B = \{x \in U : x \in A \wedge x \in B\}$$ intersezione

$$A \cup B = \{x \in U : x \in A \vee x \in B\}$$ unione

$$A \setminus B = \{x \in U : x \in A \wedge x \notin B\}$$ differenza

$$A \triangle B = \{x \in U : ((x \in A) \wedge (x \notin B)) \vee ((x \in B) \wedge (x \notin A))\}$$ differenza simmetrica



alcune proprietà'

$A \cap \emptyset = \emptyset$ $\qquad$ $A \cup \emptyset = A$

$A \cap \overline{U} = A$ $\qquad$ $A \cup \overline{U} = \overline{U}$

$A \cap A = A$ $\qquad$ $A \cup A = A$

$A \cap B = B \cap A$ $\qquad$ $A \cup B = B \cup A$ $\qquad$ commutativa

$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ $\qquad$ $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

associativa

$$\left.\begin{array}{l} A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \\ A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \end{array}\right\} \text{ distributiva}$$

coppie ordinate (n-uple ordinate) e prodotto cartesiano

A, B insiemi

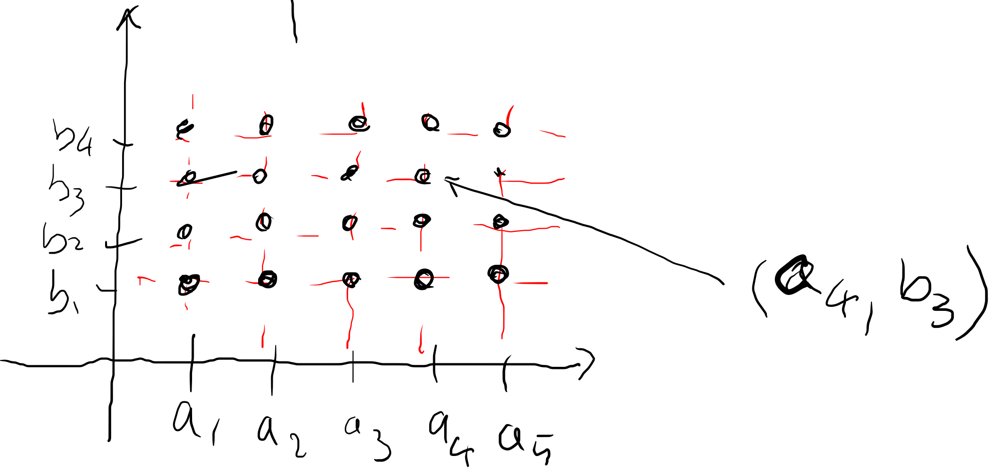
una coppia ordinata (con primo elemento in A e secondo in B)

(a, b) ← conta l'ordine (attenzione $(a,b) \neq \{a, b\}$)

($(a,b) = \{\{a,b\}, a\}$ ma è un po' troppo pesante pensarla così)

$$A \times B = \{ (a,b) : a \in A, \ b \in B \}$$

prodotto cartesiano di A e B



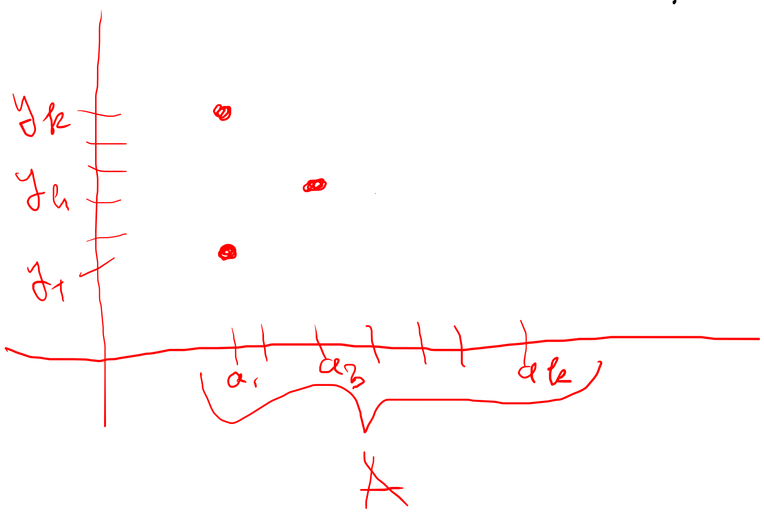
- <u>Relazioni tra 2 insiemi</u>

A, B insiemi e considero un predicato con 2 variabili di cui la prima varia in A la seconda in B : lo chiamiamo relazione tra i 2 insiemi es. A = insieme degli astronomi

B = stelle

$p(x,y)$ = l'astronomo x osserva la stella y

lo scriverò $x \rho y$ la relazione è ρ

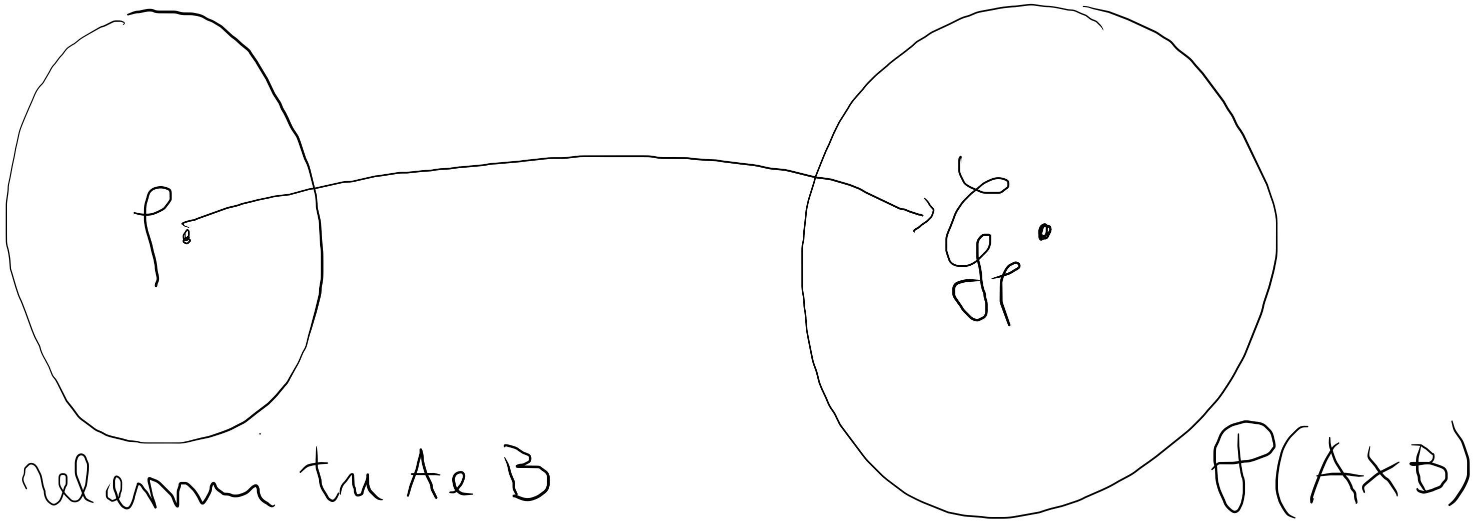


chiamo grafico di ρ rho

$$G_\rho = \{ (x,y) \in A \times B : x \rho y \}$$

oss. ogni relazione tra A e B ha un grafico G_ρ

con $G_\rho \in \mathcal{P}(A\times B)$

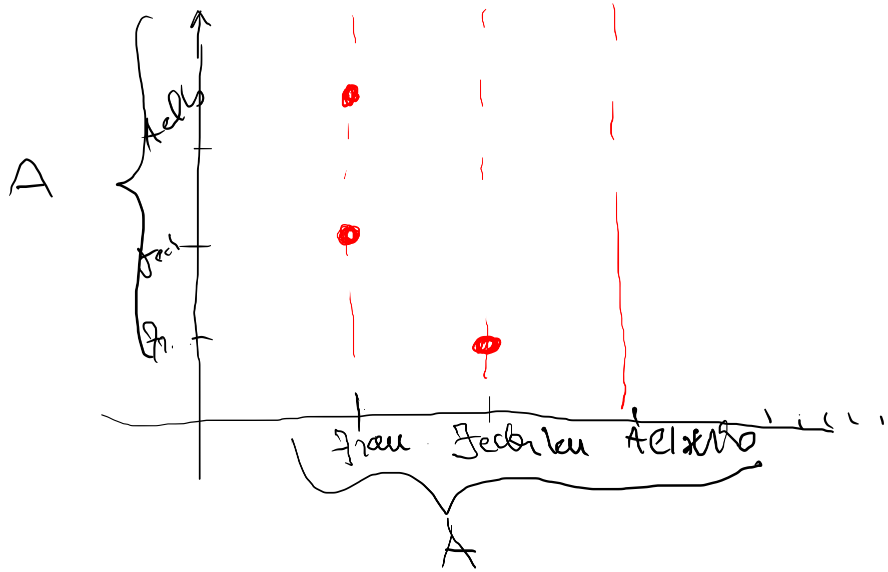


viceversa dato un qualunque $G \in \mathcal{P}(A\times B)$ esisterà una relazione di cui G è grafico.

Relazioni tra A e A (relazioni su A)

es. $A = \{$persone in quest'aula$\}$

$x \rho y$ significa "x conosce y"



es. $A = \mathbb{N} \setminus \{0\}$

$(\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\})$

$x \mid y$ significa x divide y

cioè $\exists\, k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$: $y = kx$

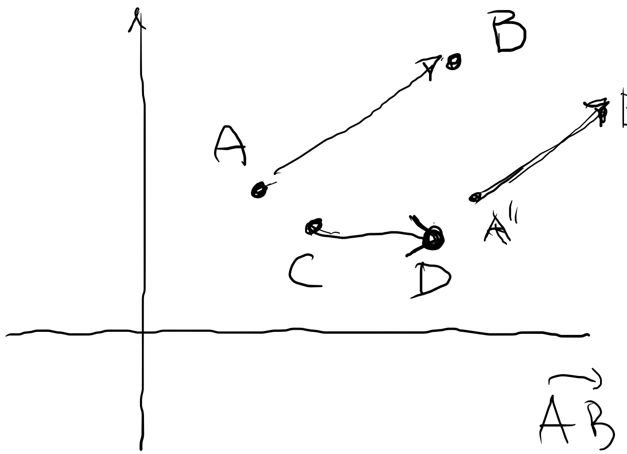
$3 \mid 6$ sì perché $3 \cdot 2 = 6$

$3 \mid 12$ " " $3 \cdot 4 = 12$

$3 \nmid 7$

Es. $A = \{$coppie ordinate di punti del piano$\}$

le scrivo $\overrightarrow{AB}$ (invece di (A, B))



$\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{A'B'}$

se $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{A'B'}$ hanno stessa lunghezza, stessa direzione e stesso verso.

$\overrightarrow{AB} \not\sim \overrightarrow{CD}$

def. sia A insieme, ρ rel su A

diciamo che ρ è riflessiva se $\forall x \in A,\ x \rho x$

es. "conoscere" è riflessiva (se siamo socratici)

"divide" " $(n = 1 \cdot n)$

"$\sim$" "

def. A insieme, ρ rel. su A

ρ è simmetrica se $\forall x, y \in A,\ x \rho y \Rightarrow y \rho x$

es. "conosce" è simm?

"divide" non è simm.

"$\sim$" è simm.

def. A insieme, ρ relazione su A

ρ si dice <u>transitiva</u> se $\forall x, y, z \in A$, $x \rho y \wedge y \rho z \Rightarrow x \rho z$

es. "conosce" non è transitiva

"divide"

$$\underbrace{m \mid n}_{n = h_1 \cdot m} \wedge \underbrace{n \mid k}_{k = h_2 n}$$

$$k = h_2 \cdot n = h_2 \cdot h_1 \cdot m$$

"$\sim$" è transitiva

$$k = (h_2 \cdot h_1)\, m \Rightarrow m \mid k$$

def sia A insieme, ρ relazione su A

se ρ è riflessiva, simmetrica e transitiva

ρ si dice <u>relazione di equivalenza</u>

<u>es.</u> $\sim$ è rel. di equiv.

<u>es:</u> $A = \mathbb{Z} = \{$ interi relativi $\} = \{ \ldots -2, -1, 0, 1, 2, \ldots \}$

fisso $m \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$

$x \equiv_m y$ si legge "x è congruo a y modulo m"

se $x - y$ è un multiplo intero di m

cioè $x - y = m \cdot k$ per qualche $k \in \mathbb{Z}$

$\equiv_m$ congruenza modulo m

es. $m = 3$

$0 \equiv_3 0$

$1 \equiv_3 4 \qquad 1 \equiv_3 7 \qquad 1 \equiv_3 10$

$1 \equiv_3 -5$

eccetera

Esercizio $\equiv_m$ è una relazione di equivalenza

svolgimento: vedo se è riflessiva

prendo $x \in \mathbb{Z}$ e mi chiedo ¿ $x \equiv_m x$? OK

risposta: sì perchè $x - x = 0 = 0 \cdot m$

¿ $\equiv_m$ è simmetrica?

prendo $x, y \in \mathbb{Z}$ suppongo $x \equiv_m y$ mi chiedo

¿ $y \equiv_m x$?

$$x \equiv_m y \Rightarrow \exists\, k \in \mathbb{Z} : \quad x - y = k \cdot m$$

$$\Downarrow$$

$$y - x = (-k) \cdot m$$

$$\Downarrow$$

$$y \equiv_m x$$

¿ $\equiv_m$ è trans.?

prendo $x \equiv_m y$ e $y \equiv_m z$ e mi chiedo ¿ $x \equiv_m z$?

$x \equiv_n y \qquad x - y = k_1 \cdot n$

$y \equiv_n z \qquad y - z = k_2 \cdot n$

$$\Downarrow$$

$$x \cancel{-y} \cancel{+y} - z = (k_1 + k_2) n$$

$$x - z = (k_1 + k_2) n \qquad \text{OK}$$

$$x \equiv_n z$$

def. sia ρ una equivalenza su A. sia $a \in A$

$[a]_\rho = \{ x \in A : a \rho x \}$ classe di equivalenza di a

l'insieme delle classi di equivalenza

lo chiamiamo <u>insieme quoziente</u> della relazione

$$A/\rho = \{ [a]_\rho : a \in A \}$$