Lezione 5.

Funzioni

def. Siano A, B insiemi
Sia f una relazione tra A e B
f si dice funzione (o applicazione) se

i) $\forall x \in A, \exists y \in B : x f y$

ii) $\forall x \in A, \forall y_1, y_2 \in B, \ x f y_1 \wedge x f y_2 \Rightarrow y_1 = y_2$

Cioè ogni elemento di A è in relazione con uno e un solo elemento di B

oss. Alternativamente diremo che una funzione è una tupla di oggetti (A, B, f)

dove A insieme (che chiamerò <u>dominio</u> della funzione)

B insieme (che chiamerò <u>codominio</u> della funzione)

f è una "legge" che ad ogni elemento del dominio associa uno e un solo elemento del codominio

predicato binario tale che....

scriverò $f : \underbrace{\underset{\text{dominio}}{A} \longrightarrow \underset{\text{codominio}}{B}}_{\text{insiemi}}$, invece di $x f y$

$$\boxed{y = f(x)}$$

...ufine $\quad x \longmapsto f(x) \; (= y)$

<u>def.</u> data $f: A \to B$

a $\underset{\substack{\cap \\ A}}{x}$ risulta associato uno e un solo $y \in B$

$y = f(x)$

y lo chiamo elemento immagine di x

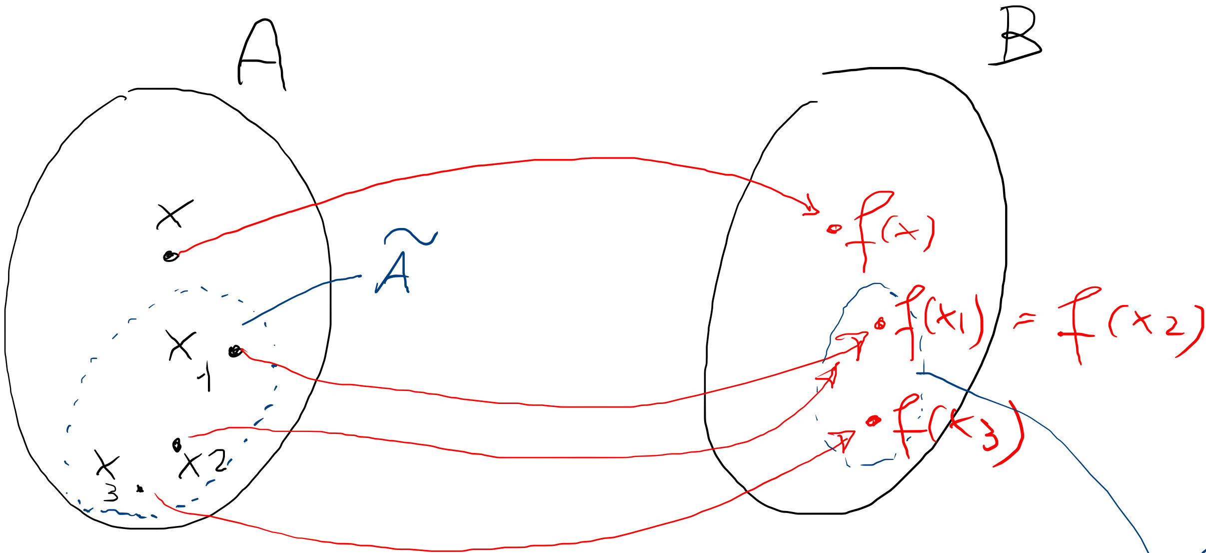
ogni el. del dominio ha una e una sola immagine nel codominio.

<u>infine</u> se $\tilde{A} \subseteq A$, $\quad f(\tilde{A}) = \{ y \in B : \exists x \in \tilde{A} : y = f(x) \}$

$= \{ \cancel{f(x) \in B} \quad x \in \tilde{A} \}$

$f(\tilde{A})$ si dice (insieme) immagine di $\tilde{A}$

es.



$\tilde{A} = \{x_1, x_2, x_3\}$

Ha senso considerare

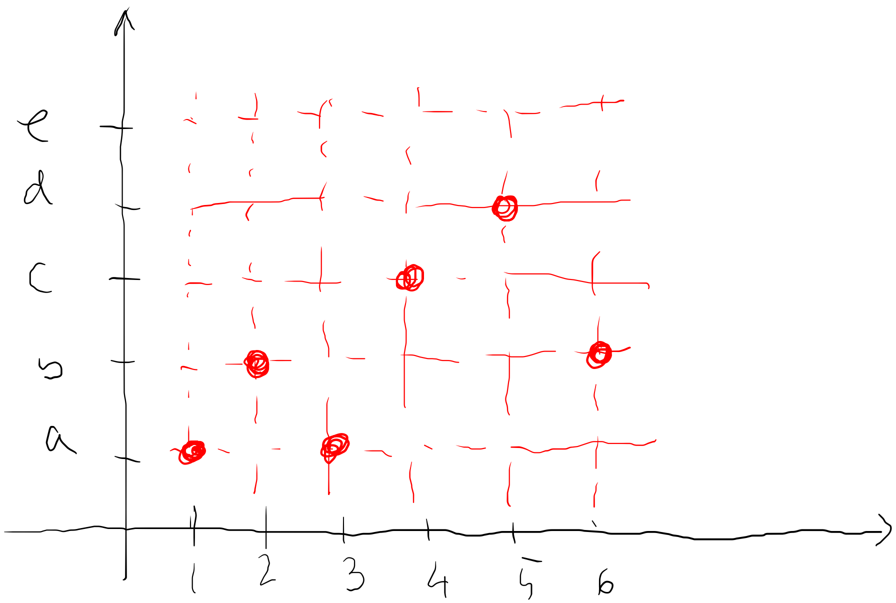
$$\underbrace{f(A) = \{f(x) \in B : x \in A\}}_{\text{insieme immagine}}$$

$$f(\tilde{A}) = \{\underset{\substack{\parallel \\ f(x_2)}}{f(x_1)}, f(x_3)\}$$

5

Es. $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$B = \{a, b, c, d, e\}$



x	$f(x)$
1	a
2	b
3	a
4	c
5	d
6	b

x	$f(x)$
1	a
2	b
3	
4	d
5	e
6	

x	$f(x)$
1	a, b
2	b
3	c
4	a d
5	e
6	d

non è una funzione

OSS. deve essere

i) ogni retta verticale ha almeno un pallino

ii) ogni retta verticale non può avere più di un pallino

cioè ogni retta verticale ha uno e un solo pallino

x	$f(x)$
1	a
2	b
3	a
4	c
5	d
6	b

$$f(\underbrace{\{1,2,3\}}_{A}) = \{a,b\} \qquad B = \{a,b,c,d,e\}$$

5 bis

$$f(A) = \{a,b,c,d\} \subsetneq B$$

$$f^{\leftarrow}(\{e\}) = \emptyset$$

$$f^{\leftarrow}(\{a,b\}) = \{1,3,2,6\}$$

def l'insieme $G_f = \{ \underbrace{(x, f(x)) \in A \times B} , \ x \in A \}$

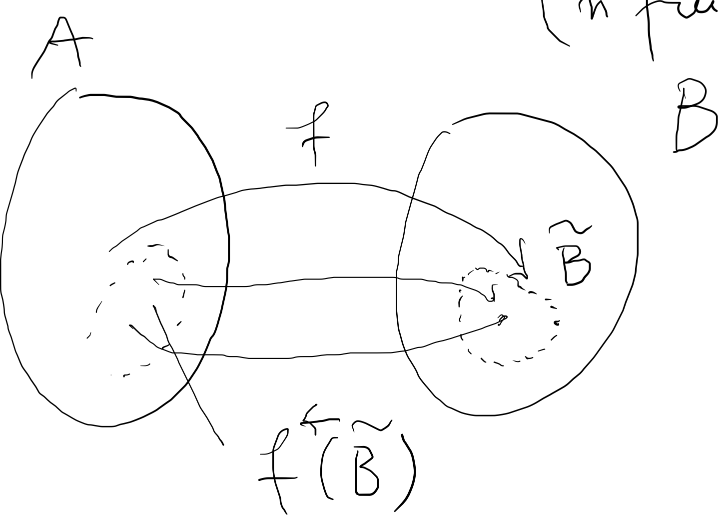
si dice grafico di f

def se $\tilde{B} \subseteq B$

chiamo $\underbrace{f^{\leftarrow}}(\tilde{B}) = \{ x \in A : f(x) \in \tilde{B} \}$

(si può anche $f^{-1}(B)$)

insieme controimmagine di $\tilde{B}$



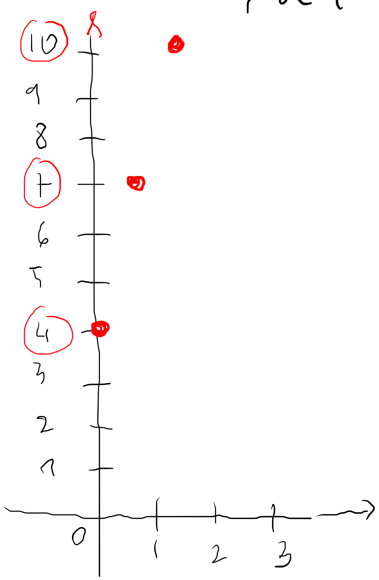
$$G_f = \{(x,y) \in A \times B : x \in A \wedge y = f(x)\}$$

7

es. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$$n \longmapsto f(n) = 3n + 4$$

n	$f(n)$
0	4
1	7
2	10
3	13
4	16
5	19



$f^{\leftarrow}(\{0,1\}) = \emptyset$

trovare $f(2) = 10$

$f(\{2,3,4\}) = \{10, 13, 16\}$

def. Sia $f : A \to B$ funzione

f si dice <u>suriettiva</u> (o surgettiva) se

$$f(A) = B \qquad \left(\text{in generale } f(A) \subseteq B\right)$$

f si dice <u>iniettiva</u> (o ingettiva) se

$$\forall x_1, x_2 \in A, \qquad x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$$

o, equivalentemente,

$$\forall x_1, x_2 \in A, \qquad f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$$

$$\left(\begin{array}{c} p \implies q \\ \Updownarrow \\ \neg q \implies \neg p \end{array} \right)$$

tautologia

Se f è iniettiva e suriettiva si dice biiettiva

9

es. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $n \longmapsto 3n+4$

è suriettiva? NO (perché, per esempio, $1 \notin f(\mathbb{N})$)

è iniettiva?

prendo n_1 e n_2 e suppongo che

$$\boxed{f(n_1) = f(n_2)}$$

cioè $3n_1 + 4 = 3n_2 + 4$ $-$

$$\Downarrow$$

$$3n_1 = 3n_2$$

$$\Downarrow$$

$$3(n_1 - n_2) = 0 \quad \Rightarrow \quad n_1 - n_2 = 0$$

$$n_1 = n_2$$

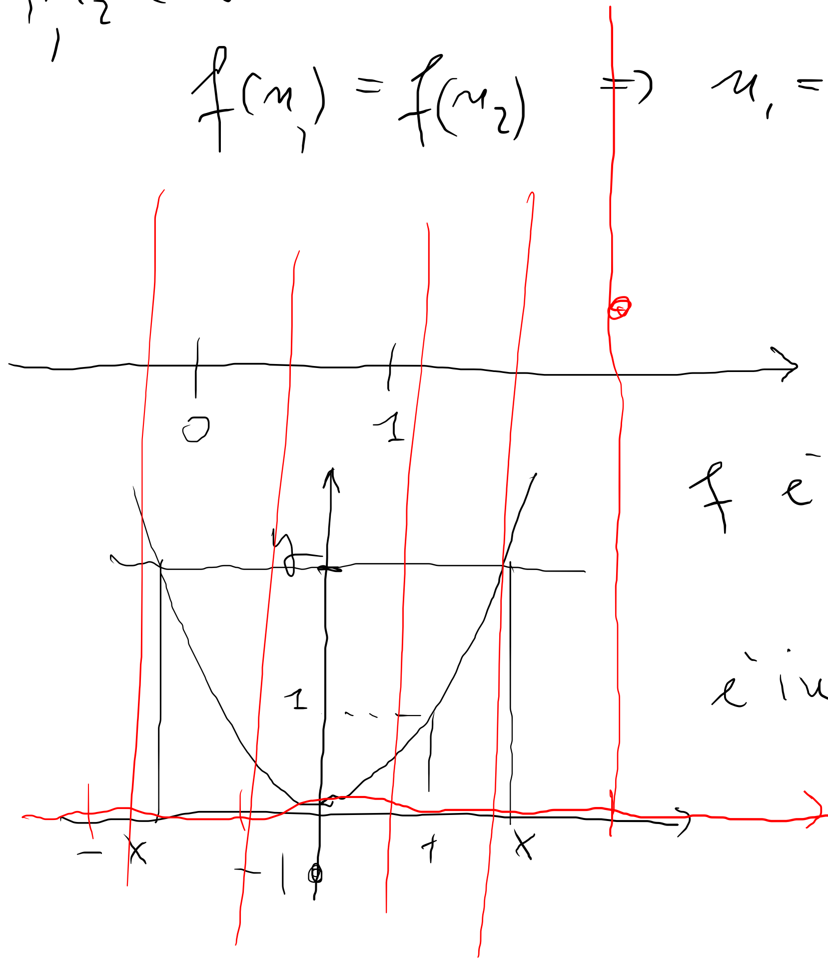
ho provato che $\forall n_1, n_2 \in \mathbb{N}$

$$f(n_1) = f(n_2) \Rightarrow n_1 = n_2$$

OK

es. sia $A = \mathbb{R}$

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto x^2$$



f è suriettiva ?

no

è iniettiva ?

no

11

def. sia $f: A \to B$

sia $\tilde{A} \subseteq A$ ha senso considerare

$$\tilde{f} : \tilde{A} \to B \quad t.c. \quad \forall x \in \tilde{A}, \ \tilde{f}(x) = f(x)$$

(ho cambiato il dominio, lo ho preso più piccolo, ma la legge f è rimasta la stessa)

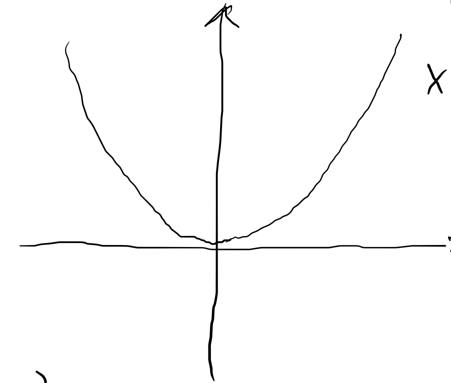
dico che $\tilde{f}$ è una "restrizione" di f

Analogamente posso considerare $\tilde{\tilde{f}} : A \to \tilde{B}$

con $\tilde{B} \subseteq B$ (però non lo posso fare sempre)

anche questa la diciamo restrizione

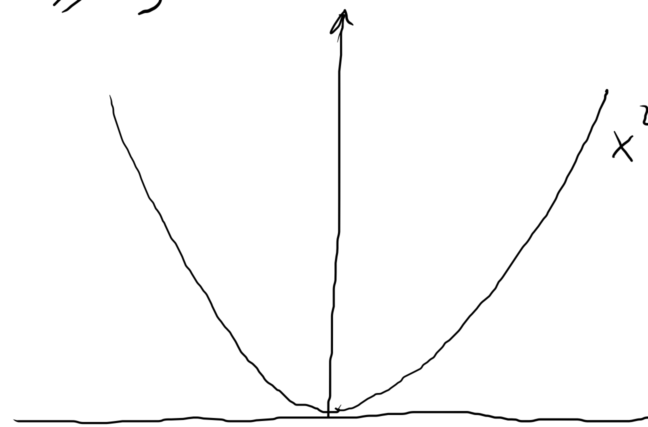
es. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$



posso considerare

$\tilde{f} : \mathbb{R} \to [0, +\infty[= \{x \in \mathbb{R},\ x \geq 0\}$

$x \mapsto x^2$



$\tilde{f}$ è <u>suriettiva</u>*

* non è facile da vedere

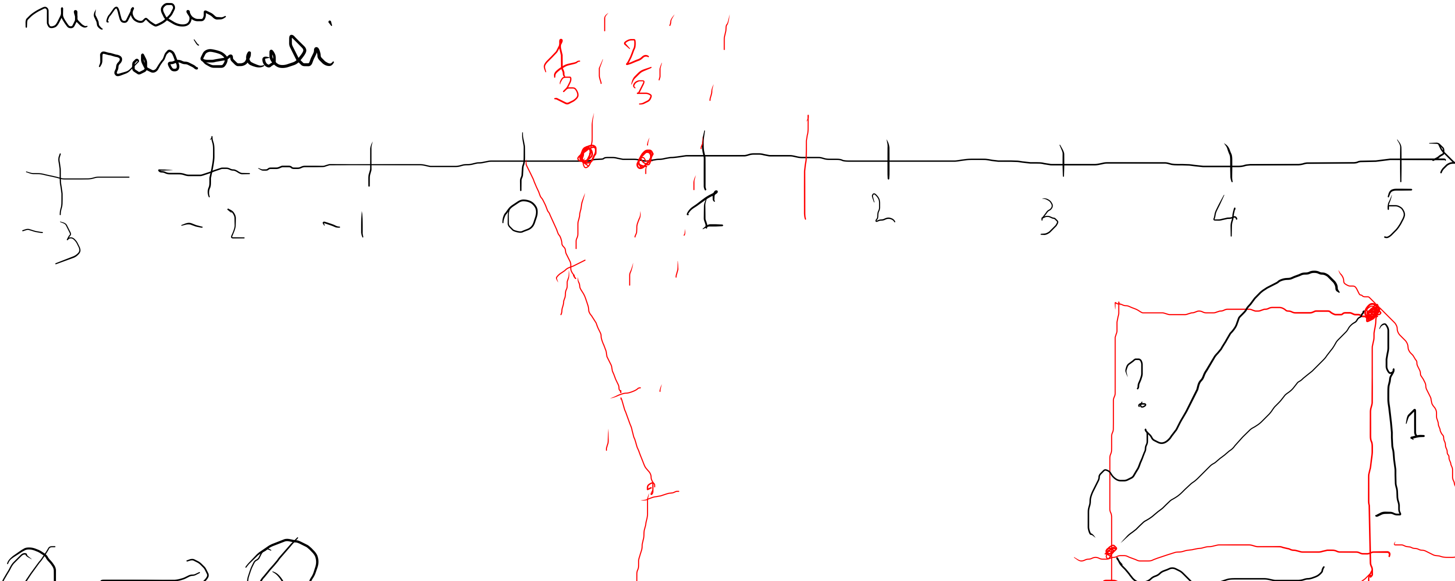
(per esempio $g : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q} \cap [0, +\infty[$

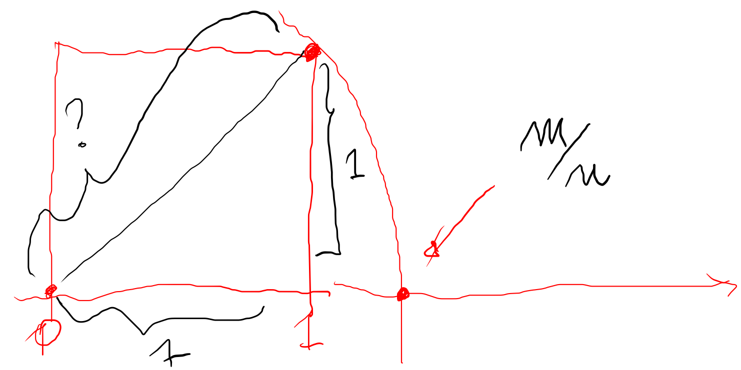
$g(x) = x^2$ <u>non è suriettiva</u>)

(13)

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n},\ m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}$$

numeri razionali





$$\mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$$

$$\frac{m}{n} \longmapsto \left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2$$

Pitagora $\boxed{\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2}$ n NO

¿ esiste un tale numero m/n ?

14

Si dimostra per assurdo → (per assurdo)

Supponiamo* esistano $m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tali che

$$\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{m^2}{n^2} = 2$$

$$\Downarrow$$

$$m^2 = 2n^2$$

$$\Downarrow$$

non è restrittivo supporre che m e n siano primi tra loro (significa che m/n è ridotta "ai minimi termini" cioè m e n non hanno fattori in comune cioè ho semplificato tutto il possibile)

2 divide m^2 $\Rightarrow$ 2 è un fattore di m $\Rightarrow$

m è pari cioè $m = 2k$

quindi $m^2 = 2n^2$

diventa $(2k)^2 = 2n^2$

$$\Downarrow$$

$$4k^2 = 2n^2$$

$$\Downarrow$$

$$2k^2 = n^2$$

$$\Downarrow$$

n^2 è pari $\Rightarrow$ n è pari

quindi $\left.\begin{array}{l} m \text{ è pari} \\ n \text{ è pari} \end{array}\right\}$ impossibile

<u>def</u>: siano $f : A \to B$, $g : B \to C$

la funzione $h : A \to C$

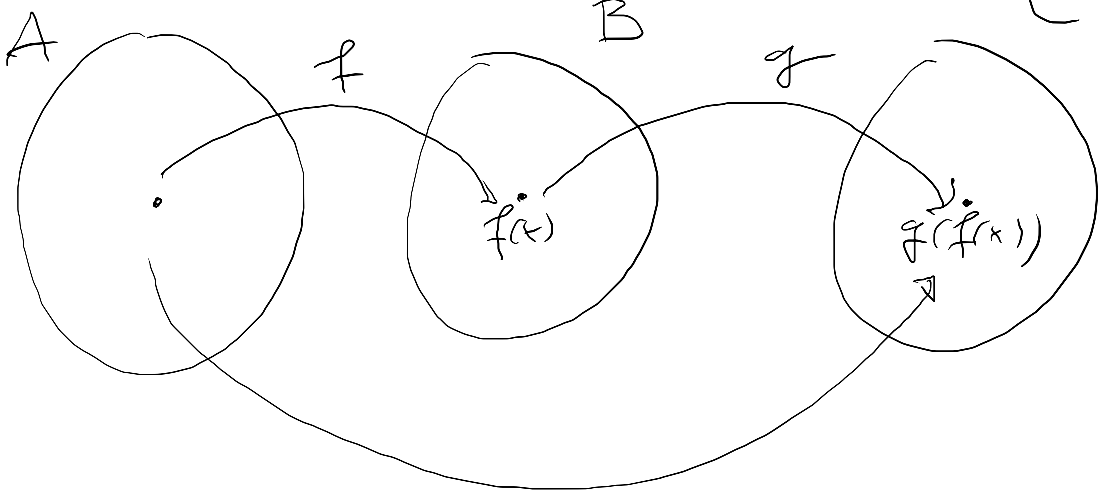
$$x \longmapsto g(f(x))$$

si dice funzione composta ——— la indico con

$g \circ f$ pallino

si legge

g dopo f



def. A insieme

chiamo <u>identità</u> su A la funzione

$$id_A : A \to A \qquad x \mapsto x$$

<u>lascia tutto fermo.</u>

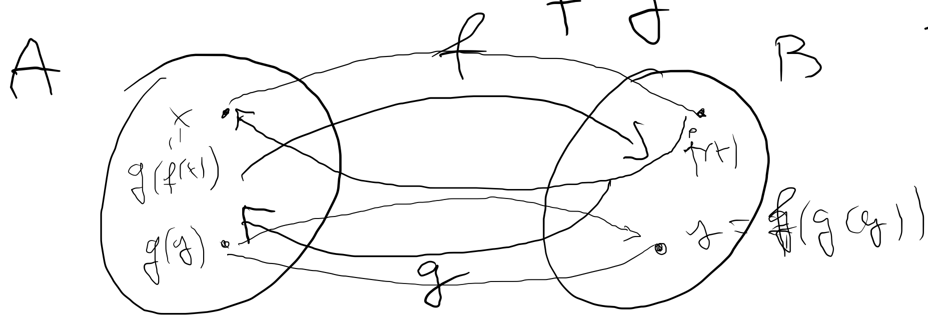
def. sia $f: A \to B$

f si dice <u>invertibile</u> se esiste $g: B \to A$

tale che

$$g \circ f = id_A \qquad \forall x \in A, \quad g(f(x)) = x$$

$$f \circ g = id_B \qquad \forall y \in B, \quad f(g(y)) = y$$



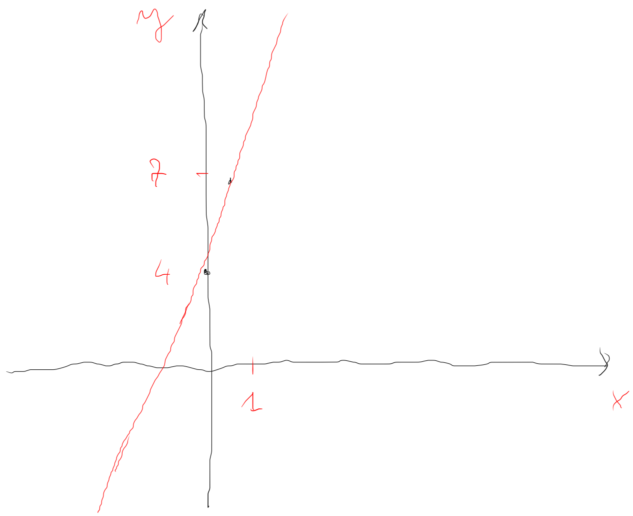
g è unica (bisogna provarlo) e la indico con f^{-1}

18

f^{-1} la diciamo inversa di f.

es. consideriamo $f: \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$

$x \longmapsto 3x+4$



è iniettiva?

$$3x_1+4 = 3x_2+4$$
$$\Downarrow$$
$$3x_1 = 3x_2$$
$$\Downarrow$$
$$x_1 = x_2$$

sì

è suriettiva?

fissare $y \in \mathbb{Q}$, $\exists x \in \mathbb{Q} : 3x+4 = y$?

$3x + 4 = y$ devo trovare x (se c'è)

$3x = -4 + y$

$$\boxed{x = \frac{y-4}{3}}$$

sì quindi è biettiva

Teorema $f: A \to B$ è invertibile se e solo se f è biettiva

quindi $f: \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$
$x \mapsto 3x + 4$ è invertibile

chi è l'inversa? $g: \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$
$y \mapsto \frac{y-4}{3}$

$$x \xmapsto{f} 3x+4$$

$$y \xmapsto{g} \frac{y-4}{3}$$

$$x \longmapsto \frac{(3x+4)-4}{3} = \frac{\cancel{3}x}{\cancel{3}} = x \qquad \text{OK}$$