Lezione 4



Relazioni di equivalenza

A insieme, $\rho$ relazione — riflessiva, simmetrica, transitiva } rel di equiv.

2 esempi — coppie di punti sul piano; congruenza modulo $m$ ($\mathbb{Z}$, $x \equiv_m y$ se $\exists k : x - y = k \cdot m$)

$a \in A$ $\quad [a]_\rho = \{x \in A : a \rho x\}$

Es. $\mathbb{Z}, \equiv_5$

2

$$[0]_{\equiv_5} = \{\ldots -10, -5, 0, 5, 10, \ldots\}$$

$$[1]_{\equiv_5} = \{\ldots, -9, -4, 1, 6, 11, \ldots\}$$

$$[2]_{\equiv_5} = \{-8, -3, 2, 7, 12, \ldots\}$$

$$[3]_{\equiv_5} = \{\ldots, -7, -2, 3, 8, 13 \ldots\}$$

$$[4]_{\equiv_5} = \{\ldots, -6, -1, 4, 9, 14, \ldots\}$$

$$[5]_{\equiv_5} =$$

$$\mathbb{Z}/\equiv_5 = \{[0]_{\equiv_5}, [1]_{\equiv_5}, \underbrace{[2]_{\equiv_5}}, \underbrace{[3]_{\equiv_5}}, [4]_{\equiv_5}\}$$

(3)

$\mathbb{Z}/_{\equiv_5}$ (questo quoziente) è interessante perché eredita da $\mathbb{Z}$ la possibilità di fare somme e prodotti

si fanno somme e prodotti di classi di equivalenza

$$[a]_{\equiv_5} \,\#\, [b]_{\equiv_5} = [a+b]_{\equiv_5}$$

la vecchia somma

è la somma tra classi!
non la somma solita

$$[3] \,\#\, [7] = [10] = [0]$$

$[7] = [2]$

| # | [0] | [1] | [2] | [3] | [4] |
|---|---|---|---|---|---|
| [0] | [0] | [1] | [2] | [3] | [4] |
| [1] | [1] | [2] | [3] | [4] | [0] |
| [2] | [2] | [3] | [4] | [0] | [1] |
| [3] | [3] | [4] | [0] | [1] | [2] |
| [4] | [4] | [0] | [1] | [2] | [3] |

<u>def.</u> Se $A$ è un insieme e $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(A)$ ($\mathcal{B}$ è un insieme di sottoinsiemi di $A$)

$\mathcal{B}$ si dice <u>partizione</u> di $A$

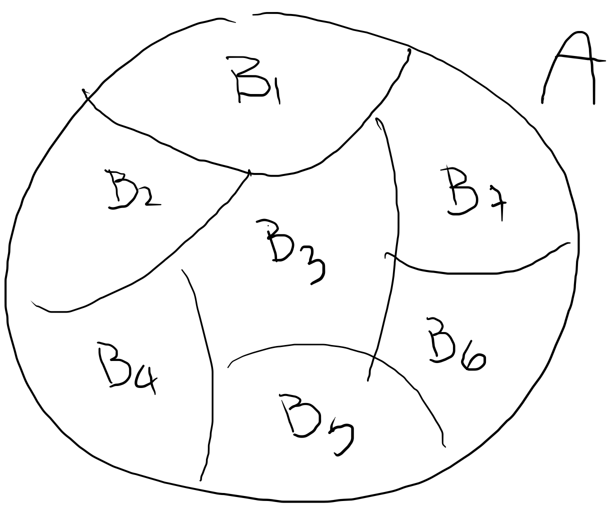
se i) $\forall B \in \mathcal{B} \quad B \neq \emptyset$

ii) $\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B}, \quad B_1 \cap B_2 \neq \emptyset \Rightarrow B_1 = B_2$

(sono a 2 a 2 disgiunti, cioè hanno intersezione vuota) (5)

iii) $\underbrace{\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B}$ $= A$

faccio l'unione di tutti i $B$ di $\mathcal{B}$




<u>Esercizio</u>

Siano $A$ insieme, $\sim$ relazione di equivalenza su $A$

Allora $A/\sim$ è una partizione di $A$

svolgimento

provo la i)



sia $a \in A$, considero $[a]_\sim = \{x \in A : a \sim x\}$

devo provare che $[a]_\sim \neq \emptyset$

poiché $a \in [a]_\sim$ (perché $\sim$ è riflessiva)

ho finito

provo la ii)

siano $[a]_\sim$, $[b]_\sim$ e sia $[a]_\sim \cap [b]_\sim \neq \emptyset$

[dobbiamo provare che $[a]_\sim = [b]_\sim$.
per farlo basta provare che $a \sim b$]

infatti sia $x \in [a]_\sim$ so che $a \sim x$ e $a \sim b$
allora (per simm. e trans.) $x \sim a$ e $a \sim b$ allora $x \sim b$

allora $b \sim x$ allora $x \in [b]_\sim$

(riassunto: ho provato $x \in [a]_\sim \Rightarrow x \in [b]_\sim$

allora $[a]_\sim \subseteq [b]_\sim$

analogamente provo $[b]_\sim \subseteq [a]_\sim$ )

so che $[a]_\sim \cap [b]_\sim \neq \emptyset$

cioè $\exists c \in A$ : $a \sim c \land b \sim c$

allora $a \sim c \land c \sim b$

allora $a \sim b$ : fine

iii)

immediato

$$\bigcup_{a \in A} [a]_\sim = A$$

Ragionamento

1 se $[a]_\sim \cap [b]_\sim \neq \emptyset$

allora $a \sim b$

2 se $a \sim b$

allora $[a]_\sim = [b]_\sim$

prima ho provato prima 2

e poi 1

Relazioni di ordine.

def. $A$ insieme, $\rho$ relazione

$\rho$ si dice <u>antisimmetrica</u> se

$$\forall x, y \in A, \quad x \rho y \wedge y \rho x \Rightarrow x = y$$

def. siano $A$ insieme e $\rho$ relazione

se $\rho$ è $\left\{ \begin{array}{l} \text{rifl.} \\ \text{antisimm.} \\ \text{trans.} \end{array} \right\}$ $\rho$ si dice relazione d'ordine

<u>ES</u>. $\mathbb{N} \setminus \{0\}$, $\mid$ (relazione "divide")

divide è $\left\{ \begin{array}{l} \text{rifl.} \\ \text{trans.} \end{array} \right.$

divide è antisimmetrica

siano $m, n$ in $\mathbb{N} \setminus \{0\}$

sia $\underbrace{m \mid n}$ e $\underbrace{n \mid m}$

$\Downarrow$ $\Downarrow$

$\exists k_1 : n = k_1 m$ $\exists k_2 : m = k_2 n$

$k_1$ e $k_2 \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

$\Downarrow$

$n = k_1 k_2 \cdot n$

$\Downarrow$

$n(1 - k_1 k_2) = 0 \implies$

$n = 0$ ~~no~~

$\vee$

$k_1 k_2 - 1 = 0$

$k_1 k_2 = 1 \implies k_1 = k_2 = 1$

fine

def. $A$ insieme, $\rho$ relazione d'ordine

$(A, \rho)$ insieme ordinato

def. se $A$ insieme, $\rho$ relazione d'ordine
e $\forall x, y \in A$, $x \rho y \vee y \rho x$

$\rho$ si dice relazione d'ordine <u>totale</u>

<u>es.</u> $(\mathbb{N}, \geq)$

---

<u>def.</u> sia $(A, \rho)$ insieme ordinato
sia $B \subseteq A$ e sia $u \in A$

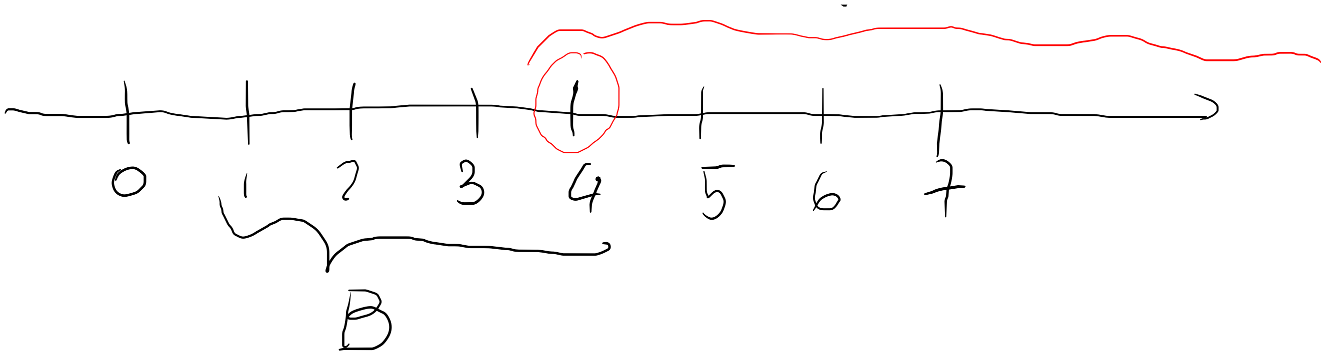
$\mu$ si dice essere un elemento maggiorante per $B$

se $\forall b \in B$, $b \,\rho\, \mu$ $(b \leq \mu)$

$\mu$ si dice un massimo di $B$

se $\mu$ è maggiorante (cioè $\forall b \in B$, $b \leq \mu$)

e $\mu \in B$



es. siano $m_1, m_2$ che siano massimi per $B$

provare che $m_1 = m_2$

svolgimento.

$m_1$ è massimo di $B$ $\Longrightarrow$ in particolare $\forall b \in B,\ b \leq m_1$

$m_2$ è massimo di $B$ $\Longrightarrow$ in particolare $m_2 \in B$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{allora} & m_2 \leq m_1 \\ \text{viceversa} & m_1 \leq m_2 \end{array}\right\} \xRightarrow[\text{antisimm}]{} m_1 = m_2$$

def sia $A$ insieme, $\leq$ relazione d'ordine

$m \in A$ $\quad$ $m$ si dice massimale per $A$

se $\neg(\exists x \in A : m \leq x \wedge x \neq m)$