Vettori, simmetria, reticoli

Laura Magistrale in Biotecnologie Mediche
CV Nanobiotecnologie

A.A. 2020-21

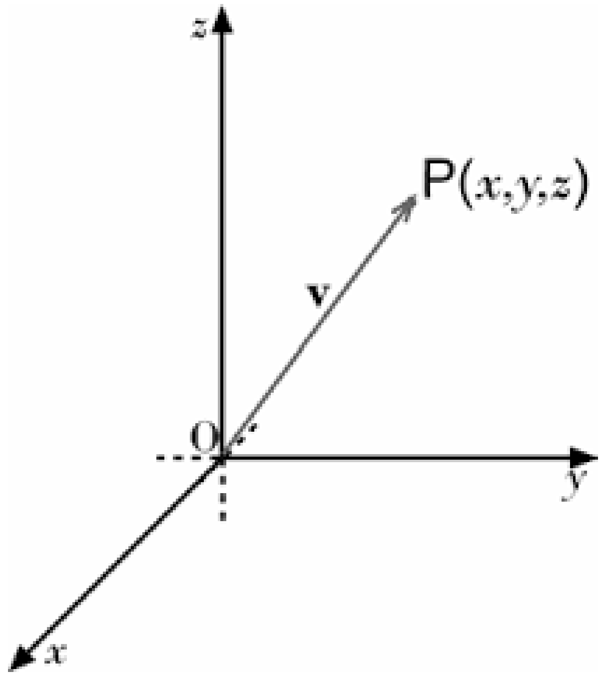
alberto.cassetta@ic.cnr.it - 0403757525

Vettori

Sappiamo che i vettori sono usati per esprimere grandezze che dipendono non solo dalla loro intensità, come le grandezze scalari (es: massa o calore), ma anche dalla loro direzione e dal loro verso (es: velocità, accelerazione, campo elettrico e magnetico)

Sappiamo che le grandezze vettoriali si possono rappresentare come segmenti orientati (vettori) su un piano cartesiano o più in generale in un sistema di riferimento n-dimensionale ortogonale (o meno).

Sappiamo anche che un vettore tridimensionale si può rappresentare numericamente come la somma di tre numeri scalari, ognuno moltiplicato per un **vettore unitario** rappresentante una delle direzioni del sistema di riferimento (*versore*).
Per uno spazio a 3 dimensioni



$$\vec{\boldsymbol{r}} = \vec{\boldsymbol{u}}x + \vec{\boldsymbol{v}}y + \vec{\boldsymbol{w}}z$$

Vettori in Forma di matrice

Un vettore n-dimensionale è in fondo rappresentato da una serie di n numeri ordinati. Ogni numero rappresenta la componente lungo una delle n dimensioni.
Nel caso di un vettore tridimensionale, come detto, abbiamo una terna ordinata di numeri indicativi delle componenti del vettore lungo ciascuno degli assi del sistema di riferimento x,y,z.

$$\vec{r} = \vec{\boldsymbol{u}}x + \vec{\boldsymbol{v}}y + \vec{\boldsymbol{w}}z$$

La lunghezza di $\vec{r}$ è detta **modulo** del vettore e si indica con $|\vec{r}|$

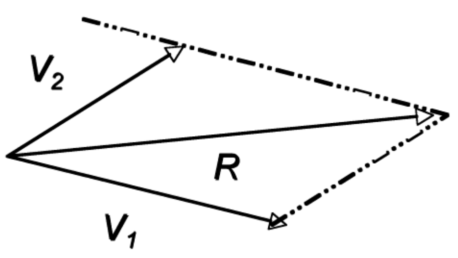
Quindi una terna ordinata di numeri, può rappresentare un vettore in un sistema di riferimento (X, Y, Z), considerando a_1 come la componente lungo X, a_2 la componente lungo Y e a_3 la componente lungo Z.

$$(a_1\ a_2\ \ a_3)$$

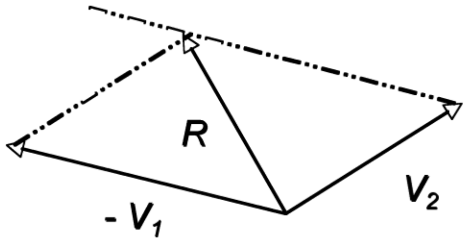
Rappresentazione in forma di matrice

Calcoli con vettori – Somma e differenza

Da studi precedenti è noto che graficamente la somma o differenza di due vettori può essere ottenuta applicando la ***regola del parallelogramma***



$$R = \overline{V}_2 + \overline{V}_1$$



$$R = \overline{V}_2 - \overline{V}_1 = \overline{V}_2 + (-\overline{V}_1)$$

Se esprimiamo i vettori nella loro forma algebrica, dati :

$$\vec{\boldsymbol{s}} = \vec{\boldsymbol{u}}x + \vec{\boldsymbol{v}}y + \vec{\boldsymbol{w}}z$$
$$\vec{\boldsymbol{t}} = \vec{\boldsymbol{u}}p + \vec{\boldsymbol{v}}q + \vec{\boldsymbol{w}}\mathrm{r}$$

Avremo che:

$$\vec{\boldsymbol{s}} + \vec{\boldsymbol{t}} = \vec{\boldsymbol{u}}(x+p) + \overrightarrow{\boldsymbol{v}(}y+q) + \vec{\boldsymbol{w}}(z+r)$$

Prodotti con Vettori

Esistono 4 diversi tipi di prodotto di un vettore, noi ne tratteremo solo 3:

- Prodotto di un vettore per uno coefficiente numerico (scalare)
- Prodotto **scalare** di un vettore per un altro vettore
- Prodotto **vettoriale** di un vettore per un altro vettore

Il prodotto di un vettore per un coefficiente numerico ***k*** (scalare) ha come risultato un vettore il cui modulo viene moltiplicato per il coefficiente numerico

$$\mathbf{k}*\vec{\boldsymbol{s}} = \vec{\boldsymbol{u}}kx + \vec{\boldsymbol{v}}ky + \vec{\boldsymbol{w}}kz$$

Ovvero, esprimendo $|\vec{s}|$ come modulo (lunghezza) del vettore $\vec{s}$:

$$|k * \vec{s}| = k * |\vec{s}|$$

Vettori – Prodotto Scalare

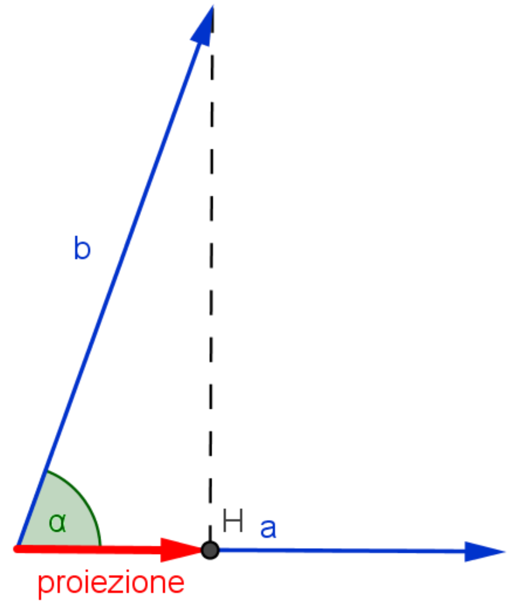
Il prodotto scalare di due vettori $\vec{s}$ e $\vec{t}$ è un numero (scalare) che dipende non solo dall'intensità dei due vettori, ma anche dalla mutua orientazione. E' il prodotto del modulo di un primo vettore per la proiezione del secondo vettore lungo la direzione del primo vettore (tenendo conto del verso).

$$\vec{\boldsymbol{s}} \cdot \vec{\boldsymbol{t}} = |\mathrm{s}|\ |\mathrm{t}| \cos\alpha$$

Dove: $\vec{\boldsymbol{s}} = \vec{\boldsymbol{u}}x + \vec{\boldsymbol{v}}y + \vec{\boldsymbol{w}}z \quad \vec{\boldsymbol{t}} = \vec{\boldsymbol{u}}p + \vec{\boldsymbol{v}}q + \vec{\boldsymbol{w}}\mathrm{r}$

$|\vec{s}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$; $|\vec{t}| = \sqrt{p^2 + q^2 + r^2}$; $\alpha = \cos^{-1}[\frac{(x \cdot p + y \cdot q + z \cdot r)}{|s| \cdot |t|}]$

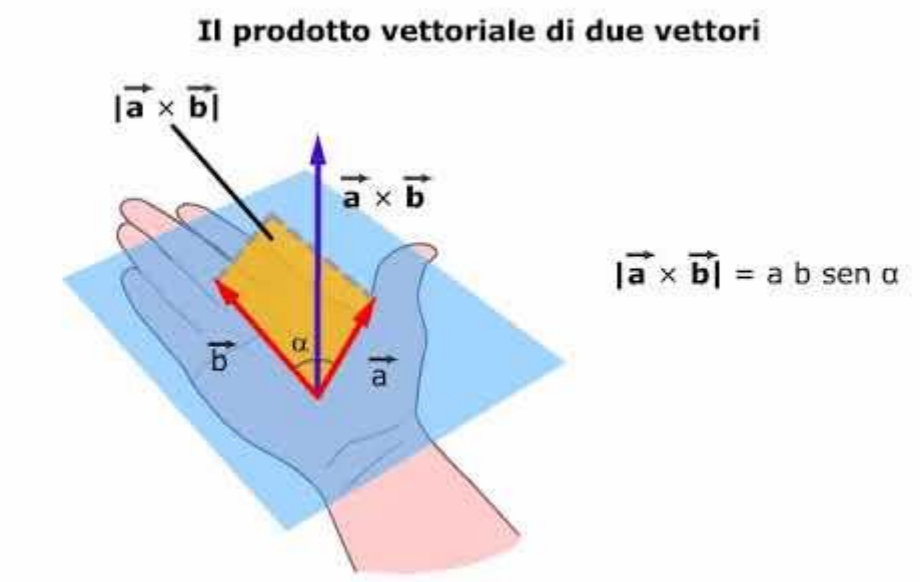
E in generale: $\vec{\boldsymbol{s}} \cdot \vec{\boldsymbol{t}} = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{p} + \boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{q} + \boldsymbol{z} \cdot \boldsymbol{r}$



Vettori – Prodotto Vettoriale

Il prodotto vettoriale di due vettori $\vec{s}$ e $\vec{t}$ è a sua volta un vettore, perpendicolare ai due vettori dati e con il verso definito dalla '*regola della mano destra*' e il cui modulo dipende dalla mutua orientazione dei due vettori:

$$\overrightarrow{|\boldsymbol{q}|} = \overrightarrow{|\boldsymbol{s}\,\mathbf{x}\,\vec{\boldsymbol{t}}|} = |\mathrm{s}|\;|\mathrm{t}|\,\sin\alpha$$



Dove i moduli di $\vec{s}$ e $\vec{t}$ e l'angolo formato sono descritti come nella slide preceden

Dato un sistema di riferimento cartesiano, se i vettori sono:

$$\vec{\boldsymbol{s}} = \vec{\boldsymbol{u}}x + \vec{\boldsymbol{v}}y + \vec{\boldsymbol{w}}z \qquad \vec{\boldsymbol{t}} = \vec{\boldsymbol{u}}p + \vec{\boldsymbol{v}}q + \vec{\boldsymbol{w}}\mathrm{r}$$

Il vettore q: sarà dato da:

$$\vec{\boldsymbol{q}} = \vec{\boldsymbol{u}}(yr - zq) - \overrightarrow{\boldsymbol{v}}(xr - zp) + \vec{\boldsymbol{w}}(xq - yp)$$

Questo stesso risultato si può ottenere calcolando il '**determinante**' da una matrice così costruita:

$$\vec{\boldsymbol{q}} = \vec{\boldsymbol{s}}\,\mathbf{x}\,\vec{\boldsymbol{t}} = \begin{vmatrix} \vec{u} & \vec{v} & \vec{w} \\ x & y & z \\ p & q & r \end{vmatrix}$$

Vettori – Prodotto Vettoriale 2

$$\vec{\boldsymbol{q}} = \vec{\boldsymbol{s}}\ \mathbf{x}\ \vec{\boldsymbol{t}} = \vec{\boldsymbol{u}}(yr - zq) - \vec{\boldsymbol{v}}(xr - zp) + \vec{\boldsymbol{w}}(xq - yp)$$

$$\begin{pmatrix} \vec{u} & \vec{v} & \vec{z} \\ x & y & z \\ p & q & r \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \vec{u} & \vec{v} & \vec{z} \\ x & y & z \\ p & q & r \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \vec{u} & \vec{v} & \vec{z} \\ x & y & z \\ p & q & r \end{pmatrix}$$

$$\vec{\boldsymbol{u}}(yr - zq) \qquad -\vec{\boldsymbol{v}}(xr - zp) \qquad \vec{\boldsymbol{w}}(xq - yp)$$

Il prodotto vettoriale si calcola agevolmente moltiplicando un elemento della prima riga (versori) per la differenza tra i prodotti delle diagonali della matrice 2 x 2 ottenuta eliminando la prima riga e la colonna a cui appartiene il versore, tenuto conto che il versore intermedio ($\vec{\boldsymbol{v}}$) ha segno negativo.

Volume di un parallelepipedo

Il prodotto **<u>misto</u>** di tre vettori (prodotto scalare e vettoriale di 3 vettori) ha un significato geometrico ben preciso, essendo il *volume del parallelepipedo* (generico) da essi definito

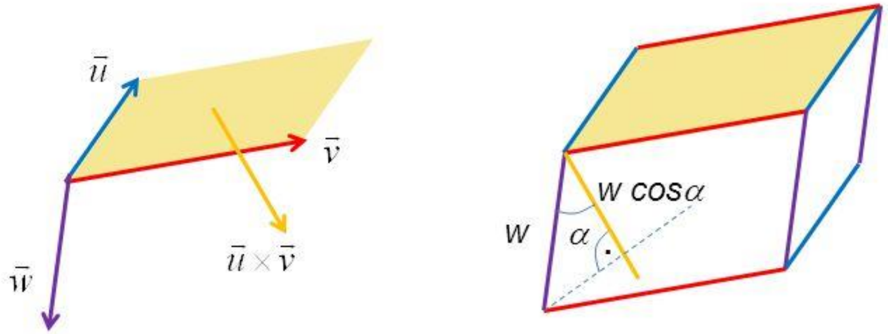
$$V = \vec{s} \cdot \vec{t} \times \vec{q}$$

Prima viene svolto il prodotto vettoriale e poi quello scalare

Se applicato al caso cristallografico il parallelepipedo è la cella unitaria

Interpretazione geometrica

- I tre vettori definiscono un parallelepipedo. Il prodotto misto si puo` scrivere $\vec{w} \cdot \vec{u} \times \vec{v} = |\vec{u} \times \vec{v}| w \cos\alpha$
- L'espressione entro il segno di modulo rappresenta l'area della base (***u***,***v***), mentre *w cos*α rappresenta l'altezza del parallelepipedo rispetto a tale base
- Il prodotto si puo` quindi interpretare come il <u>volume</u> del parallelepipedo



38

Vettori in forma polare sul piano cartesiano

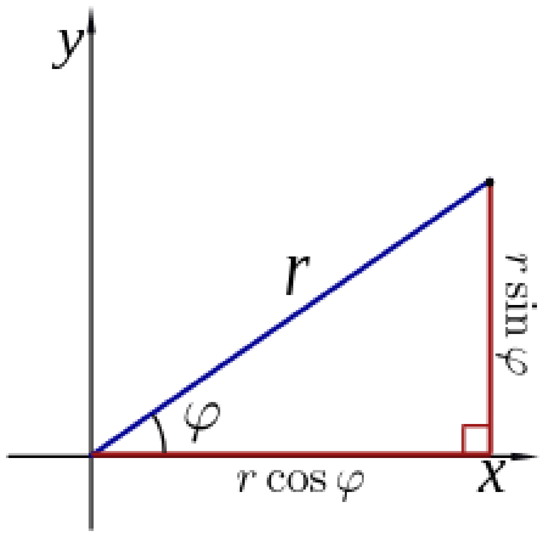
Un vettore può essere rappresentato su un piano cartesiano in forma polare, data l'espressione:

$$\vec{r} = \vec{u}x + \vec{v}y$$

Il vettore $\vec{r}$ in forma polare è definito dal modulo |r| e dall'argomento φ.
Avremo le seguenti relazioni:

$$|r| = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$\varphi = \tan^{-1}\frac{y}{x}$$

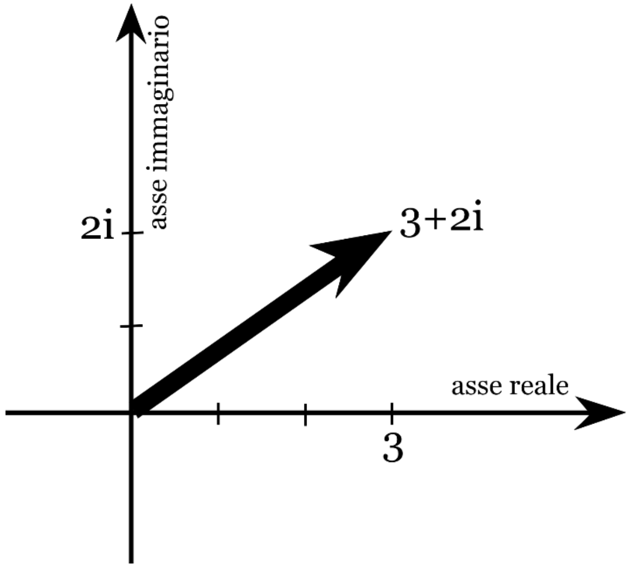
$$x = |r| \cos \varphi$$
$$y = |r| \sin \varphi$$

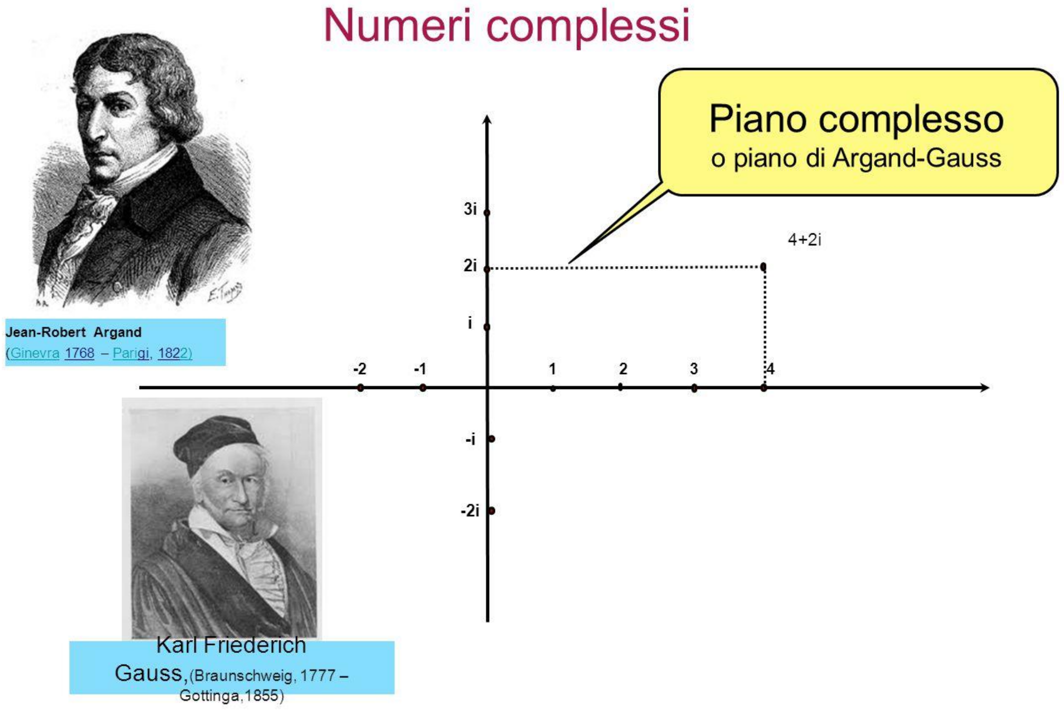


Numeri complessi e vettori

Sappiamo che un numero complesso può essere rappresentato su di un piano, noto come piano di Argand-Gauss. Nel piano di Argand-Gauss, viene riportato in ascisse la parte reale (asse reale) e in ordinate la parte immaginaria (asse immaginario).

Possiamo considerare la rappresentazione di un numero complesso sul piano di Argand, come un vettore.



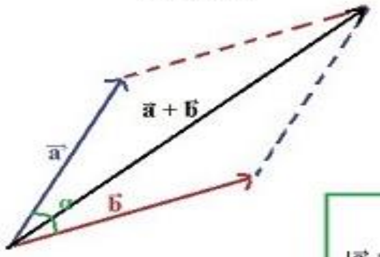


Relazioni tra due vettori nel piano (o nello spazio)

La rappresentazione algebrica di un vettore, del tipo $\vec{r} = \vec{u}x + \vec{v}y$ semplifica notevolmente le operazioni di somma e differenza.

Inoltre sfruttando il teorema di Carnot (o dei coseni), possiamo scrivere:

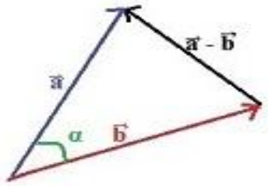
SOMMA



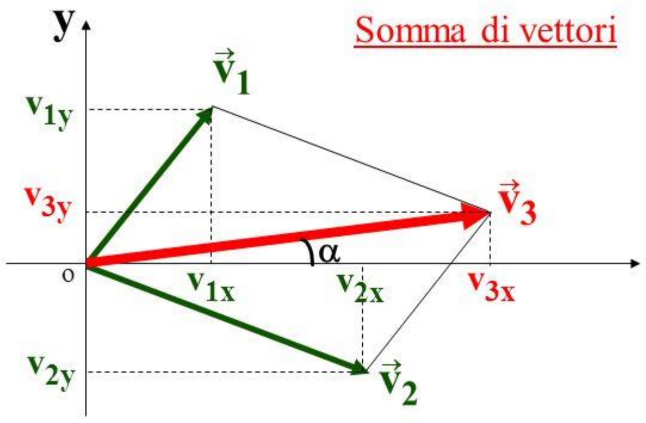
FORMULA

$|\vec{a} \pm \vec{b}|^2 = a^2 + b^2 \pm 2\ a\ b\ \cos(\alpha)$

DIFFERENZA



Somma di vettori



$$\vec{v}_3 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$$

$$\begin{cases} v_{3x} = v_{1x} + v_{2x} \\ v_{3y} = v_{1y} + v_{2y} \end{cases}$$

$$v_3 = |\vec{v}_3| = \sqrt{v_{3x}^2 + v_{3y}^2}$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{v_{3y}}{v_{3x}}$$

Differenza di vettori

$$\vec{v}_3 = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$$

$$\begin{cases} v_{3x} = v_{1x} - v_{2x} \\ v_{3y} = v_{1y} - v_{2y} \end{cases}$$

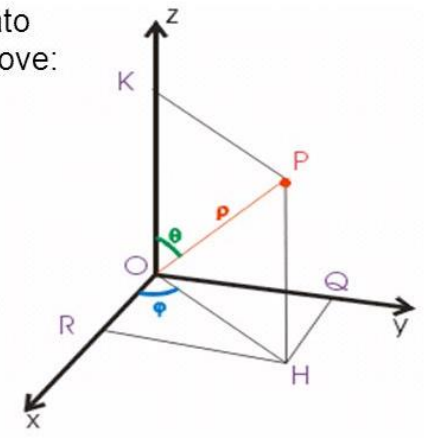
Dove α **è l'angolo formato dai due vettori**, ovvero la differenza tra i loro argomenti e a^2 e b^2 sono i loro moduli al quadrato.
In questo caso la forma polare è più conveniente

Coordinate polari sferiche nello spazio tridimensionale

- Coordinate sferiche

Il punto **P** è individuato dalla terna (ρ, θ φ) dove:

ρ **raggio vettore**
θ **distanza zenitale**
φ **azimut**



La terna (ρ, θ, φ) è legato alla terna (x, y, z) dalle seguenti espressioni:

x=ρ sen θ cos φ
y=ρ sen θ sen φ
z=ρ cos θ

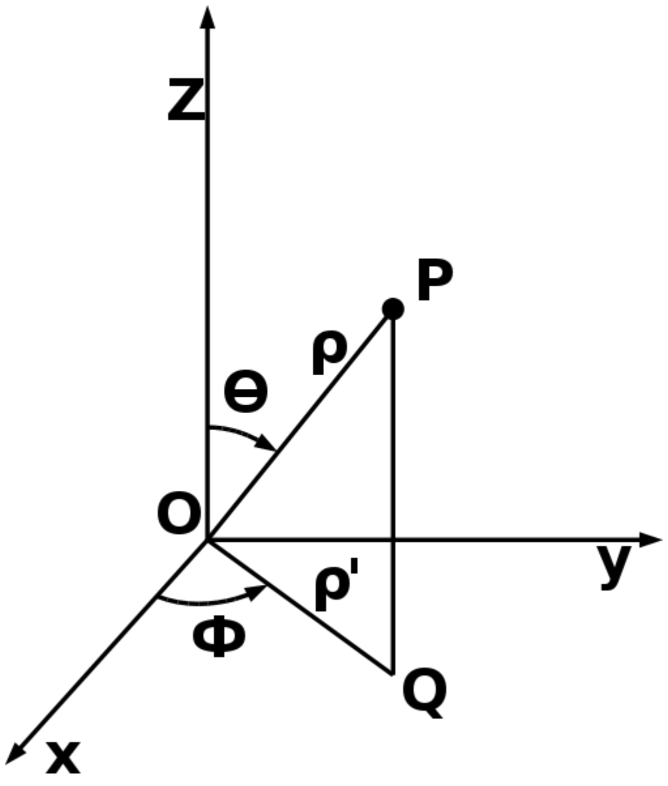
Un punto P in un sistema di riferimento ortonormale 0,x,y,z, può essere rappresentato con diversi sistemi di coordinate, tra le più utilizzate sicuramente le **coordinate polari sferiche** (ne esistono altre).

Le coordinate polari sono legate alle coordinate cartesiane da relazioni definite.

Come sempre l'uso di un sistema di coordinate piuttosto che un altro è dettato dalla semplificazione del calcolo.

In determinati casi l'uso delle coordinate polari si fa preferire poiché semplifica notevolmente il calcolo

Coordinate polari sferiche nello spazio tridimensionale



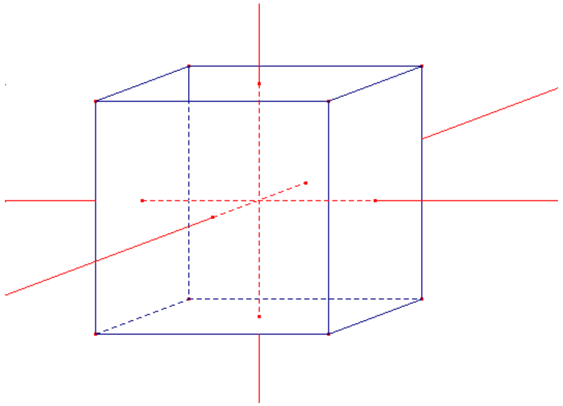
Le coordinate cartesiane (x, y, z) e le coordinate polari sferiche (ρ, θ, φ) sono collegate da precise relazioni.

$$x = \rho \sin\theta \cos\varphi$$
$$y = \rho \sin\theta \sin\varphi$$
$$z = \varrho \cos\theta$$

$$\rho = \sqrt[2]{x^2 + y^2 + z^2}$$
$$\theta = arcos\left(\frac{z}{\sqrt[2]{x^2 + y^2 + z^2}}\right)$$
$$\varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

Simmetria

Un *sistema* è dotato di *simmetria*, **se è applicando una certa operazione al sistema dato, le sue proprietà non cambiano**, ovvero **se lo stato finale del sistema, a cui è stata applicata l'operazione (di simmetria), è del tutto indistinguibile dallo stato iniziale del sistema, precedente l'applicazione dell'operazione stessa**.



Se al cubo applichiamo una rotazione di 90° intorno ad un asse perpendicolare ad una qualsiasi delle sue *facce* e passante per il suo centro geometrico, otteniamo un figura geometrica indistinguibile dall'originale

Simmetria nelle funzioni

Il concetto di simmetria è assolutamente generale, utilizzabile sia per sistemi *geometrici* che per *funzioni matematiche*.
Se *R* è l'espressione matematica di un ***operatore*** di simmetria ovvero un'operazione di simmetria (per esempio una rotazione nel piano cartesiano), allora la funzione generica f(x) sarà simmetrica rispetto ad R se per ogni *x* in cui è definita *f(x)* vale che:

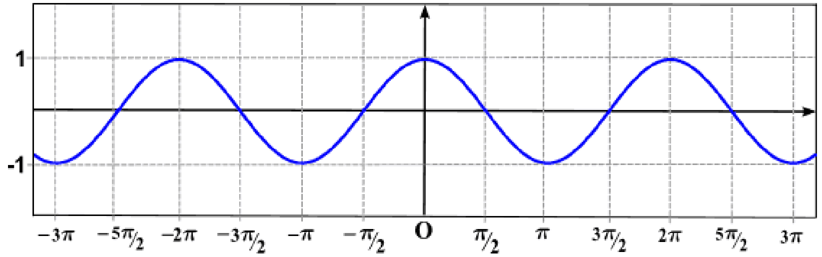
$$f(x) = f(Rx)$$

Per esempio una funzione *pari* per cui vale

$$f(x) = f(-x)$$

E' simmetrica rispetto all'asse delle ordinate

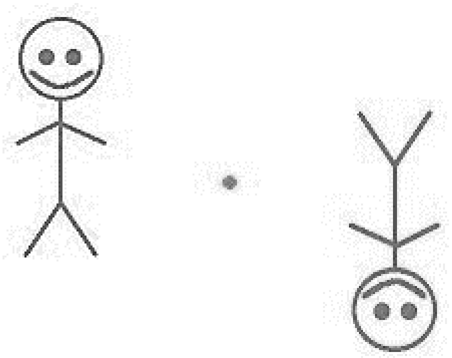
Es: la funzione cos(x)

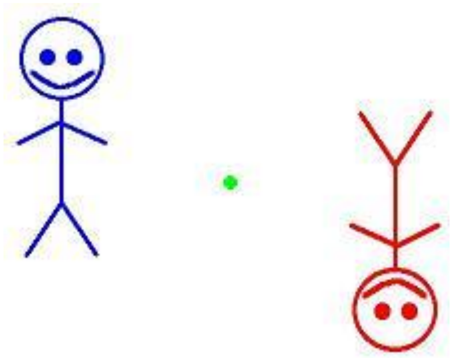


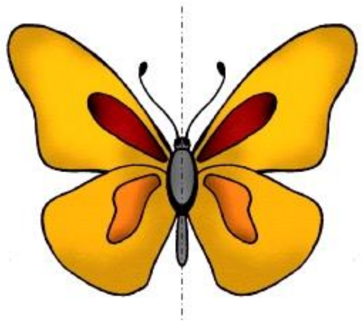
Simmetria nello spazio

Due oggetti sono detti simmetrici se è possibile, usando determinate operazioni (di simmetria), portare un oggetto in sovrapposizione con l'altro (oggetti sovrapponibili).
Un oggetto è dotato di simmetria se è possibile, con opportune operazioni, portare l'oggetto a sovrapporre se stesso e rendendo l'oggetto 'trasformato' indistinguibile dall'oggetto iniziale.

In sostanza una operazione di simmetria applicata ad un dato oggetto, *non modifica* l'oggetto.

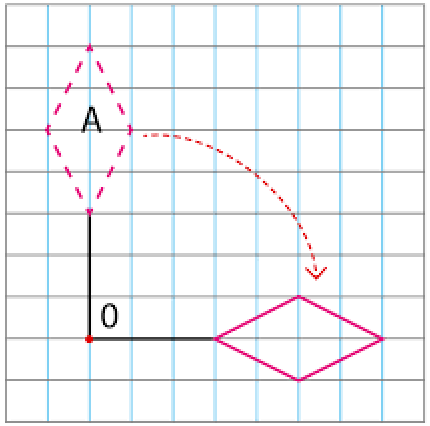




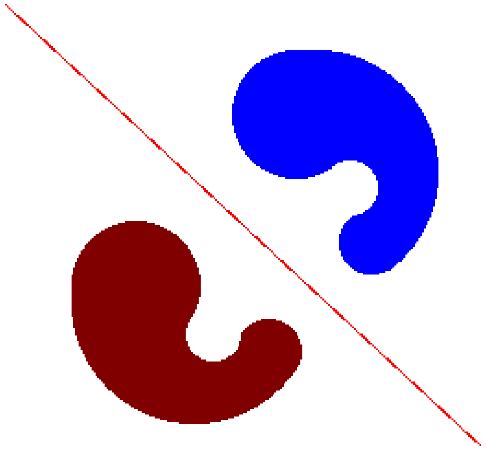


Operazioni di simmetria

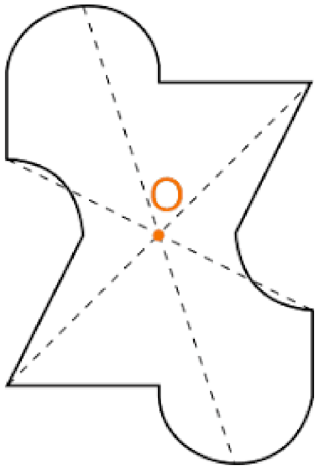
La sovrapposizione geometrica tra elementi simmetrici è raggiunta tramite l'applicazione di operazioni di simmetria che geometricamente portano alla sovrapposizione con il simmetrico dell'oggetto dato.
Operazioni di simmetria sono le Rotazioni, Riflessioni e l'Inversione



Rotazione

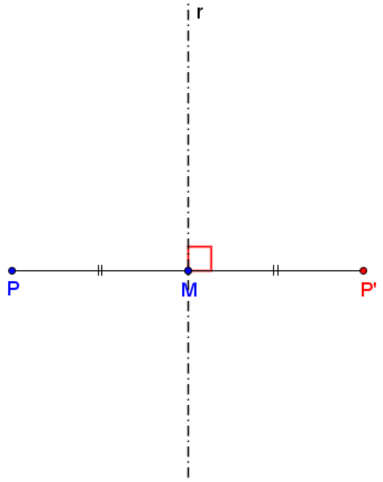


Riflessione



Inversione

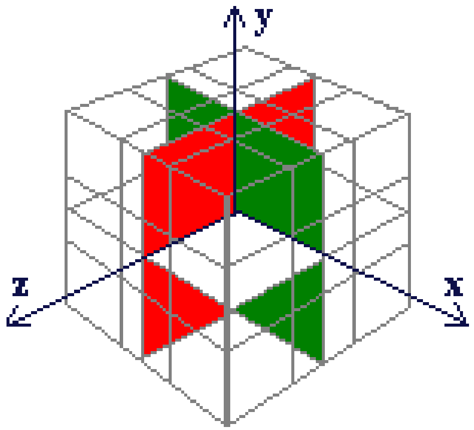
Riflessione



Nel caso bidimensionale abbiamo una *retta di riflessione*. La riflessione rispetto ad una retta lascia inalterati tutti i punti sulla retta medesima mentre gli altri punti sono trasformati per riflessione
Se y=0 è la retta di riflessione avremo che la trasformazione porta il punto P(x,y) nel punto P'(-x,y), ovvero:

$$x' = -x$$
$$y' = y$$

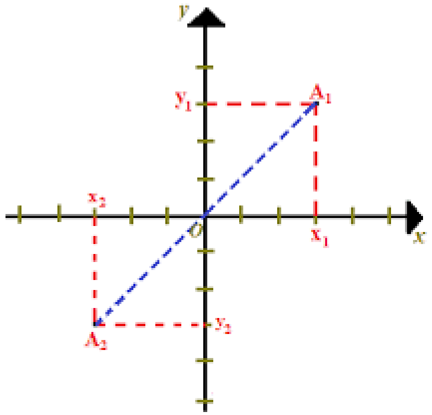
Nel caso tridimensionale la riflessione rispetto ad un piano lascia inalterati tutti i punti sul piano di riflessione mentre gli altri punti sono trasformati per riflessione.



Se il piano di riflessione è quello definito dagli assi X e Y, la riflessione porta il generico punto P(x,y,z) nel suo simmetrico (per riflessione) P'(x,y, -z)

Inversione

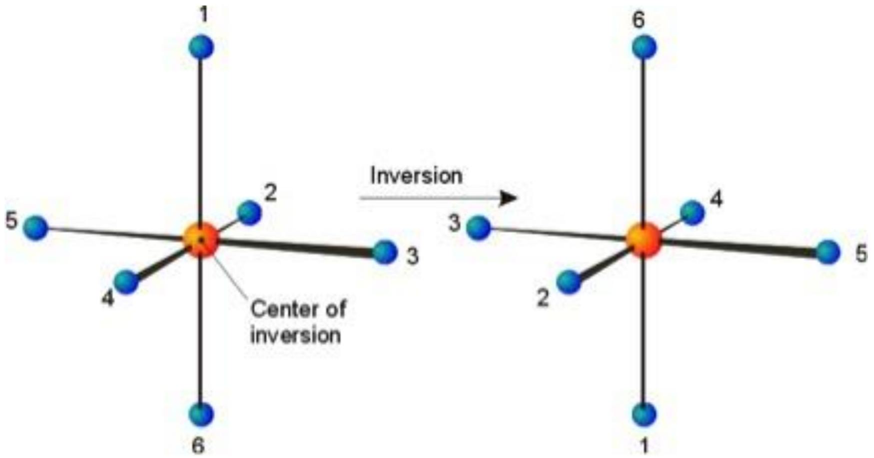
L'inversione può essere visto come la 'riflessione' rispetto ad un punto.
Se il centro di inversione coincide con l'origine del sistema di riferimento, avremo che la trasformazione porta il punto P(x,y) nel punto P'(-x, -y), ovvero:



$$x' = -x$$
$$y' = -y$$

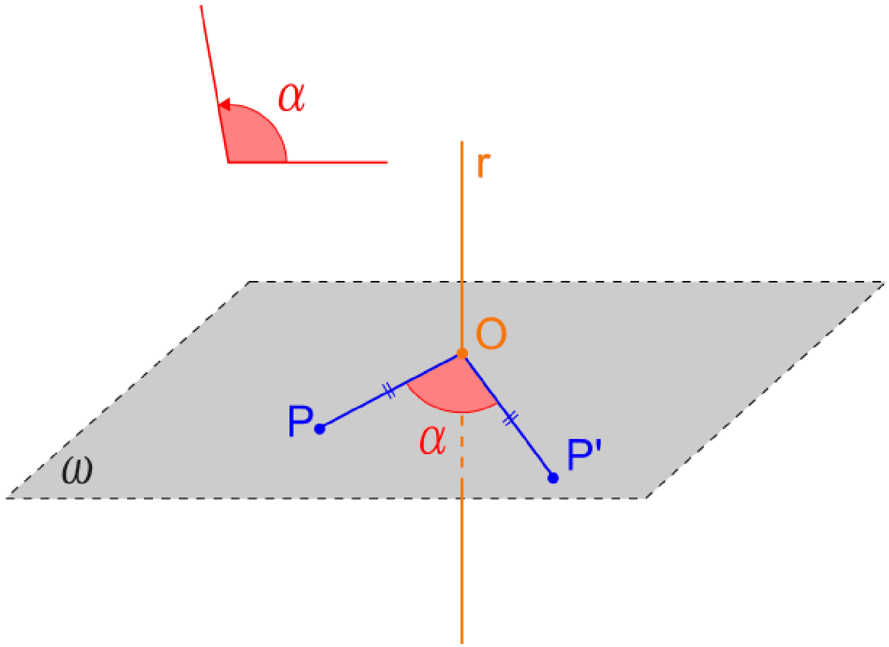
Nel caso tridimensionale:

$P(x,y,z) \rightarrow P'(-x,-y,-z)$



Rotazione

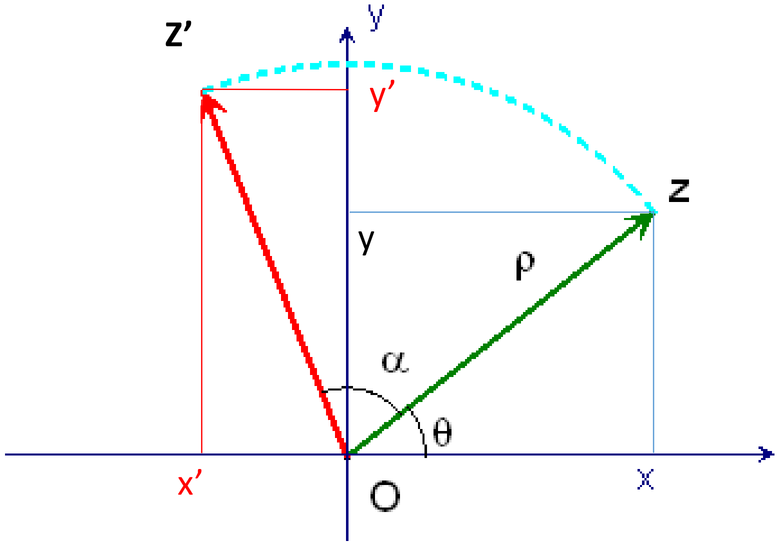
In geometria una rotazione è un’operazione che sposta in modo rigido un oggetto nello spazio ma che lascia inalterati i punti lungo un asse (di rotazione)



Lo spostamento rigido viene effettuato ruotando di un certo angolo l’oggetto intorno all’asse di rotazione. Di conseguenza le coordinate di un generico punto P(x,y) ruotato di un angolo α con nuove coordinate P(x’, y’)

Rotazione – calcolo delle nuove coordinate

Se consideriamo una rotazione nel piano, solo un punto (origine) non viene spostato (asse di rotazione perpendicolare al piano e passante per l'origine), mentre la rotazione trasforma le coordinate di un qualsiasi altro punto generico.
Le nuove coordinate del punto trasformato sono ottenute nel seguente modo:
Le coordinate del punto z possono essere espresse come:



$$x = \rho \cos \vartheta \qquad y = \rho \sin \vartheta$$

Dopo la rotazione di un angolo α, avremo che:

$$x' = \rho \cos(\alpha + \vartheta) \quad y' = \rho \sin(\alpha + \vartheta)$$

Ma è noto che:

$$\cos(\alpha + \vartheta) = \cos\alpha \cos\theta - \sin\alpha \sin\theta$$
$$\sin(\alpha + \vartheta) = \sin\alpha \cos\vartheta + \cos\alpha \sin\theta$$

$$x' = \rho\,[\cos\alpha \cos\theta - \sin\alpha \sin\theta]$$

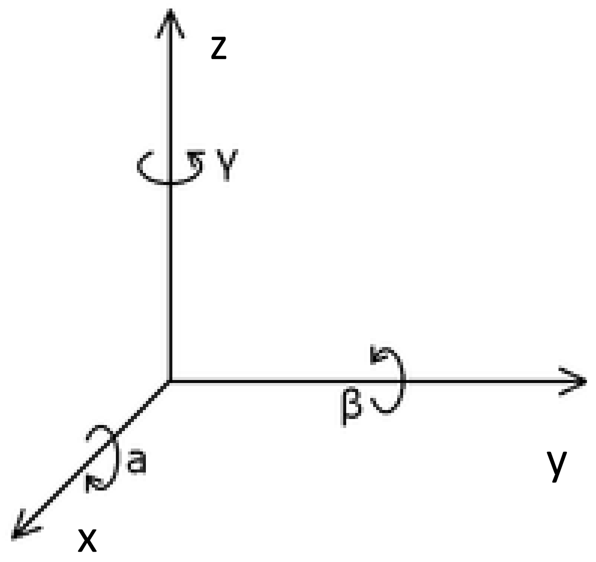
$$y' = \rho[\sin\alpha \cos\vartheta + \cos\alpha \sin\theta]$$

Per cui:

$$\boldsymbol{x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha}$$
$$\boldsymbol{y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha}$$

Rotazione – calcolo delle nuove coordinate

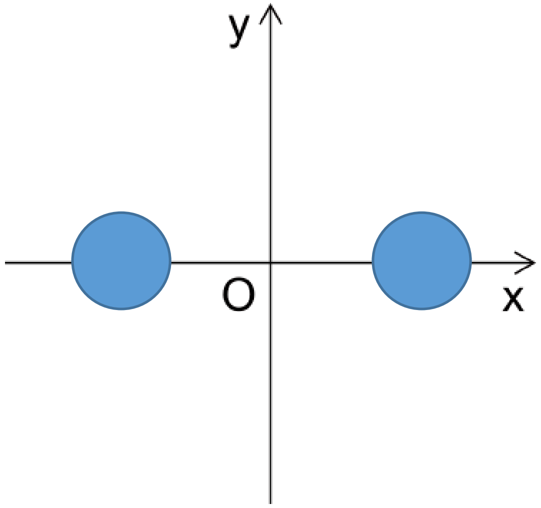
Nello spazio tridimensionale, supponendo che l'asse di rotazione si lungo z, le nuove coordinate a seguito della rotazione di un angolo α rispetto a z, saranno:



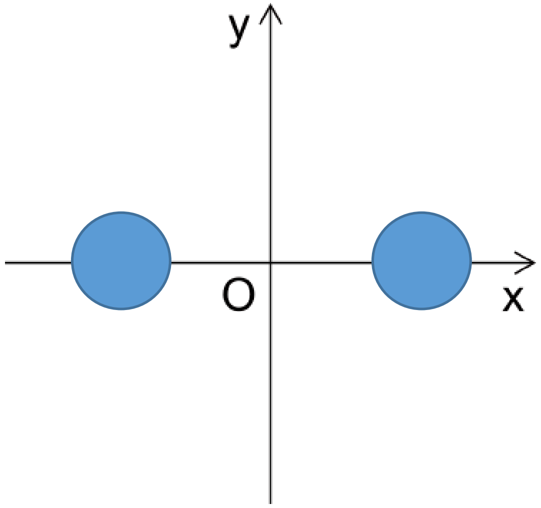
$$
\begin{gathered}
x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha \\
y' = x\cos\alpha + y\sin\alpha \\
z' = z
\end{gathered}
$$

Poiché i punti lungo z non sono modificati dalla rotazione

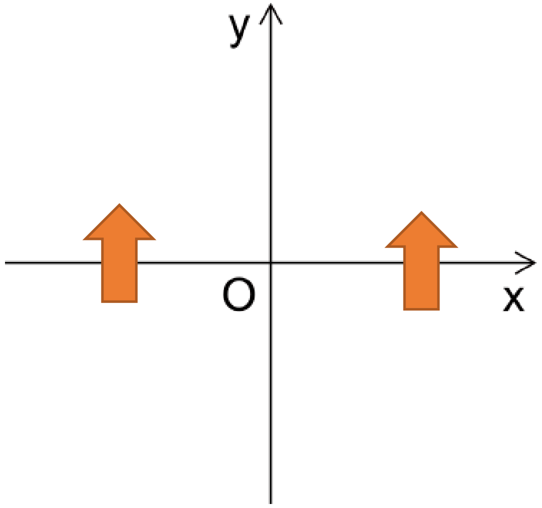
Differenza tra rotazione e riflessione



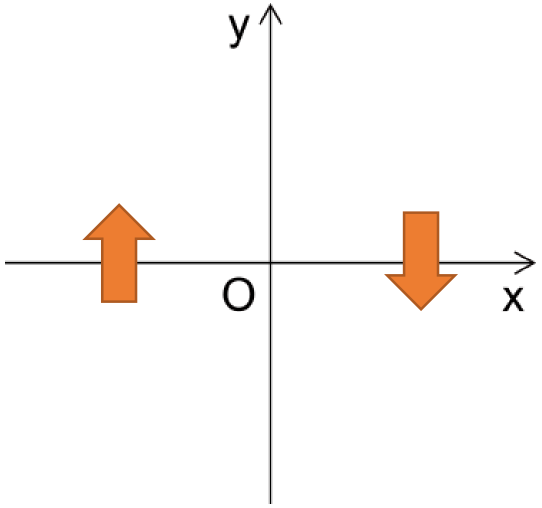
Riflessione
Lungo Y



Rotazione
Di 180 gradi
Asse perpendicolare
A XY



Riflessione
Lungo Y



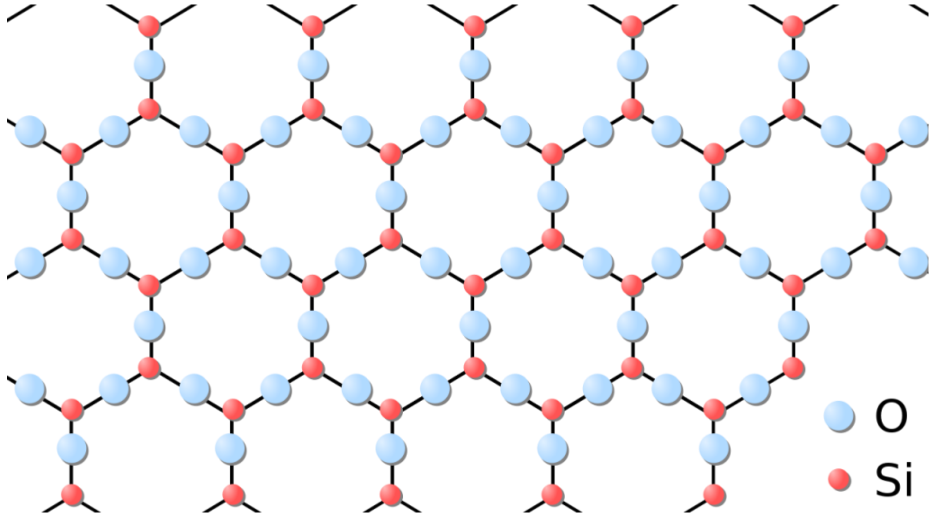
Rotazione
Di 180 gradi
Asse perpendicolare
A XY

Per quanto simili, una riflessione e una rotazione di 180°, producono effetti diversi

Simmetria Traslazionale

Fino ad ora abbiamo considerato solo simmetrie che **lasciano invariato almeno un punto** (*simmetrie puntuali*), tuttavia esistono anche simmetrie ottenibili per traslazione di oggetti e che *modificano tutti i punti*.

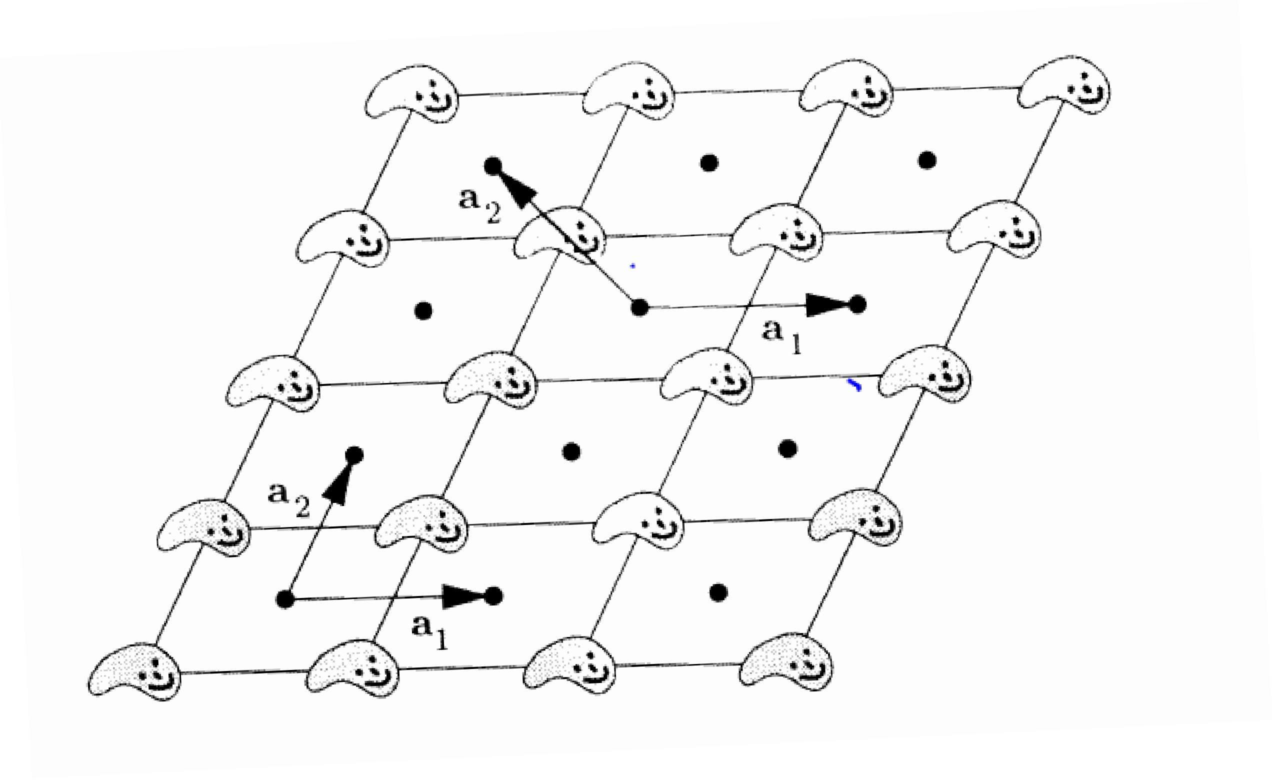
Supponiamo di avere un insieme (<u>teoricamente infinito</u>) di oggetti ***disposti regolarmente nello spazio***. La **traslazione** di una determinata entità lungo direzioni assegnate, può portare ad un nuovo insieme di oggetti indistinguibili dalla situazione originaria, cioè precedente la traslazione.



Reticolo

Se ho un insieme di oggetti che si ripetono regolarmente nello spazio lungo direzioni assegnate, posso associare all’oggetto un punto, per esempio il suo centro di massa (ma non necessariamente), e ridurre la ripetizione di oggetti ad una ripetizione di punti.

L’insieme regolare di punti definisce così un reticolo di ripetizione, associato ai periodi di ripetizione lungo le direzioni assegnate. Il reticolo di ripetizione è chiamato semplicemente **Reticolo** e le modalità con cui si ripete definiscono la sua **simmetria reticolare.**



Simmetria reticolare

Le unità che si ripetono sono diverse:
Quadrati, rettangoli, esagoni…
Ma **non** pentagoni, eptagoni etc…

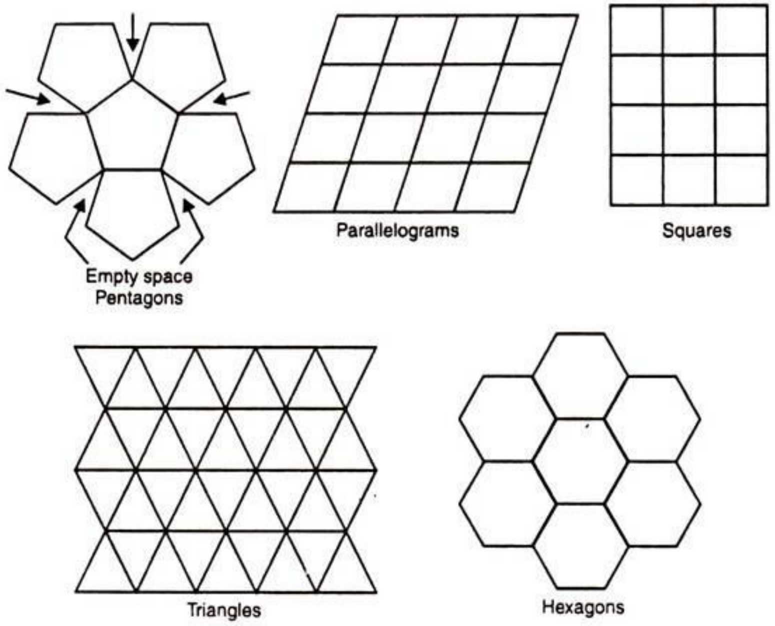


Fig. 2.21.