

G.V. MARGAGLIOTTI

**Appunti di
Introduzione alla Fisica
Nucleare e Subnucleare
a.a. 2020/21**

©2021 G.V.Margagliotti

email: giacomo.margagliotti@ts.infn.it

Tel: 040-5583376

Indice

1	Preambolo	7
1.1	I costituenti fondamentali della materia	8
1.2	Elementarità	10
1.3	Le interazioni fondamentali	11
1.4	Simmetrie e leggi di conservazione	13
1.5	La sperimentazione	14
1.6	Unità di misura	15
2	Il nucleo atomico	17
2.1	Nomenclatura	20
2.2	Tabella dei nuclidi	21
2.3	Proprietà del nucleo atomico	23
2.3.1	Masse dei nuclei	23
2.3.2	Misura di masse nucleari con metodi spettrometrici	24
2.3.3	Misura di masse nucleari tramite reazioni nucleari	27
2.3.4	Abbondanza degli elementi	30
2.3.5	Spin dei nuclei	32
2.3.6	Parità e nuclei	35
2.3.7	Natura delle forze nucleari e dimensioni dei nuclei	36
2.3.8	Modello a goccia e formula di Weizsäcker	45
2.3.9	Momenti elettrici e magnetici dei nuclei	53
2.3.10	Misure dei momenti elettrici e magnetici dei nuclei	62
2.3.11	Isospin	64
2.3.12	Ricapitolando	68
3	Struttura dei nuclei e modelli nucleari	71
3.1	Modello a gas di Fermi	72
3.2	Modello a shell (gusci)	75
3.2.1	Numeri Magici e struttura a shell	78
3.2.2	Potenziale nucleare nel modello a shell	79
3.3	Panoramica dei modelli nucleari	80

4	Instabilità dei nuclei	83
4.1	Decadimento radioattivo di una sola sostanza	85
4.2	Decadimento radioattivo di più sostanze	87
4.3	Tecniche radioattive di datazione	94
5	Decadimenti nucleari	101
5.1	Generalità sui decadimenti nucleari	101
5.2	Radioattività α	104
5.2.1	Soglia di instabilità	110
5.2.2	Teoria del decadimento α	111
5.3	Approccio perturbativo ai decadimenti	116
5.4	Radioattività β	121
5.4.1	Conversione interna	121
5.4.2	Decadimento β	122
5.4.3	Regole di Sargent	129
5.4.4	Teoria di Fermi dell'interazione debole	130
5.5	Radioattività γ	132
5.6	Cinematica relativistica del decadimento in due corpi	136
5.7	Fissione nucleare	140
6	Processi d'urto	149
6.1	Sezioni d'urto: introduzione operativa	153
6.2	Invarianti cinematici	162
6.3	Cinematica per urti di particelle leggere su particelle massive	167
6.4	La sezione d'urto di Rutherford: approccio classico	170
6.4.1	I risultati dell'esperimento di Rutherford	175
6.5	Approccio quantistico al concetto di sezione d'urto	179
6.6	Deduzione quantistica della sezione d'urto di Rutherford	182
6.7	La sezione d'urto di Mott	187
6.8	Misure dei fattori di forma (elettrici)	189
7	Reazioni nucleari in regime non relativistico	197
7.1	Leggi di conservazione	198
7.2	Condizioni sperimentali	199
7.3	Energetica delle reazioni nucleari	199
7.4	Diffusione da potenziale nucleare	205
7.5	Diffusione in onde parziali	208
7.6	Interazioni neutroni-nuclei	212
7.7	Reazioni con formazione del nucleo composto	217
7.8	Reazioni dirette	218
7.9	Reazioni di risonanza	219
7.10	Urti e risonanze	221

8 Stati adronici legati: quarkonia	229
8.1 Il charmonio	231
8.2 Il potenziale quark - antiquark	234
9 La forza nucleare	239
9.1 Sistema legato nucleone-nucleone	240
9.1.1 La diffusione nucleone-nucleone	240
9.1.2 Il deutone	245
9.2 Analogia atomico-molecolare	247
9.3 Il potenziale di Yukawa	250
10 Termodinamica nucleare	255
10.1 Descrizione termodinamica di un nucleo	257
10.2 Nucleo composto e caos quantistico	260
10.3 Fasi della materia nucleare	263
11 Fusione nucleare	271
12 Esercizi	279
12.1 Esercizi Capitolo 2	279
12.1.1 Esercizio 2 _ 1: Spin del protone	279
12.1.2 Esercizio 2 _ 2:	280
12.1.3 Esercizio 2 _ 3:	281
12.2 Esercizi Capitolo 4	282
12.2.1 Esercizio 4 _ 1: Decadimento α del ^{240}Pu	282
12.2.2 Esercizio 4 _ 2: Convertitore termoelettrico a plutonio	283
12.2.3 Esercizio 4 _ 3: Radon in un ambiente chiuso	285
12.2.4 Esercizio 4 _ 4: Attività specifica di un preparato con ^{89}Sr	286
12.2.5 Esercizio 4 _ 5: Vite medie dei componenti di una miscela	287
12.2.6 Esercizio 4 _ 6: Intensità di un fascio di neutroni in funzione della distanza dalla sorgente	289
12.2.7 Esercizio 4 _ 7: Vita media del ^{239}Pu	291
12.2.8 Esercizio 4 _ 8:	292
12.2.9 Esercizio 4 _ 9:	293
12.2.10 Esercizio 4 _ 10:	294
12.2.11 Esercizio 4 _ 11:	295
12.2.12 Esercizio 4 _ 12:	296
12.3 Esercizi Capitolo 5	298
12.3.1 Esercizio 5 _ 1:	298
12.3.2 Esercizio 5 _ 2:	298
12.4 Esercizi Capitolo 6	300

12.4.1	Esercizio 6 - 1: Sezione d'urto in funzione del parametro d'urto "b"	300
12.4.2	Esercizio 6 - 2: Fattore di forma elastico per un nucleo	302
12.4.3	Esercizio 6 - 3:	303
12.4.4	Esercizio 6 - 4:	304
12.4.5	Esercizio 6 - 5:	305
12.5	Esercizi Capitolo 11	307
12.5.1	Esercizio 11 - 1:	307
A	La scoperta del neutrone	309
B	Momenti elettrici dei nuclei	311
C	Calcolo della probabilità di decadimento α del ^{232}Th	317
D	Teoria di Fermi del decadimento β	321
E	Instabilità di un nucleo prolato	329
F	Richiami di Relatività ristretta	333
F.1	Coordinate parallele e trasverse	336
F.2	Legge relativistica del moto di una particella	338
G	Stato finale in tre corpi	341
H	Leggi di conservazione e loro violazioni	345
I	Acceleratori di particelle e nuclei	347
I.1	Acceleratori a caduta di potenziale	350
I.2	Acceleratori lineari	354
I.3	Orbite in campi magnetici	355
I.4	Il betatrone	361
I.5	Il ciclotrone	367
I.6	Il sincrotrone e il proto-sincrotrone	370
J	I raggi cosmici	375
J.1	Alcune caratteristiche dei raggi cosmici	377
J.2	Meccanismi d'accelerazione alla Fermi	380

Capitolo 1

Preambolo

La base concettuale e gli strumenti matematici necessari allo studio dei processi in cui sono coinvolti nuclei e particelle si fondano per la gran parte sulla meccanica quantistica, sulla relatività ristretta e sull'elettromagnetismo, con importanti utilizzi della fisica statistica.

La Fisica Nucleare e Subnucleare studia le proprietà individuali e collettive di particelle e nuclei atomici e i processi in cui essi sono, in vario modo, implicati.

Questi processi possono coinvolgere una singola particella o nucleo, o essere provocati dal concorso di più particelle o nuclei. Nel primo caso si tratta della *propagazione* di una particella libera, o del *decadimento*, in cui una particella o un nucleo si trasformano spontaneamente in altre particelle o nuclei. Nel secondo caso si tratta di *reazioni nucleari* provocate dall'interazione di una particella o di un nucleo, con altre particelle, o nuclei.

Si osservi che la descrizione di molecole e atomi si avvale della meccanica quantistica non relativistica, anche in quanto le strutture costituenti le molecole (atomi) e gli atomi (nuclei ed elettroni atomici), vi si muovono con velocità tipicamente molto inferiori a quella della luce nel vuoto e le energie cinetiche che caratterizzano tali moti sono molto inferiori agli equivalenti energetici delle masse delle strutture coinvolte. Ciò vale per lo più anche per i componenti dei nuclei, i nucleoni, all'interno dei nuclei stessi.

I costituenti delle particelle adroniche (quark e gluoni) si muovono invece a velocità molto alte, prossime a c , e le energie cinetiche che caratterizzano il loro moto sono dell'ordine o maggiori agli equivalenti energetici delle loro masse, per cui non si può prescindere da un approccio relativistico nel descriverne la fenomenologia.

1.1 I costituenti fondamentali della materia

La ricerca dei mattoni fondamentali della materia ha condotto alla scoperta di strutture sempre più piccole che sono via via risultate a loro volta sistemi composti da strutture ancora più piccole. Alla fine del 19° secolo si era ormai convinti che la materia fosse composta da atomi. L'esistenza di un centinaio di elementi diversi con proprietà periodicamente ricorrenti, era però una chiara indicazione che anche gli atomi possedessero una struttura interna e non fossero *indivisibili*.

Il moderno concetto di atomo si sviluppò agli inizi del 20° secolo grazie soprattutto ai risultati degli esperimenti effettuati da Geiger e Mardsen su stimolo di Rutherford.

Un atomo è composto da un nucleo denso circondato da una nuvola di elettroni. Il nucleo è a sua volta scomponibile in costituenti più piccoli, i *nucleoni*, e questi sono di due tipi: *protoni* e *neutroni*.

Prima della scoperta del neutrone¹ (Chadwick², nel 1932) si pensava che i nuclei contenessero protoni ed elettroni, ma che questi ultimi non possano essere annoverati fra i costituenti dei nuclei si deduce, come si vedrà, anche da considerazioni basate sulla combinazione di conservazione della carica e dello spin, oltre che da una analisi quanto-meccanica dell'ipotetico nucleo con elettroni fra i componenti.

Nel 1928 Dirac, lavorando a un'estensione della meccanica quantistica che coniugasse l'equazione di Schrödinger con la relatività ristretta, formulò un'equazione che prevede, come soluzioni, anche elettroni di energia negativa. Nel 1931, sempre Dirac, concluse che le nuove strutture previste dalla sua equazione andavano interpretate come elettroni che si muovessero *a ritroso* nel tempo, ovvero equivalentemente, come delle nuove particelle che si muovono nel solito modo, rispetto al tempo, ma posseggono carica elettrica opposta a quella dell'elettrone, essendo per il resto uguali a quest'ultimo. Vennero chiamate *positroni*, o anche *anti-elettroni*. Queste nuove particelle, anzi *anti-particelle*³, furono scoperte l'anno successivo da Anderson, e quindi da Blackett e Occhialini fra i prodotti delle interazioni dei raggi cosmici⁴ con l'atmosfera terrestre.

Il concetto di *antiparticella* si estese anche alle altre particelle note o via via previste, trovando costante riscontro nella loro individuazione sperimentale (l'antiprotone fu scoperto da Segrè e Chamberlain nel 1955).

Oggi si assume che ad ogni particella sia associata un'antiparticella (talvol-

¹Si veda l'Appendice [A](#).

²J.Chadwick "Possible Existence of a Neutron" - Nature 129 (1932) 312. L'esistenza del neutrone come elemento costituente il nucleo atomico assieme al protone fu suggerita da E.Rutherford nel 1920.

³Per antiparticelle e Dirac si veda: P.A.M. Dirac, Theory of electrons and positrons, Nobel Lecture, Dec. 12, 1933

⁴Si veda il paragrafo ??

ta le due coincidono, come nel caso del fotone), e inoltre un'antiparticella è caratterizzata dall'averne massa, spin e vita media uguali, carica elettrica, momento magnetico, numero barionico, leptonico o altro numero quantico uguali in valore assoluto ma di segno opposto rispetto alla particella associata. Il positrone è la sola antiparticella ad avere un nome specifico, per il resto vengono indicate dal prefisso "anti". Il simbolo utilizzato per indicare un'antiparticella è solitamente lo stesso che designa la corrispondente particella, ma con una barretta posta sopra il simbolo. Non è casuale l'analogia con l'indicazione di una quantità complessa coniugata, data la coniugazione fra la funzione d'onda associata a una particella e quella associata alla sua antiparticella.

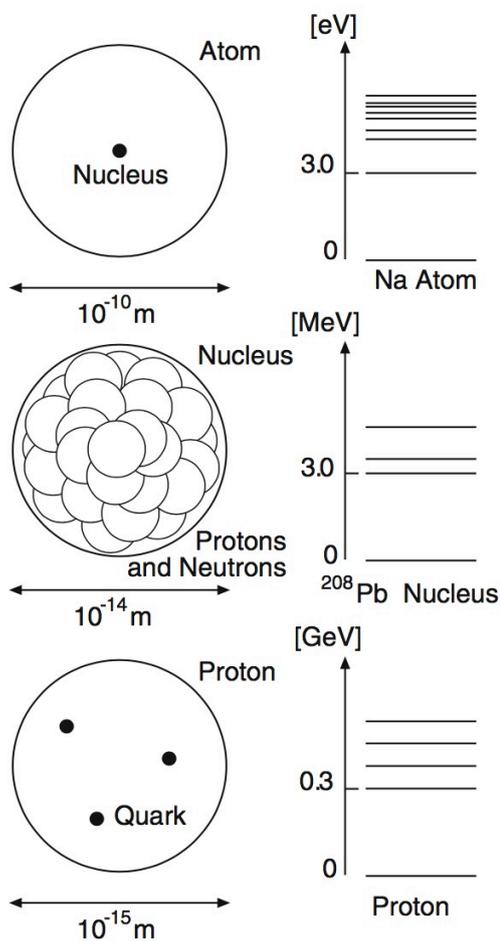


Figura 1.1: Illustrazione delle scale dimensionali tipiche del mondo atomico, nucleare e subnucleare

Pauli, nel 1930, postulò l'esistenza di un'ulteriore particella, chiamata poi *neutrino*, per poter conciliare il rispetto delle leggi di conservazione di ener-

gia, impulso e momento angolare, con gli allora recenti risultati dello studio del *decadimento* β .

Nei decenni successivi, con l'avvento e il successivo sviluppo degli acceleratori di particelle, si trovò che protoni e neutroni sono i due membri più leggeri di una numerosa famiglia di particelle dette *adroni*. Ad oggi se ne conoscono più di 200 e come fu per gli atomi, possono essere classificati in gruppi caratterizzati da proprietà simili.

Apparve dunque chiaro che essi non potessero essere considerati costituenti fondamentali della materia e fu verso la fine degli anni '60 del 20° secolo che col modello a quark si riuscì a mettere ordine in questo zoo di adroni. Ogni adrone può essere descritto come un'opportuna combinazione di due o tre quark.

Un'idea schematica delle scale dimensionali che caratterizzano le diverse gerarchie della struttura della materia allo stato attuale delle conoscenze è illustrata in figura 1.1.

I due tipi di mattoni costitutivi la materia ad oggi considerati fondamentali sono i *leptoni* che comprendono elettroni e neutrini, e i *quark*. Esperimenti di diffusione hanno mostrato per essi un limite superiore dimensionale pari a 10^{-18} m, ovvero praticamente puntiformi se confrontati ad esempio con i protoni che hanno dimensioni lineari dell'ordine di 10^{-15} m.

Leptoni e quark hanno spin $1/2$, e sono quindi dei fermioni.

Contrariamente a quanto avvenuto per atomi, nuclei e adroni, non si sono osservati stati eccitati di leptoni o quark, per cui si suppone ad oggi che essi siano particelle effettivamente elementari.

Il loro numero comunque non è piccolo: si conoscono sei diversi tipi di leptoni e sei diversi tipi di quark, con le loro rispettive antiparticelle, per un totale di 24. Essi sono raggruppati in quelle che vengono chiamate *generazioni* o *famiglie*, secondo alcune loro caratteristiche comuni.

1.2 Elementarità

È importante chiarire quale sia il criterio con cui stabilire che un sistema fisico osservato è un oggetto elementare, cioè privo di struttura interna e che si comporta a tutti gli effetti come un punto materiale, nel senso che non può assorbire energia dall'esterno trasformandola in energia interna. Tutta l'energia trasferita dall'esterno a una particella elementare si deve quindi ritrovare come energia cinetica di quest'ultima. Se il sistema ha gradi di libertà interni, parte dell'energia trasferita può eccitarli, per cui l'energia cinetica associata al moto del baricentro del sistema non dà conto di tutta l'energia trasferita.

Nel descrivere il mondo microscopico non si può prescindere dalle leggi della meccanica quantistica, per cui l'energia dei gradi di libertà interni di una particella non si distribuisce in modo continuo, ma può assumere solo una

serie discreta di valori, E_0, E_1, E_2, \dots . Quindi per mettere in luce l'esistenza di gradi di libertà interni e determinare di conseguenza l'eventuale natura composita di una particella, si deve trasferire un'energia almeno pari alla soglia $E_s = E_1 - E_0$. Sondando la particella con energie inferiori ad E_s , essa si comporta a tutti gli effetti come elementare. Per questo motivo lo studio della struttura interna delle particelle richiede energie sempre più elevate. Una conseguenza inevitabile è anche che il carattere *elementare* di una particella non può essere definitivamente *dimostrato sperimentalmente*: quanto si può affermare è soltanto che fino a una certa scala d'energia la particella in esame si comporta come una particella elementare. In base a queste considerazioni è possibile stabilire che una particella non è elementare anche senza essere in grado di osservarne i componenti, semplicemente sulla base della sua capacità di assorbire energia per eccitazione dei modi interni.

1.3 Le interazioni fondamentali

Le interazioni fra particelle e nuclei hanno luogo in base ai tipi di *forze* che agiscono fra essi. Queste sono la *forza gravitazionale* che per la sua debole intensità può essere trascurata ai fini dei fenomeni che coinvolgono nuclei e particelle, tranne nel caso di particolari strutture cosmiche (stelle ai neutroni, buchi neri, ...), la *forza elettromagnetica*, la *forza debole*, coinvolta nei decadimenti β , e la *forza forte* che lega fra loro i quark a formare ad esempio protoni e neutroni. La forza che lega fra loro i nucleoni a formare i nuclei, detta anche *forza nucleare*, non è una forza fondamentale ma piuttosto un effetto secondario della forza forte e può in un certo qual modo essere paragonata concettualmente alle forze *chimiche* che altro non sono se non delle forme di interazioni elettromagnetiche che legano gli atomi a formare molecole.

Secondo l'attuale modo di vedere, le interazioni fra particelle sono mediate dallo scambio di *bosoni vettori*, particelle con spin 1. Essi sono i *fotoni* per l'interazione elettromagnetica, i *gluoni* per le interazioni forti, i bosoni W^+, W^- e Z^0 per le interazioni deboli. I diagrammi in figura 1.2 mostrano esempi di interazioni fra due particelle tramite lo scambio di bosoni vettori; leptoni e quark sono rappresentati da linee dritte, i fotoni da linee ondulate, i gluoni da linee ad elica, i bosoni vettori dell'interazione debole da linee tratteggiate. A ognuna di queste interazioni è associata una tipologia di *carica* che la percepisce: la carica elettrica, la carica debole e la carica forte. Quest'ultima è anche detta *carica di colore* o brevemente *colore*. Si assume quindi che una particella possa sentire gli effetti di una particolare forza se e soltanto se trasporta la carica corrispondente:

- la carica debole è trasportata sia dai leptoni che dai quark;
- la carica elettrica è trasportata dai quark e da alcuni leptoni;

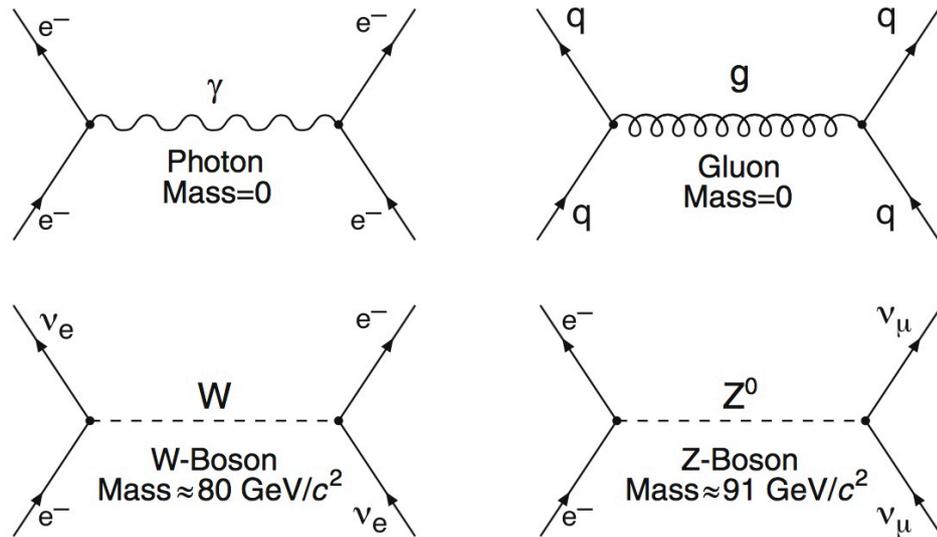


Figura 1.2: Diagrammi illustrativi dell'interazione fra particelle tramite lo scambio di bosoni vettori.

- la carica di colore è trasportata dai quark ma non dai leptoni.

I bosoni vettori mediatori dell'interazione debole sono molto pesanti ($m_W \approx 80 \text{ GeV}/c^2$ e $m_Z \approx 91 \text{ GeV}/c^2$ ⁵), e in base al principio di indeterminazione di Heisenberg se ne deduce che possono essere prodotti solo come particelle virtuali, prodotti intermedi di vita brevissima che si manifestano in processi d'urto o di decadimento. Da ciò discende il brevissimo raggio d'azione dell'interazione debole.

Essendo invece il fotone privo di massa, ne deriva un raggio d'azione infinito per l'interazione elettromagnetica.

I gluoni hanno massa nulla come i fotoni, ma mentre questi ultimi non trasportano carica elettrica, i gluoni trasportano invece carica di colore. Essi quindi interagiscono fra loro e ciò conduce a una riduzione del loro raggio d'azione efficace sino a valori compatibili con le dimensioni tipiche di un componente del nucleo, protone o neutrone, detto genericamente nucleone. Il corto raggio d'azione delle interazioni debole e forte, unitamente alla sostanziale neutralità elettrica della materia, quando non perturbata, fa sostanzialmente sì che nuclei e particelle possano essere considerati alla stregua di sistemi fisici isolati, per i quali valgono quindi le varie leggi di conservazione.

⁵Si veda il successivo paragrafo 1.6, sulle unità di misura tipiche del mondo nucleare e subnucleare.

1.4 Simmetrie e leggi di conservazione

Per un sistema classico le leggi di conservazione di energia, impulso e momento angolare sono conseguenza del fatto che le interazioni sono invarianti rispetto alle osservabili canoniche loro coniugate, cioè tempo, spazio e angoli. Ciò equivale anche a dire che le leggi fisiche sono indipendenti dal tempo, dal luogo e dall'orientazione nello spazio.

Le leggi della fisica classica sono anche invarianti per riflessione, ovvero la loro forma non cambia se i fenomeni che descrivono sono osservati da un sistema di riferimento destro-giro o da uno levo-giro. Ciò vale anche per la meccanica quantistica non-relativistica.

In aggiunta, nella meccanica quantistica non-relativistica vale l'importante proprietà di simmetria per riflessione. Si dice che un sistema fisico ha *parità* P negativa o positiva a seconda che la sua funzione d'onda cambi o non cambi segno per riflessione. Ad esempio la funzione d'onda spaziale di un sistema legato con momento angolare $\ell\hbar$ ha parità $P = (-1)^\ell$. La parità acquisisce così il ruolo di un *numero quantico* che risulta conservarsi per quelle leggi della natura che presentano simmetria destra-sinistra, ovvero sono invarianti per riflessione \mathcal{P} nello spazio.

La conservazione della parità in ambito atomico implica ad esempio le regole di selezione per le transizioni elettromagnetiche.

Il concetto di parità è stato poi generalizzato alla meccanica quantistica relativistica assegnando un valore di *parità intrinseca* P sia alle particelle che alle antiparticelle. I bosoni e le loro antiparticelle hanno la stessa parità, mentre fermioni e antifermioni hanno parità opposte.

In fisica nucleare la conservazione o meno del carattere di parità della funzione d'onda di un sistema nucleare gioca un ruolo importante nello stabilire condizioni restrittive in reazioni nucleari che possono essere peraltro possibili energeticamente o sotto altre condizioni.

Oltre alla parità viene poi introdotto un operatore C che tiene conto di un'ulteriore importante simmetria e che trasforma le particelle nelle rispettive antiparticelle e viceversa. Esso viene chiamato *coniugazione di carica* in quanto la trasformazione di una particella nella propria antiparticella implica il conseguente cambiamento del segno della carica.

Agli autostati di C è abbinato un numero quantico detto *C-parità* che si conserva per ogni interazione o trasformazione simmetrica rispetto a C .

Un'ulteriore tipo di simmetria discende poi dal fatto che certi gruppi, o *multipletti*, di particelle si comportano praticamente allo stesso modo rispetto all'interazione forte o a quella debole. Particelle appartenenti a tali multipletti possono essere viste e descritte alla stregua di diversi stati di una stessa particella. Per caratterizzare questi stati si introducono due ulteriori tipi di numeri quantici detti rispettivamente *isospin forte* e *isospin debole*, e anche per essi valgono delle leggi di conservazione. L'isospin forte è talvolta detto anche *spin isotopico* o *spin isobarico*.

1.5 La sperimentazione

Gli esperimenti in fisica nucleare e delle particelle sono effettuati, tranne poche eccezioni, utilizzando gli acceleratori di particelle.

La sperimentazione in fisica nucleare e delle particelle può essere suddivisa secondo due filoni fondamentali: quello delle misure di *scattering* (*urto* e *diffusione*) e quello delle misure *spettroscopiche*.

- Esperimenti di *scattering*. In questi casi si utilizzano fasci di particelle o nuclei di energia e impulso noti e li si dirige contro l'oggetto da studiare, il *bersaglio*.

L'interazione fra le particelle del fascio e il bersaglio causa modificazioni degli stati di entrambi, e il loro studio permette di ottenere informazioni sulle proprietà delle particelle e dei nuclei coinvolti, e sulle forze in gioco.

- Esperimenti di *spettroscopia*, in cui si analizzano i prodotti di decadimento di stati eccitati studiando così sia le proprietà di questi ultimi che le interazioni in gioco fra i costituenti della struttura che decade. Dalla figura 1.1 si osserva che le energie d'eccitazione di un sistema fisico crescono al diminuire delle sue dimensioni caratteristiche. Per produrre simili stati eccitati sono quindi necessari fasci di particelle/nuclei di energie sempre più alte.

Lo studio dei prodotti delle reazioni di diffusione o dei decadimenti richiede di poter rivelare questi prodotti. Nel caso essi siano elettricamente carichi la loro rivelazione si attua sfruttando l'interazione fra essi e sostanze in forma gassosa, liquida, costituite da solidi amorfi o cristallini. Queste interazioni danno luogo in tali materiali a segnali elettrici o elettro-ottici che vengono sfruttati allo scopo.

La rivelazione di particelle elettricamente neutre si effettua indirettamente, per il tramite di particelle cariche secondarie urtate e diffuse dalle prime entro i materiali rivelatori.

Le informazioni direttamente desumibili su particelle e nuclei coinvolti in interazioni e decadimenti concernono: il loro numero; le coordinate spaziali delle successive posizioni da essi occupate lungo le traiettorie percorse e talvolta i tempi associati, ottenendo così le velocità; le energie cinetiche possedute e/o frazioni di esse; le curvature delle traiettorie in campi elettrici e/o magnetici, da cui si possono dedurre gli impulsi e conoscendo già le velocità anche le masse; le orientazioni dei loro momenti angolari;

Un fattore importantissimo è rappresentato dalle caratteristiche di efficienza e risoluzione di questi sistemi di rivelazione, che determinano la precisione e l'accuratezza con cui le osservabili fisiche indicate possono essere misurate ⁶.

⁶Un approccio storico-cronologico dell'avvincente avventura che costituisce la ricerca del "di cosa è fatto l'universo" è riportata nel capitolo ??.

1.6 Unità di misura

Durante l'arco di tutto questo insegnamento si utilizzerà il Sistema Internazionale (SI) di misura, per cui le varie costanti o parametri saranno sempre esplicitamente indicate. Date alcune peculiarità dell'ambito della fisica atomica e nucleare, si presentano comunque qui delle unità di misura specifiche, alcune di derivazione storica, e se ne discutono le conversioni rispetto alle unità del SI.

L'energia si misura tipicamente in elettron-Volt (eV), che corrisponde all'energia cinetica acquisita da una particella di carica elementare $e \cong 1.602 \times 10^{-19}$ C che viene accelerata dalla differenza di potenziale di 1 Volt (1 eV $\cong 1.602 \times 10^{-19}$ J), o in potenze multiple di ordine 3 dell' eV.

È oltretutto casuale la circostanza che l'elettron-Volt risulti una scala appropriata per le transizioni atomiche; quelle nucleari coinvolgono invece energie dell'ordine del MeV.

Una quantità che spesso ricorre è la costante di Boltzmann k_B

$$\begin{aligned} k_B &= 1.38064852(79) \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1} = \\ &= 8.61673324(78) \times 10^{-5} \text{ eV K}^{-1} \end{aligned} \quad (1.1)$$

Le unità di misura lineari tipiche dell'ambito nucleare e subnucleare sono dell'ordine di 10^{-15} m, che corrispondono grosso modo alle dimensioni lineari di un nucleone; questo ha portato a introdurre la comoda unità di misura detta *fermi*, o *femtometro* (1 fm = 10^{-15} m).

Le aree vengono tipicamente misurate in *barn*: 1 barn = 10^{-28} m² = 10^{-24} cm².

La velocità c di propagazione nel vuoto di un'onda elettromagnetica, quindi anche della luce, è la stessa in ogni sistema di riferimento inerziale e rappresenta un limite insuperabile. Nel 1983 si è deciso di assumere come esatto (quindi privo d'errore) il valore di c ponendolo pari a

$$c = 299792458 \text{ m/s} \quad (1.2)$$

il che ha anche permesso di ridefinire l'unità di misura della lunghezza, il metro, come la distanza percorsa dalla luce in un intervallo temporale pari a $1/299792458$ di secondo.

In relatività ristretta l'energia di una particella è legata alla sua massa m e al suo impulso p dalla formula⁷ $E^2 = m^2 c^4 + \vec{p}^2 c^2$; misurando le masse in eV/ c^2 e gli impulsi in eV/ c , tutte le formule della cinematica relativistica si semplificano, nel senso che le tre quantità si possono sommare semplicemente

⁷Vedi Appendice **F**

senza introdurre i fattori c .

Per il fattore di conversione fra kg ed eV, considerando una massa di 1 kg, l'equivalente in energia è dato da

$$E(1 \text{ kg}) = 1 \text{ kg} \cdot c^2 \cong 9 \cdot 10^{16} \text{ kg (m/s)}^2 \cong 9 \cdot 10^{16} \text{ J} \quad (1.3)$$

Poichè $1 \text{ J} \cong 1/(1.602 \cdot 10^{-19}) \text{ eV}$, ne segue:

$$1 \text{ kg} \cdot c^2 \cong \frac{9 \cdot 10^{16}}{1.602 \cdot 10^{-19}} \cong 5.62 \cdot 10^{35} \text{ eV} \quad (1.4)$$

da cui infine

$$1 \text{ kg} \cong 5.62 \cdot 10^{35} \text{ eV}/c^2 \quad (1.5)$$

Le masse m_e dell'elettrone ed m_p del protone⁸ che valgono rispettivamente circa $9.109 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ e circa $1.673 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$, possono essere quindi espresse come circa $0.511 \text{ MeV}/c^2$ e circa $938.27 \text{ MeV}/c^2$; la massa m_n del neutrone vale circa $1.675 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$, ovvero $939.56 \text{ MeV}/c^2$.

Un'unità molto usata per le masse, specialmente in ambiti tecnico-applicativi e spettrometrici, è la cosiddetta *unità di massa atomica u*, definita come 1/12 della massa atomica dell'isotopo ^{12}C del Carbonio:

$$1u = \frac{1}{12} M_{^{12}\text{C}} = 931.494 \text{ MeV}/c^2 = 1.66054 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \quad (1.6)$$

I momenti angolari, la cui dimensione fisica è omogenea all'*azione*, si misurano in unità di \hbar . Il valore del quanto d'azione è

$$\hbar = h/2\pi \cong 1.055 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s} \cong 6.582 \cdot 10^{-22} \text{ MeV} \cdot \text{s} \quad (1.7)$$

I momenti magnetici μ si misurano in unità dette *magnetoni elementari*:

$$\mu = q\hbar/2M \quad (1.8)$$

con q il valore assoluto della carica elettrica della particella ed M la sua massa. Si considerano usualmente il *magnetone di Bohr* μ_B ($q = e$ ed $M = m_e$), il *magnetone nucleare* μ_N ($q = e$ ed $M = m_p$).

Ricordando anche che $c = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$, la costante di struttura fine è

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} \cong \frac{1}{137.036} . \quad (1.9)$$

⁸Per un elenco aggiornato dei valori delle masse delle particelle e rispettivamente dei nuclei si vedano: C. Patrignani et al., "The Review of Particle Physics (2016)" - Chin. Phys. C40 100001 (2016), [<http://www-pdg.lbl.gov>]; e Jagdish K.Tuli, "Nuclear Wallet Cards 7th edition" - April 2005, Brookhaven National Laboratory, US National Nuclear Data Center, [<http://www.nndc.bnl.gov/chart/>]

Capitolo 2

Il nucleo atomico

Se si vuole individuare una "data di nascita" per la fisica nucleare va scelto il 1896, l'anno in cui H. Becquerel osservò che una lastra fotografica vergine e protetta dalla luce, era stata "impressionata" da radiazioni emanate da frammenti di minerale d'uranio, scoprendo in tal modo, accidentalmente, la radioattività.

Nel 1904 J.J. Thomson, che sette anni prima aveva scoperto l'elettrone, propose un modello di atomo in cui immaginava che il volume dell'atomo stesso fosse costituito da una distribuzione diffusa di carica positiva nella quale erano immerse le cariche negative elettroniche in modo simile a come lo sono le *wette passite in un panettone* e tali da rendere l'atomo elettricamente neutro nella sua globalità.

Nel 1909 E. Rutherford ideò e sovrintese l'esperimento che porta il suo nome, ma fu eseguito da H.W. Geiger ed E. Marsden¹, in cui bombardando con particelle α un bersaglio costituito da un sottile foglio d'oro, si voleva sottoporre ad analisi il modello di Thomson. Sorprendentemente la diffusione osservata di particelle α contraddiceva l'ipotesi di Thomson, mostrando che l'attraversamento del bersaglio d'oro produceva un numero di particelle α deviate ad angoli grandi più elevato di ben 5 ordini di grandezza rispetto a quanto si potesse prevedere da semplici fluttuazioni statistiche basate sull'ipotesi dell'atomo alla Thomson. Fu appunto Rutherford che analizzando i risultati dell'esperimento, nel 1911 propose che ciò fosse dovuto al fatto che l'atomo non va considerato alla stregua di un *panettone* ma piuttosto di una specie di *sistema planetario*, con le cariche positive concentrate in un *nucleo* piccolo, duro e massivo, posto al centro e gli elettroni, molto leggeri, che orbitano attorno a questo nucleo sottoposti al suo potenziale elettrico coulombiano.

La stima delle dimensioni del nucleo che Rutherford ottenne, $10^{-15} \div 10^{-14}$ m, lo portò ad affermare che un atomo è sostanzialmente *vuoto*, essendo le dimensioni delle *orbite atomiche* dell'ordine di 10^{-10} m.

¹Si veda il paragrafo [6.4](#)

La constatata *durezza* del nucleo lo portò poi a proporre un'immagine strutturale *naïf* ma per molti versi estremamente realistica, in cui lo si immagina come costituito da un raggruppamento di sferette quasi rigide (nucleoni), a massimo impacchettamento, da cui la forma che tende ad una sfera all'aumentare del numero A di nucleoni, di volume direttamente proporzionale ad A , per cui il raggio R di questa "sfera", proporzionale alla radice cubica del volume, lo è di conseguenza anche ad $A^{1/3}$:

$$R(A) = r_0 A^{\frac{1}{3}} \quad (2.1)$$

con r_0 parametro da determinare.

Un'ulteriore conferma sperimentale al modello atomico, con carica concentrata nel nucleo come multiplo intero di cariche positive protoniche, venne anche dalle misure di H. Moseley che nel 1913 pubblicò un lavoro contenente la sua famosa "legge empirica" che correla i numeri atomici Z degli elementi con la frequenza ν dei raggi X emessi (si veda la figura [2.1](#))

$$\sqrt{\nu} = k_1(Z - k_2) \quad (2.2)$$

Le costanti k_1 e k_2 dipendono dal tipo di riga d'emissione, e k_2 in particolare tiene conto dell'effetto di schermo attuato sulla carica Ze del nucleo dagli elettroni atomici delle *shell* più vicine al nucleo stesso. La legge di Moseley può essere direttamente dedotta dal modello atomico di Bohr che ha come cardine appunto l'ipotesi di un nucleo alla Rutherford per ogni atomo. È sufficiente partire dall'espressione per l'energia $E_{i,f}$ legata alla transizione fra uno stato quantico iniziale " i " e uno finale " f " di uno stesso atomo idrogenoide, ottenibile dal modello di Bohr

$$E_{i,f} = h\nu_{i,f} = E_i - E_f = \frac{m_e q_e^2 q_Z^2}{8h^2 \epsilon_0^2} \left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right) \quad (2.3)$$

con m_e e q_e massa e carica dell'elettrone, ($q_Z = eZ$) carica del nucleo, h costante di Plank, ϵ_0 permittività elettrica del vuoto ed n_f e n_i numeri quantici dei livelli finale e iniziale. Introducendo, come fatto da Moseley, un fattore correttivo k_2 per la carica nucleare efficace che tenga conto, per gli atomi non idrogenoidi, dell'effetto di schermo dovuto agli elettroni atomici presenti sulle *shell* più vicine al nucleo, e raggruppando in un'unico termine moltiplicativo K_1^2 le restanti costanti, si ottiene

$$h\nu_{i,f} = E_i - E_f = K_1^2 (Z - k_2)^2 \quad (2.4)$$

da cui appunto la legge di Moseley, dividendo entrambi i membri per la costante h e prendendone la radice quadrata.

La verificata neutralità degli atomi ad un livello migliore di 10^{-18} cariche elettroniche confermò poi, entro quei limiti, la supposta uguaglianza fra i valori assoluti della carica elettrica di un protone e di un elettrone.

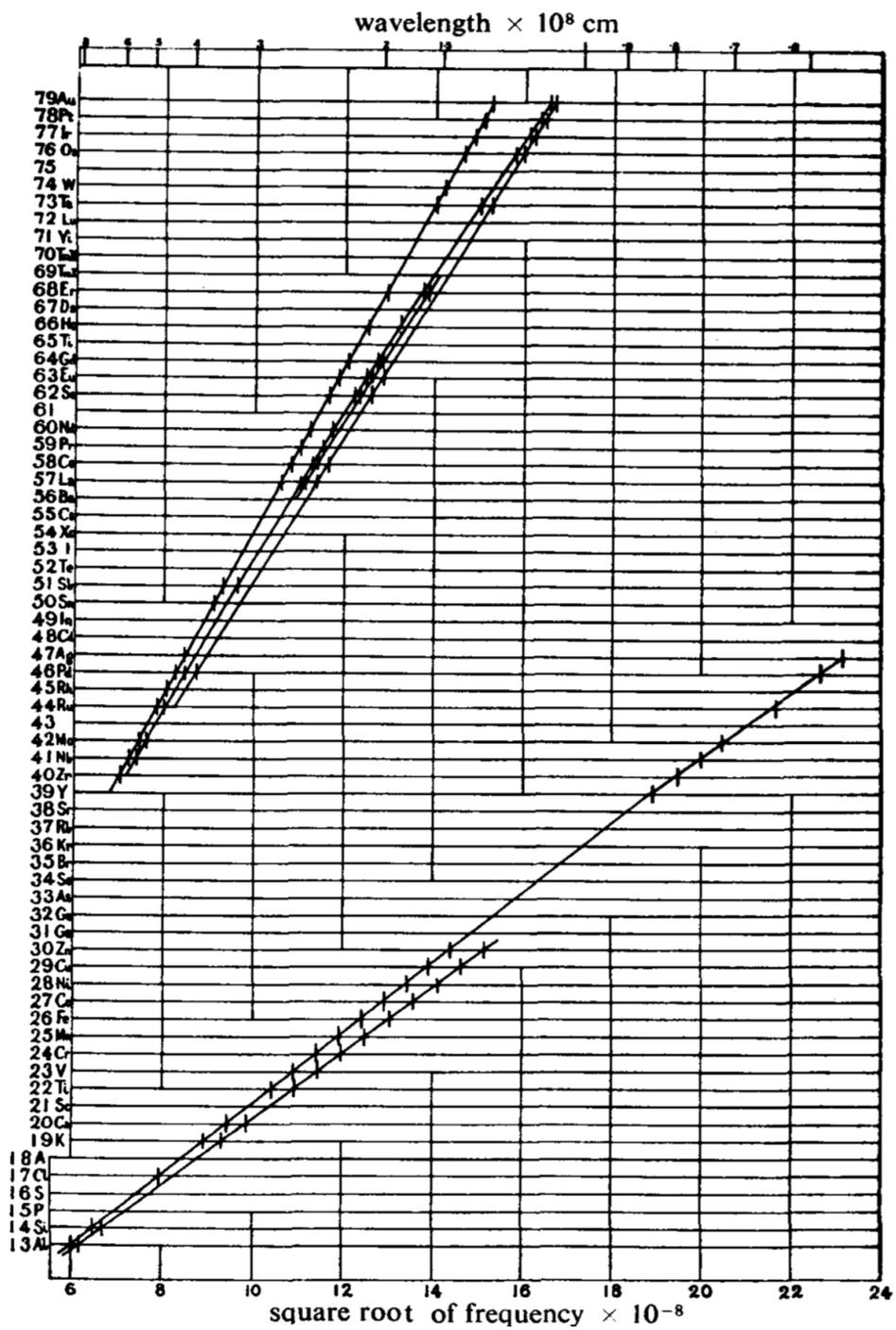


Figura 2.1: Relazione tra Z e $\sqrt{\nu}$, tratta dall'articolo originale di Moseley [Phil. Mag. 27(1914) 703].

2.1 Nomenclatura

Il nucleo di un generico atomo X è convenzionalmente indicato con A_ZX , con Z il numero atomico dell'atomo X ed A il numero di nucleoni contenuti nel suo nucleo. Il numero N di neutroni è $N = (A - Z)$. Un nucleo può anche essere indicato specificando il numero dei suoi neutroni come: A_ZX_N . Ogni diversa combinazione di Z e N , o Z e A , è detta *nuclide*.

La determinazione sperimentale di Z si attua per via chimica, per il tramite ad esempio di misure di spettromeria atomica o grazie alla legge di Moseley, rilevando la frequenza della riga caratteristica per l'emissione di raggi X .

La determinazione di A si basa sulla spettrometria di massa o sullo studio di reazioni nucleari, come descritto nei successivi paragrafi [2.3.2](#) e [2.3.3](#). In ogni nucleo, protoni e neutroni sono impacchettati in volumi le cui dimensioni sono dell'ordine di 10^{-44} m^3 , vanno cioè da poche unità ad alcune decine di fm^3 a seconda dei nuclei, con una densità media data da $\rho_0 \simeq 0.17 \text{ nucleoni} \times \text{fm}^{-3}$.

Ogni protone ha carica elettrica di segno positivo pari, in valore assoluto, a quella di ogni elettrone ($q_p = 1.602176 \times 10^{-19} \text{ C}$); ogni neutrone è elettricamente neutro, ma possiede un momento magnetico intrinseco non nullo pari in modulo a oltre il 68 % di quello del protone, e questo è un chiaro indizio dell'esistenza di una struttura interna per il neutrone.

La sostanziale corrispondenza fra le masse di protone e neutrone, che differiscono l'una dall'altra per meno dell'1.4 ‰, è uno dei motivi che ha suggerito di introdurre il concetto di *nucleone* inteso come particella componente di un nucleo atomico, indifferentemente dal suo specifico stato di carica elettrica. Ogni atomo nello stato fondamentale è elettricamente neutro in quanto il suo nucleo è circondato da Z elettroni.

Nuclei con ugual numero Z di protoni ma diversi numeri N_i di neutroni, indicati con A_ZX , sono detti *isotopi* e gli atomi cui appartengono hanno proprietà chimiche simili.

Due nuclei con lo stesso numero totale A di nucleoni, ma con diversi numeri Z e Z' di protoni, indicati con A_ZX e ${}^A_{Z'}X$, sono detti *isobari*.

Nuclei con ugual numero di neutroni sono invece detti *isotoni*.

Dato inoltre che il nucleo atomico si presenta come un sistema fisico legato soggetto alle leggi della meccanica quantistica, così come per gli atomi anch'esso è caratterizzato da un numero *discreto* di stati detti *livelli energetici nucleari*. Il livello corrispondente alla minima energia del sistema è detto *livello fondamentale*, altrimenti è detto *livello eccitato*.

Un nucleo in uno stato eccitato è detto *isomero* del proprio stato fondamentale.

2.2 Tabella dei nuclidi

Le proprietà sistematiche delle varie specie nucleari si possono visualizzare ricorrendo ad una rappresentazione che correla il numero Z di protoni col numero N di neutroni. Si ottiene così un diagramma (figura 2.2) in cui

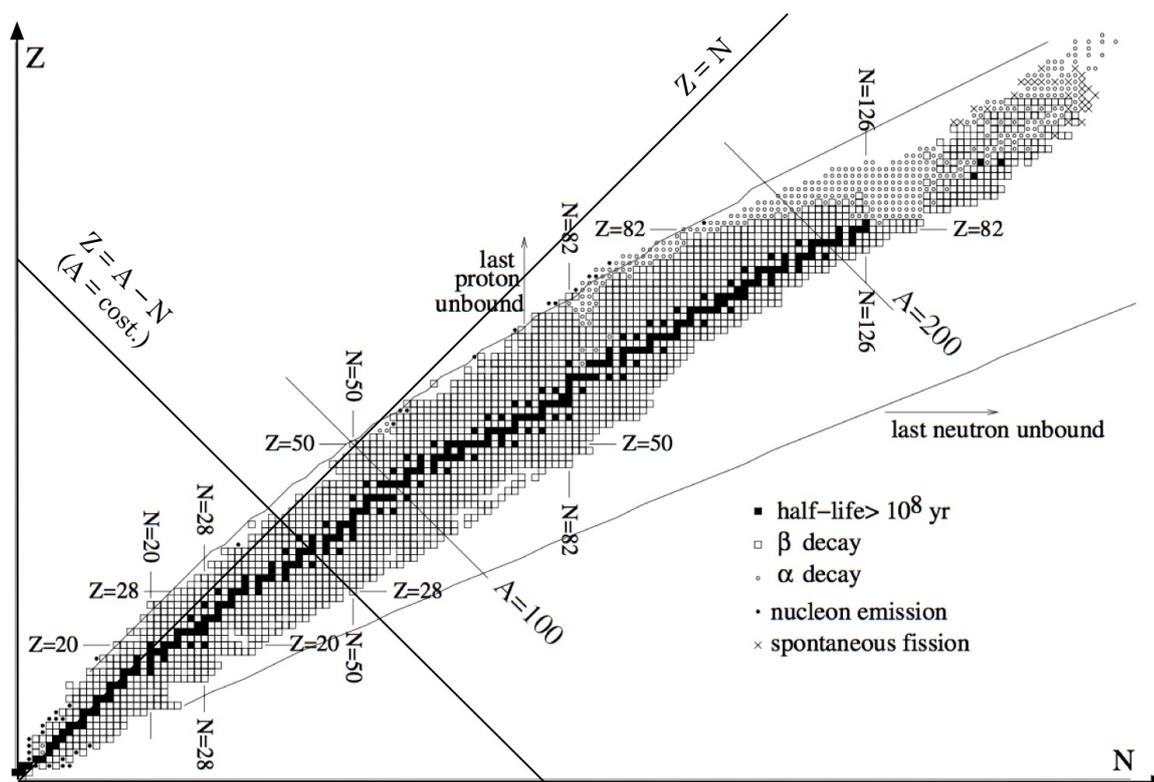


Figura 2.2: Tabella dei nuclidi, detta anche *diagramma* $Z - N$.

ogni nucleo è rappresentato con un punto di coordinate (Z, N) ; in questo diagramma gli isotopi si dispongono parallelamente all'ascissa N , gli isotoni parallelamente all'ordinata Z e gli isobari lungo rette trasversali ($Z = A - N$)². Riportando i valori sperimentali delle masse nucleari $M(A, Z)$ lungo una terza coordinata, ortogonale al piano $(Z; N)$, si ottiene una rappresentazione tridimensionale le cui sezioni con piani ortogonali al piano $(Z; N)$ e passanti per le linee $A = \text{cost.}$, mostrano che i punti rappresentativi dei nuclei appartenenti alle varie *sequenze isobariche* così individuate si dispongono, approssimativamente, lungo archi di parabola giacenti su tre falde distinte: sulla falda superiore si distribuiscono i nuclei con Z ed N entrambi dispari,

²Una versione costantemente aggiornata della tabella dei nuclidi, con numerosissime altre informazioni concernenti i nuclei atomici, è disponibile sul sito www.nndc.bnl.gov/chart/, curato dai Brookhaven National Laboratories.

su quella intermedia quelli con A dispari (Z pari ed N dispari o viceversa), su quella inferiore i nuclei con Z ed N entrambi pari.

Nel successivo paragrafo [2.3.8](#) si vedrà come ciò possa essere descritto dalla formula semiempirica di Weizsäcker per il calcolo delle masse dei nuclei.

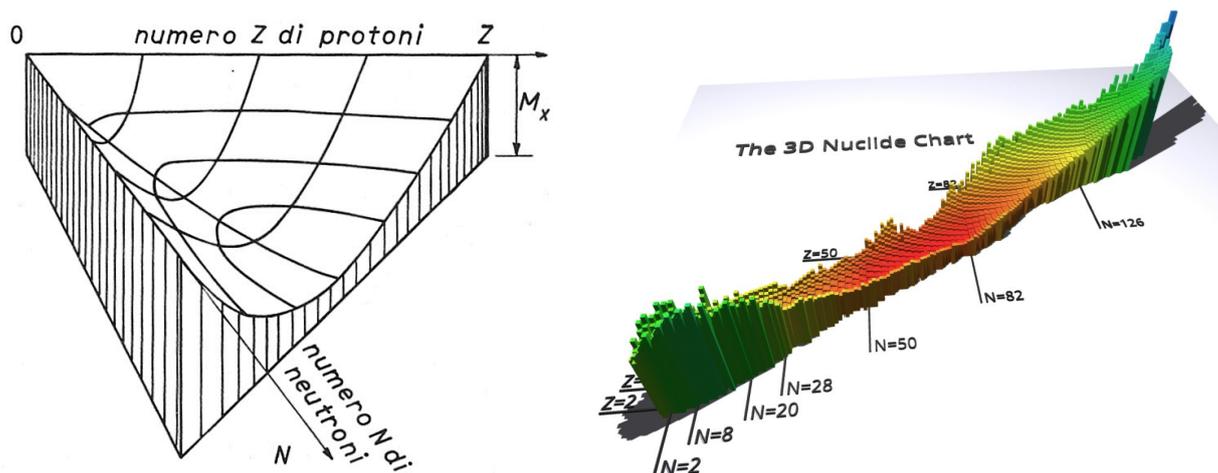


Figura 2.3: Distribuzione tridimensionale e curve di livello isobarico delle masse nucleari in funzione di A e Z (a sinistra). Nell'immagine a destra l'ordinata é rappresentata dai valori dei difetti di massa.

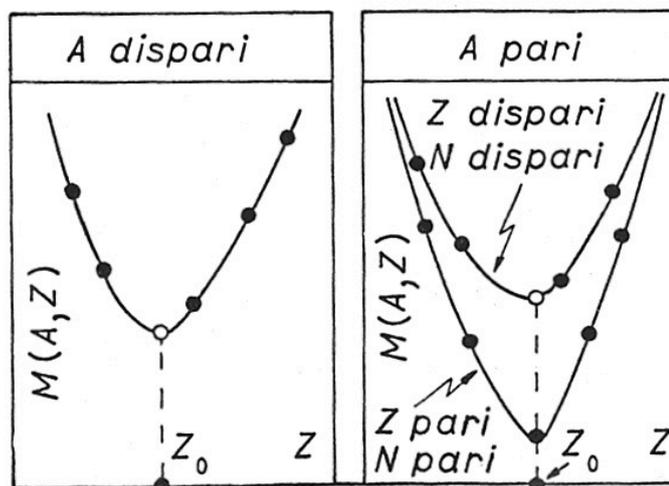


Figura 2.4: Sequenze isobariche corrispondenti a valori rispettivamente di dispari (a) e pari (b) di A .

Un nucleo A_ZX è detto *stabile* se sopravvive indefinitamente nel tempo, *in-*

stabile se invece si trasforma *spontaneamente* in un'altra specie nucleare ${}^A_Z X$ mediante un processo di decadimento.

Il valore Z_0 in corrispondenza del minimo di $M(A, Z)$ è il numero atomico dell'isobaro più stabile della particolare sequenza analizzata.

L'esame sistematico delle varie specie nucleari in funzione di A e Z mostra alcune *regolarità* che si sono rivelate utili nello studio della struttura nucleare e delle forze in gioco. I nuclei con A pari, ad esempio, hanno da uno a tre isotopi stabili, quelli con A dispari invece, uno solo; i nuclei con Z (N) pari hanno almeno due isotopi (isotoni) stabili, quelli con Z (N) dispari non ne hanno mai più di due.

Le regolarità individuate non hanno carattere di *assolutezza* e valgono solo per la gran parte dei nuclei che costituiscono una determinata famiglia nucleare.

Lo studio delle *abbondanze isotopiche relative* dei vari nuclei nei materiali che compongono la Terra, i meteoriti, il Sole e le altre stelle (si veda il paragrafo 2.3.4), mostra la presenza di massimi in corrispondenza ad ${}^4_2\text{He}$, ${}^{16}_8\text{O}$, ${}^{40}_{20}\text{Ca}$, ${}^{118}_{50}\text{Sn}$, ${}^{88}_{38}\text{Sr}$, ${}^{89}_{39}\text{Y}$, ${}^{90}_{40}\text{Zr}$, ${}^{138}_{56}\text{Ba}$, ${}^{139}_{57}\text{La}$, ${}^{140}_{58}\text{Ce}$, e ${}^{208}_{82}\text{Pb}$, che è un'evidenza del fatto che le specie nucleari caratterizzate da numeri Z o N appartenenti alla sequenza

$$Z, N = 2, 8, 20, 50, 82, 126 \quad (2.5)$$

posseggono proprietà particolari che ne giustificano la grande abbondanza nell'Universo. Sempre dall'analisi sistematica delle specie nucleari si desume che i nuclei della sequenza (2.5) hanno il massimo numero di isotopi stabili. Per queste e altre proprietà che si vedranno in seguito i numeri della sequenza (2.5) sono detti *numeri magici* e per evidenziarli dagli altri valori di Z o N li si indica solitamente con l'aggiunta di un asterisco (Z^* , N^*).

2.3 Proprietà del nucleo atomico

2.3.1 Masse dei nuclei

Dato che un nucleo ${}^A_Z X$ contiene Z protoni e $(A - Z)$ neutroni, ci si potrebbe aspettare che dette m_p ed m_n le masse di protone e neutrone, la massa del nucleo fosse espressa da

$$M(A, Z) = Zm_p + (A - Z)m_n$$

I valori misurati delle masse nucleari risultano però minori delle somme delle masse dei loro nucleoni costituenti:

$$M(A, Z) < Zm_p + (A - Z)m_n \quad (2.6)$$

Questo spiega perchè un nucleo isolato, che costituisce un ottimo esempio di sistema fisico isolato, non possa banalmente scindersi nei suoi costituenti,

in quanto, in tal caso, il processo violerebbe il principio di conservazione dell'energia. La quantità

$$\Delta M(A, Z) = M(A, Z) - Zm_p - (A - Z)m_n \quad (2.7)$$

è detta *difetto di massa*, è negativa ed è proporzionale all'energia di legame B del nucleo. Il valore assoluto di ΔM è correlato con la minima energia richiesta per scindere il nucleo in tutti i suoi componenti. Il fatto che $B < 0$ garantisce che il nucleo resti legato, e lo sarà tanto più fortemente quanto più negativo è il valore di ΔM , e quindi di B , a parità di A . Difetto di massa ed energia di legame sono correlati dalla

$$B = c^2 \Delta M(A, Z) \quad (2.8)$$

Si definisce quindi l'energia media $|B/A| = -B/A$ di legame per un nucleone in un nucleo A_ZX come

$$\left| \frac{B}{A} \right| = \frac{-\Delta M(A, Z)c^2}{A} = \frac{[Zm_p + (A - Z)m_n - M(A, Z)]c^2}{A} \quad (2.9)$$

Questa quantità è stata misurata per un gran numero di nuclei stabili e mostra caratteristiche interessanti. Per i nuclei più leggeri ($A \lesssim 20$), $|B/A|$ oscilla significativamente crescendo nel contempo rapidamente con A , per poi saturare raggiungendo un massimo di poco inferiore a 9 MeV in corrispondenza ad $A = 56$, un isotopo del ferro.

Per valori di A maggiori, $|B/A|$ diminuisce molto lentamente. In pratica per un ampio intervallo di specie nucleari, dal carbonio all'uranio, $|B/A|$ si mantiene prossimo a circa 8 MeV. Queste caratteristiche hanno importanti implicazioni sulla natura della forza nucleare e sulla struttura dei nuclei. Si deduce ad esempio che se si scaricano circa 8 MeV di energia cinetica in un nucleo, trasferendoli tutti ad un suo nucleone, questo dovrebbe potersi svincolare dal legame della forza che lo trattiene nel nucleo e uscirne libero.

2.3.2 Misura di masse nucleari con metodi spettrometrici

L'energia di legame di un nucleo atomico può essere calcolata se è nota con precisione la corrispondente massa atomica. I metodi della spettrometria di massa furono sviluppati e messi a punto a partire dagli inizi del 20° secolo e quindi progressivamente perfezionati anche grazie al progredire delle tecniche di accelerazione degli ioni³.

La deflessione di uno ione di carica Q in una sequenza di campi elettrici e magnetici ne permette la successiva selezione in energia cinetica E_k e in

³Si veda ad esempio: G. Münzenberg, "Development of mass spectrometers from Thomson and Aston to present" - Intern. Jour. of Mass Spectrometry 349-350 (2013) 9-18.

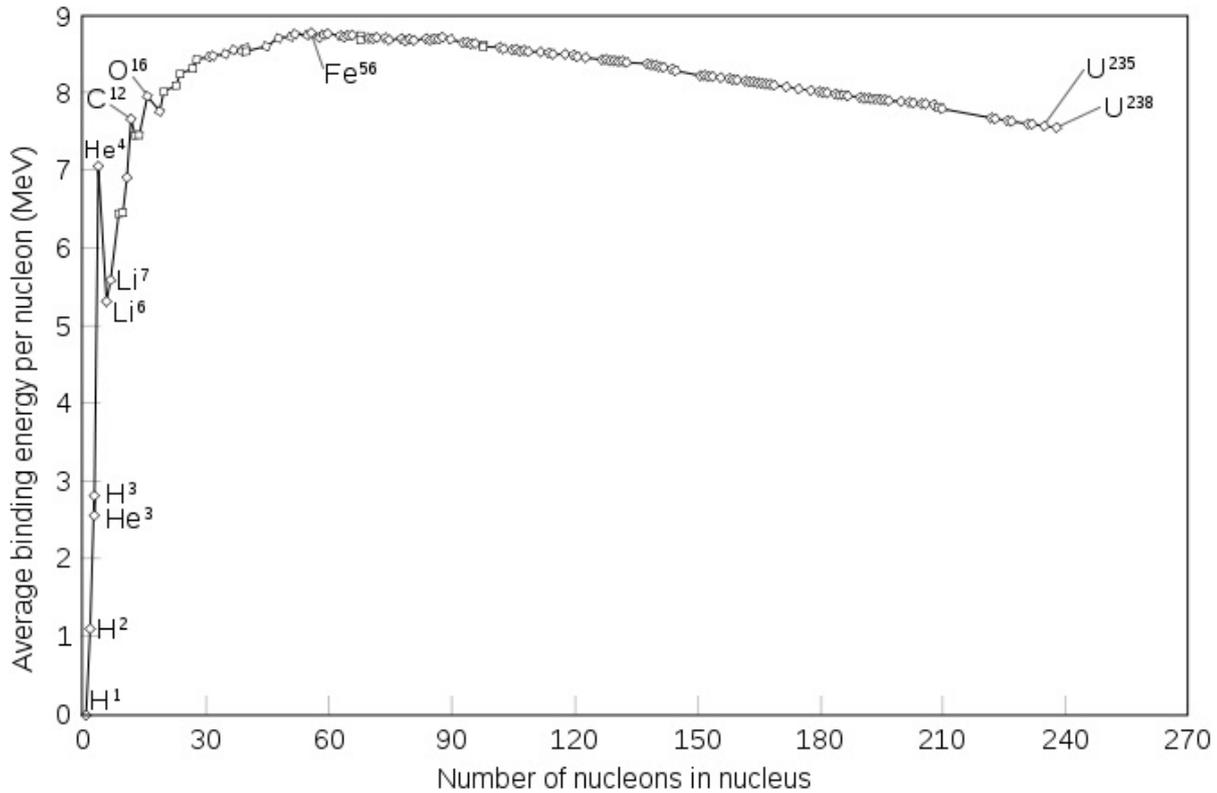


Figura 2.5: Energia media di legame per nucleone $|B/A|$, per la gran parte dei nuclei stabili.

impulso p . Se le velocità v degli ioni sono sufficientemente basse, tanto da potersi mantenere nell'approssimazione non-relativistica, allora si ha rispettivamente $p = mv$ ed $E_k = mv^2/2$, con m la massa dello ione che si può quindi esprimere in funzione di p ed E_k : $m = p^2/2E_k$.

La prima tecnica efficace per misurare le masse di ioni risale a J.J. Thomson e consiste nel farli passare in zone interessate dalla contemporanea presenza di un campo elettrico e uno magnetico fra loro ortogonali; in tal modo Thomson riuscì, nel 1912, a distinguere gli isotopi ^{20}Ne e ^{22}Ne del Neon e la tecnica fu poi raffinata da Aston, che era stato suo studente.

In figura 2.6 è illustrato il principio base di tale metodo. Un fascio di ioni di carica Q , contenente genericamente isotopi di diverse masse m_i , attraversa una regione in cui vi sono un campo elettrico \vec{E} e uno magnetico \vec{B}_1 , uniformi e fra loro ortogonali, scelti in modo da far passare attraverso una definita fenditura soltanto gli ioni di velocità $|\vec{v}| = E/B_1$. Ioni con velocità diverse percorreranno traiettorie, tratteggiate in figura, che non li porteranno ad imboccare la fenditura, in funzione anche dell'apertura di questa. Gli ioni che superano la fenditura, selezionati in velocità, continuano quindi la loro

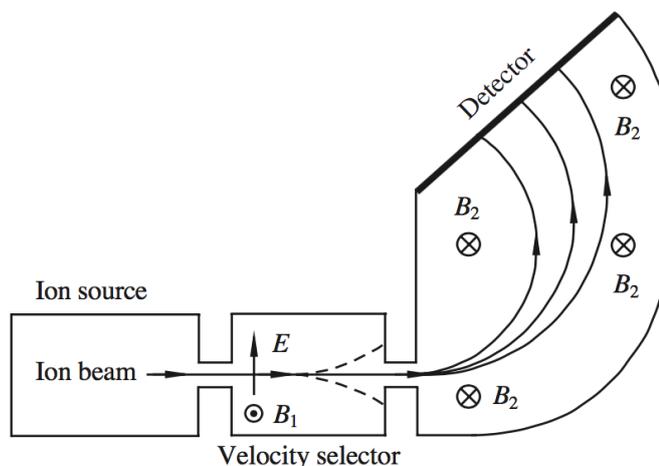


Figura 2.6: Schema di uno spettrometro di massa a deflessione; originariamente il rivelatore consisteva in una lastra fotografica.

traiettoria in un volume occupato da un secondo campo magnetico uniforme \vec{B}_2 , dove percorrono orbite circolari di raggi r_i espressi da

$$r_i = \frac{m_i v}{Q B_2} \quad (2.10)$$

Essendo a questo punto fissati Q , B_2 e v , ne risulta che ioni con un definito valore del rapporto Q/m percorrono orbite di ugual raggio e ciò permette di separare isotopi diversi rivelando i punti d'impatto degli ioni su opportuni rivelatori, come mostrato in figura 2.6. Tipicamente si cerca di realizzare strutture in cui sia $B_1 = B_2$. Questo tipo di struttura raggiunge la massima accuratezza nelle misure di differenze di massa, piuttosto che in quelle di valore assoluto della massa.

In figura 2.7 è schematicamente illustrata la configurazione di spettrometro di massa adottata da Nier-Johnson, detto anche con *geometria in avanti*. In questo caso gli ioni provenienti dalla sorgente sono focalizzati e guidati poi in un analizzatore elettrostatico che li rifocalizza, in prossimità del diaframma d'uscita (slit), in posizioni diverse a seconda della loro energia cinetica. Il successivo settore magnetico disperde quindi gli ioni secondo il loro rapporto Q/m e inoltre, similmente al campo elettrico, focalizza ioni di diverse energie cinetiche in diversi punti.

Sia il settore elettrico che quello magnetico determinano quindi una dispersione degli ioni in funzione della loro energia cinetica, ma in verso opposto. Un'opportuna configurazione permette di bilanciare gli effetti tanto da far sì che solo ioni con il desiderato rapporto Q/m e una ridottissima dispersione in energia cinetica siano alla fine focalizzati in corrispondenza del rivelatore. Risoluzione e di conseguenza intensità della trasmissione, sono controllate

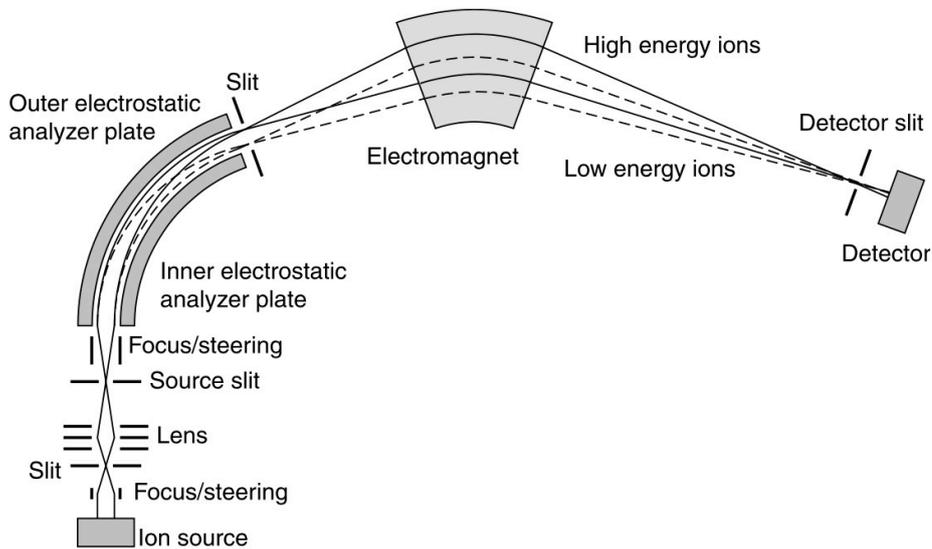


Figura 2.7: Spettrometro di massa in configurazione di Nier-Johnson.

dall'apertura del diaframma connesso al rivelatore.

Si tenga presente che i valori della masse ottenibili con le tecniche qui citate forniscono, per la precisione, le masse di ioni che non sono stati sempre completamente *spogliati* di tutti gli elettroni dell'atomo originario, per risalire quindi all'effettiva massa del nucleo corrispondente bisogna tener conto dell'effettiva carica ionica, delle masse di tutti gli elettroni ancora legati all'ione al momento della sua selezione con lo spettrometro e delle energie di legame di tali elettroni.

Sfruttando la tecnica della spettrometria di massa con acceleratori (AMS)⁴, si riescono a ottenere misure di rapporti isotopici fino a 10^{-15} .

2.3.3 Misura di masse nucleari tramite reazioni nucleari

Gli spettrometri di massa funzionanti sul principio delle deflessioni elettrica e/o magnetica non sono adatti alle misure di massa per strutture a breve vita media, che non riescono quindi a sopravvivere abbastanza a lungo, prima di decadere, da percorrere tutto il tragitto nello spettrometro fino al rivelatore. In questi casi si possono ottenere i valori delle masse nucleari

⁴Si veda ad esempio: H. Budzikiewicz e R.D. Grigsby, "Mass Spectrometry and Isotopes: a Century of Research and Discussion" - Mass Spectrometry Reviews 25 (2006) 146.

tramite lo studio cinematico di opportune reazioni nucleari⁵

In una tipica reazione nucleare si hanno due nuclei che interagiscono dando luogo a prodotti dell'interazione che possono differire da quelli originali, e a seconda che il processo determini un rilascio d'energia, o richieda un apporto iniziale d'energia per aver luogo, la reazione si dirà esotermica o endotermica. La differenza fra la somma delle masse dei nuclei interagenti e le masse dei prodotti dell'interazione, tutte moltiplicate per c^2 , è detta Q -valore della reazione ed è chiaramente $Q > 0$ per reazioni esotermiche e $Q < 0$ per reazioni endotermiche.

Si veda ad esempio una reazione del tipo



e si supponga di conoscere già con una ben definita precisione le masse m_a , m_A e m_b di a , A e b . Lo scopo è dedurre la massa m_B di B . Si supponga qui inoltre che le energie cinetiche in gioco siano tali da non richiedere la corretta e completa trattazione relativistica, permettendo quindi l'approccio classico approssimato nel tener conto delle conservazioni dell'energia totale e dell'impulso nel sistema di riferimento del laboratorio (SL), che sottintende il bersaglio A inizialmente a riposo.

Dette $E_{t,i}$ ed $E_{t,f}$ le energie totali disponibili nei canali di ingresso e finale della reazione [2.11](#), si ha

$$\begin{cases} E_{t,i} = E_{k,a} + m_a c^2 + m_A c^2 \\ E_{t,f} = E_{k,b} + E_{k,B} + m_b c^2 + m_B c^2 \end{cases} \quad (2.12)$$

dove $E_{k,j}$ ed m_j rappresentano rispettivamente energia cinetica e massa della j -ma particella o nucleo. La conservazione dell'energia totale richiede $\Delta E_{i,f} = E_{t,i} - E_{t,f} = 0$, da cui si ottiene

$$\begin{aligned} m_B &= \frac{E_{k,a} - (E_{k,b} + E_{k,B})}{c^2} + m_a + m_A - m_b \\ &= \frac{E_{k,a} - E_{k,b}}{c^2} - \frac{m_B v_B^2}{2c^2} + m_a + m_A - m_b \\ &= \frac{2}{2c^2 + v_B^2} \left[E_{k,a} - E_{k,b} + (m_a + m_A - m_b) c^2 \right] \end{aligned} \quad (2.13)$$

che permette di esprimere m_B in funzione di quantità note o comunque misurabili sperimentalmente con lo studio della reazione [2.11](#).

Dalla figura [2.8](#) si può ricostruire la cinematica classica della reazione [2.11](#) nel (SL) e per la conservazione dell'impulso si ha

⁵Si utilizza qui il concetto di "reazione nucleare", mutuando dalla Chimica almeno per quanto concerne l'indicazione grafica del generico processo e sottintendendo che i soggetti

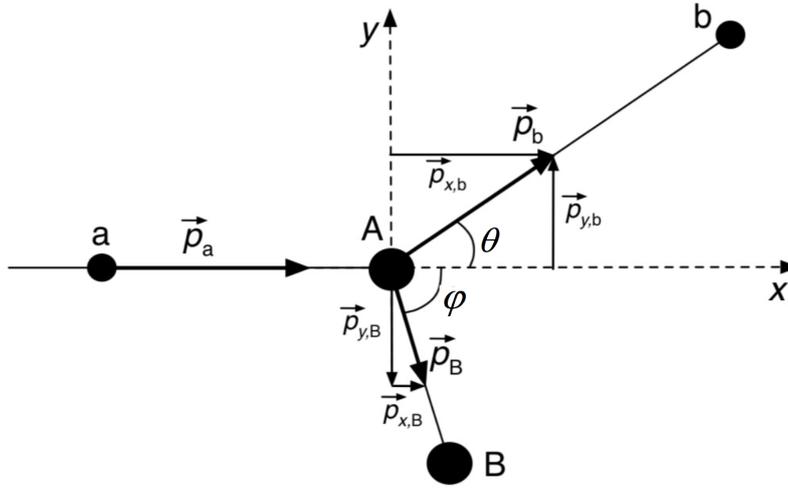


Figura 2.8: Due corpi in due corpi nel Sistema del Laboratorio.

$$\begin{cases} p_{x,B} = p_a - p_b \cos\vartheta \\ p_{y,B} = p_b \sin\vartheta \end{cases} \quad (2.14)$$

Un esempio importante di come si possa determinare la massa di una particella tramite una reazione è quello della reazione di cattura di neutroni termici [6] da parte dell'idrogeno [7]



che rappresenta la reazione nucleare inversa della cosiddetta *foto-disintegrazione* del deutone ${}^2\text{H}$, che condusse fra il 1934 e il 1935 Chadwick e Goldhaber ad effettuare le prime accurate misure della massa del neutrone [8], provando nel contempo che esso non è uno stato legato fra protone ed elettrone.

La massa del neutrone può essere dedotta dalla conoscenza della massa del protone, di quella del deutone, ovvero il nucleo di deuterio, costituito da un protone e un neutrone fra loro legati, e dell'energia di legame $B({}^2\text{H})$ del deutone, con

$$B({}^2\text{H}) = (m_n + M_{1\text{H}} - M_{2\text{H}}) c^2 \quad (2.16)$$

coinvolti costituiscano un sistema fisico isolato durante tutta l'interazione, per cui valgono opportune leggi di conservazione (energia, impulso e momento angolare totali, ...). Si tornerà sull'argomento più oltre (cap. [6]).

⁶Un neutrone è detto termico se ha velocità confrontabili con quelle di molecole d'aria a 20 °C, quindi con energie cinetiche dell'ordine o inferiori a 0.025 eV.

⁷Si veda anche il paragrafo ?? sulla sintesi primordiale degli elementi.

⁸J.Chadwick M.Goldhaber, "A nuclear photo-effect, disintegration of the dipion by gamma rays" - Nature 134 (1934) 237-238; J.Chadwick, M.Goldhaber, "The Nuclear Photoelectric Effect" - Proc.R.Soc.Lond. A151 (1935) 479-493.

L'energia di legame $B(^2\text{H})$ del deutone può essere sperimentalmente dedotta dall'energia del fotone γ emesso durante la reazione di cattura di neutroni termici da parte di protoni. Supponendo a riposo i protoni al momento della reazione, data la ridottissima energia cinetica dei neutroni termici rispetto all'equivalente energetico della massa di un nucleone, si può con ottima approssimazione affermare che l'energia di legame di ^2H coincida con l'energia del fotone γ dello stato finale della reazione [2.15](#) sommata all'energia cinetica di rinculo del deutone⁹

$$B(^2\text{H}) = E_\gamma + \frac{E_\gamma^2}{2M_{2\text{H}}c^2} \quad (2.17)$$

Trascurando anche il contributo dell'energia di rinculo del deutone si ha infine, per la massa del neutrone

$$m_n \simeq M_{2\text{H}} - M_{1\text{H}} + \frac{E_\gamma}{c^2} \quad (2.18)$$

L'energia del fotone γ emesso può essere dedotta dalla misura della sua lunghezza d'onda λ_γ con notevole precisione e ciò conduce a

$$E_\gamma = \frac{2\pi\hbar c}{\lambda_\gamma} \simeq 2.224521 \text{ MeV} \quad (2.19)$$

La conoscenza dei valori precisi delle masse di protone e deutone per altre vie permette quindi di ottenere, per la massa del neutrone

$$\begin{aligned} m_n &\simeq 1875.612974 - 938.2720813 + 2.224521 \text{ MeV}/c^2 \simeq \\ &\simeq 939.56541(3) \text{ MeV}/c^2 \end{aligned} \quad (2.20)$$

Per la misura di precisione delle masse di molti isotopi, sia stabili che instabili, si possono dunque combinare misure di energia in reazioni nucleari con misure di spettrografia di massa.

2.3.4 Abbondanza degli elementi

Una importantissima applicazione delle tecniche di spettroscopia di massa concerne la determinazione delle abbondanze isotopiche nel sistema solare. In figura [2.9](#) è riportata l'abbondanza misurata per i vari nuclidi in funzione del numero di massa A .

Le abbondanze isotopiche relative di campioni terrestri, lunari e meteorici, tranne piccole eccezioni, coincidono fra loro e anche con le abbondanze

⁹Per l'energia di rinculo del deutone, con approccio non relativistico nel sistema del centro di massa, la conservazione dell'impulso dá $\frac{E_\gamma}{c} = M_{2\text{H}}v$, da cui $v = \frac{E_\gamma}{M_{2\text{H}}c}$, e quindi l'energia cinetica del deutone è $\frac{1}{2}M_{2\text{H}}v^2 = \frac{1}{2}M_{2\text{H}}\frac{E_\gamma^2}{M_{2\text{H}}^2c^2} = \frac{E_\gamma^2}{2M_{2\text{H}}c^2}$.

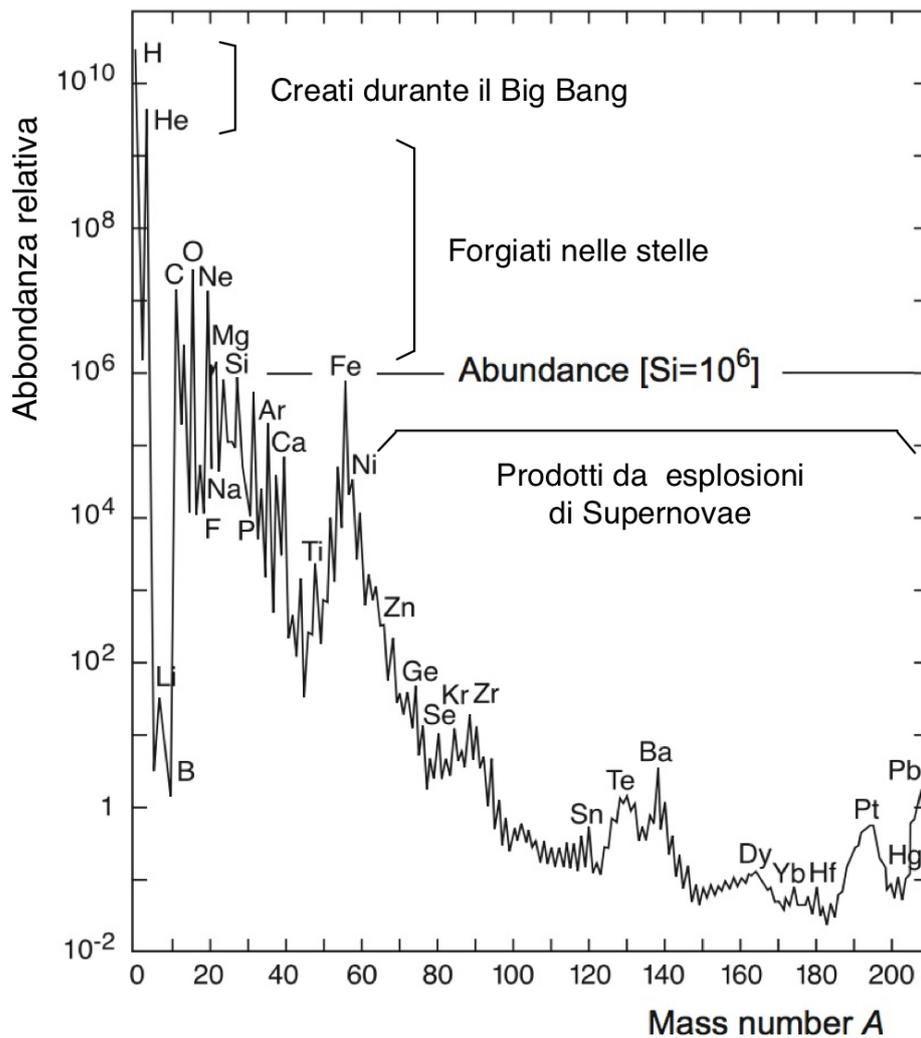


Figura 2.9: Abbondanza degli elementi nel sistema solare in funzione del loro numero di massa A , normalizzati all'abbondanza del silicio (Si) assunta come 10^6 .

isotopiche misurate per i raggi cosmici provenienti dall'esterno del sistema solare.

Secondo gli attuali modelli cosmologici, la sistensi del deuterio e dell'elio oggi presenti nell'universo sono dovute alla fusione di idrogeno avvenuta pochi minuti dopo la formazione dell'universo stesso tramite il Big-Bang. I nuclidi fino al ^{56}Fe , che rappresenta il nuclide più stabile, sono stati prodotti da fusioni nucleari nelle stelle. I nuclidi ancora più pesanti si sono formati

durante le esplosioni delle *supernovae* ¹⁰.

Deviazioni dall'andamento universale delle abbondanze isotopiche possono verificarsi localmente per la presenza di processi di decadimenti radioattivi che ne modificano l'entità e i rapporti.

Questi dati concernono comunque poco più del 4% circa di quanto dovrebbe costituire l'universo, ovvero la cosiddetta *materia barionica*.

2.3.5 Spin dei nuclei

Ogni sistema fisico ha due contributi possibili di momento angolare, quello orbitale che ha analogo classico, e quello intrinseco o di spin, e ogni momento angolare è quantizzato.

Dalla meccanica quantistica si sa che del momento angolare orbitale $\vec{\ell}$ di un sistema fisico si possono conoscere contemporaneamente al più il valore del suo modulo quadrato $|\vec{\ell}|^2 = \ell(\ell + 1)\hbar^2$ e il massimo valore assumibile dalla sua proiezione ℓ_z lungo una direzione di riferimento convenzionalmente scelta come asse z , $\ell_z = \ell\hbar$, con ℓ intero ≥ 0 . Inoltre ℓ_z può assumere solo i $(2\ell + 1)$ valori, scalati fra loro di un'unità di \hbar che soddisfano $-\ell\hbar \leq \ell_z \leq +\ell\hbar$.

In aggiunta all'eventuale momento angolare orbitale, protoni e neutroni hanno entrambi un momento angolare intrinseco o *spin*, il cui numero quantico associato s , essendo essi fermioni, vale $\pm 1/2$. Lo spin può quindi assumere i soli due stati parallelo o antiparallelo alla direzione di riferimento z ; le componenti s_z valgono $+\hbar/2$ e $-\hbar/2$, mentre il quadrato dello spin vale $s(s + 1)\hbar^2 = 3\hbar^2/4$.

Il momento angolare totale \vec{J} di un nucleo è la somma vettoriale dei vari momenti angolari orbitali dei suoi nucleoni e dei loro spin

$$\vec{J} = \sum_{i=1}^A \vec{\ell}_i + \sum_{i=1}^A \vec{s}_i = \vec{L} + \vec{S} \quad (2.21)$$

\vec{J} assume valori pari a un multiplo intero di unità di \hbar per nuclei con A pari e a un multiplo semi-intero di unità di \hbar per nuclei con A dispari, ciò dipendendo dal fatto che solitamente un sistema fisico ha energia minima, ed è quindi più stabile, se i suoi componenti di uno stesso tipo si accoppiano con spin anti-paralleli.

Ogni livello nucleare è caratterizzato dal proprio momento angolare totale \vec{J} che in conseguenza dell'isotropia dello spazio è una quantità che si conserva, per cui l'operatore quantistico che lo rappresenta commuta con l'Hamiltoniana e di conseguenza il suo valore può sempre essere determinato assieme a quello dell'energia del livello. Spesso in letteratura ci si riferisce allo "spin" di un nucleo intendendo il suo momento angolare totale \vec{J} , e non \vec{S} .

¹⁰Una sintetica panoramica sulla nucleosintesi, sia primordiale che stellare e da supernovae, è riportata nei capitoli ?? e ??.

Ogni misura di \vec{J} dá risultati coerenti con le regole illustrate e ciò costituisce una delle ragioni che hanno portato ad escludere gli elettroni quali componenti dei nuclei. Si trova infatti ad esempio che ${}^2\text{H}$, ${}^6\text{Li}$, ${}^{14}\text{N}$ ¹¹ hanno tutti spin pari ad \hbar , quindi in accordo con la regola su indicata, avendo un numero pari di nucleoni componenti. Se tali nuclei fossero costituiti da protoni ed elettroni, il numero dei costituenti sarebbe dispari per rendere conto della loro carica elettrica, e conseguentemente il loro spin totale sarebbe un multiplo dispari di $\hbar/2$, contrariamente all'evidenza sperimentale.

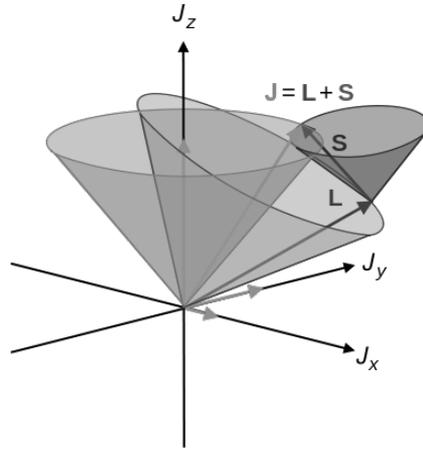


Figura 2.10: Momento angolare totale $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$.

Si può argomentare ulteriormente sul fatto che un nucleo possa contenere elettroni fra i suoi componenti, tenendo conto del principio di indeterminazione di Heisenberg

$$\Delta p \Delta x \sim h \quad (2.22)$$

dove Δx rappresenta l'incertezza nella posizione dell'elettrone nel nucleo, quindi dell'ordine delle dimensioni lineari del volume occupato dal nucleo, ovvero circa 10^{-14} m. Da cui un'incertezza sull'impulso dell'ordine di

$$\Delta p \sim \frac{h}{\Delta x} \sim 4.14 \times 10^{-7} \text{ MeV s m}^{-1} \quad (2.23)$$

Si ottiene quindi, detta m_e la massa dell'elettrone, una grezza stima della sua energia totale nel nucleo sfruttando la corretta formula relativistica

$$E_{tot}^2 = p_e^2 c^2 + m_e^2 c^4 \quad (2.24)$$

e assumendo che il suo impulso p_e nel nucleo sia dell'ordine di quanto appena trovato per l'incertezza Δp . Sostituendo e ricordando che $c \simeq 3 \times 10^8$ m/s

¹¹Fu F. Rasetti nel 1929 che con studi sullo spettro Raman della molecola ${}^{14}\text{N}_2$ mostrò che il nucleo ${}^{14}\text{N}$ è un bosone, quindi costituito da un numero pari di fermioni.

e che $m_e \simeq 0.51 \text{ MeV}/c^2$, si ha

$$E_{tot} \simeq 124 \text{ MeV} \quad (2.25)$$

che in questo caso coinciderebbe sostanzialmente con l'energia cinetica di un ipotetico elettrone libero di muoversi nel nucleo. Ma una simile energia non è compatibile con l'esistenza di un nucleo legato, per il quale si ha che l'energia media di legame per nucleone è dell'ordine di 8 MeV, e neppure con le energie sperimentalmente misurate degli elettroni emessi da nuclei e dovuti al decadimento β , che sono al massimo dell'ordine di alcuni MeV.

Lo spin dello stato eccitato di un nucleo può, per i modi in cui si combinano entrambi le tipologie di contributi, differire dal valore che caratterizza lo stato fondamentale del nucleo stesso; un qualunque effetto può modificare lo spin di un multiplo intero di \hbar , quindi se gli spin di un nucleo differiscono fra stati eccitati e stato fondamentale dello stesso nucleo, lo fanno per multipli interi di \hbar .

La maggior parte delle misure di spin nucleari si basa sulla cosiddetta quantizzazione spaziale del momento angolare. Assegnata una direzione di riferimento, quale può essere ad esempio quella di un campo elettrico o magnetico esterno al nucleo, il momento angolare \vec{J} del nucleo potrà orientarsi nello spazio soltanto secondo $(2J + 1)$ diverse direzioni, rispetto a quella di riferimento assegnata. La componente dello spin lungo la direzione di riferimento in ognuno di questi stati vale $m\hbar$, dove m , detto *numero quantico magnetico*, è un intero o un semi-intero qualsiasi della sequenza $-J, -J + 1, \dots, +J - 1, +J$.

Per un nucleo, la gran parte degli effetti osservabili dovuti allo spin sono legati al suo momento magnetico¹². Le $(2J + 1)$ possibili orientazioni del momento magnetico di un nucleo rispetto a un campo magnetico di riferimento danno luogo a $(2J + 1)$ diversi valori energetici che possono essere osservati e misurati in svariati modi: studiando la struttura iperfina degli spettri atomici, o gli spettri rotazionali di molecole biatomiche composte da atomi uguali, per le quali lo spin determina in modo univoco l'intensità relativa delle righe spettrali, o mediante spettroscopia delle microonde.

Sperimentalmente si trova che tutti i nuclei con Z ed N pari, e quindi anche A pari, hanno $J = 0$, mentre non è così per i nuclei con A pari ma Z e N dispari. I nuclei stabili dispari-dispari sono solo quattro, ^2H , ^6Li , ^{10}B e ^{14}N . Altri quattro hanno vita media molto lunga, dell'ordine dei milioni di anni, ^{40}K , ^{50}V , ^{138}La e ^{176}Lu ; quest'ultimo, con vita media di 3.78×10^{10} anni, è utilizzato nella datazione delle meteoriti ed è fra l'altro il nucleo col maggior valore di spin: $J = 7$.

Per la gran parte dei nuclei i valori dello spin sono piccoli, di valore intero compreso fra $J = 1$ e $J = 7$ per i nuclei dispari-dispari, e di valore semi-

¹²Si veda il paragrafo ??

intero compreso fra $J = 1/2$ e $J = 9/2$ per i nuclei con A dispari. Questo indica una caratteristica dell'interazione fra nucleoni che si manifesta come loro tendenza a "posizionarsi" nel nucleo in modo da ridurre, per quanto possibile, lo spin totale risultante dando in tal modo luogo a strutture più legate, e ricorda quanto fanno gli elettroni di un atomo nel riempire le shell atomiche.

2.3.6 Parità e nuclei

Si ricordino dapprima, senza dimostrazione, alcune proprietà della *parità*. Nel caso di un potenziale centrale, quindi descritto da una funzione pari, anche la relativa Hamiltoniana è pari e le funzioni d'onda degli stati associati hanno parità definita $P = (-1)^\ell$.

Più generalmente si trova che se l'Hamiltoniano di un sistema è pari allora la parità delle funzioni d'onda degli stati associati è definita.

In conseguenza di ciò si possono misurare contemporaneamente l'energia E di uno stato, in particolare di un livello nucleare, e la sua parità P , che può valere $+1$ o -1 , e tale parità si conserva nel tempo se tutte le interazioni sono pari, ovvero conservano esse stesse la parità.

Per uno stato puro, ovvero a parità definita, la densità di probabilità è sempre pari.

Un vettore è una quantità dispari, nel senso che cambia verso se si cambia il segno di tutte le sue componenti. Uno pseudovettore è una quantità con le stesse proprietà di rotazione di un vettore, ma che non cambia verso se si cambia il segno di tutte le sue componenti, come avviene ad esempio per il prodotto vettoriale, quindi è pari.

L'impulso e l'operatore quantistico associato sono quantità con caratteristiche vettoriali, quindi "dispari"

$$\vec{p}(-\vec{r}) = -\vec{p}(\vec{r}) \quad , \quad \frac{\partial}{\partial(-\vec{r})} = -\frac{\partial}{\partial(\vec{r})} \quad (2.26)$$

L'energia cinetica, essendo proporzionale al quadrato dell'impulso, è pari e così anche per l'operatore quantistico ad essa associato.

Il momento angolare, essendo ottenuto tramite un prodotto vettoriale fra due vettori, è uno pseudovettore, ed è quindi pari, come l'operatore quantistico ad esso associato.

Il momento di dipolo elettrico invece, che è omogeneo a un vettore, è dispari: $\vec{D}(-\vec{r}) = -\vec{D}(\vec{r})$.

Il momento di dipolo magnetico, omogeneo a uno pseudovettore, è pari.

In base a quanto detto per l'impulso, l'energia cinetica e il momento angolare, si può affermare che se di uno stato di cui si conosca l'energia si misura il momento angolare, allora se ne può contemporaneamente misurare anche la parità, dato che i relativi operatori commutano. Ciò non si può invece fare con l'impulso, in quanto i relativi operatori non commutano.

Uno stato nucleare può quindi essere caratterizzato dalla contemporanea conoscenza di Energia, Momento angolare e Parità. Ci si riferisce alla contemporanea indicazione dei valori di momento angolare J e parità P con il simbolo J^P .

Dai risultati sperimentali si sa che le forze nucleari conservano la parità, per cui un livello nucleare ha parità ben definita e questo ha conseguenze importanti sui suoi possibili momenti angolari orbitali. Il suo momento angolare J può infatti corrispondere a diversi valori del momento angolare orbitale L . Essendo questo associato a una parità positiva per L pari e negativa per L dispari, ne risulta che si possono avere eventuali mescolanze fra momenti angolari orbitali o solamente con L pari o solamente con L dispari.

Si consideri ad esempio il deutone 2H : esso è costituito da un protone e un neutrone legati, il suo stato fondamentale ha un'energia di legame di circa 2.225 MeV, un momento angolare totale pari a $J = 1$, con i due nucleoni in uno stato di tripletto con $S = 1$ e di conseguenza ha momento angolare orbitale $L = 0$ (onda S), come si deduce dalla misura del suo momento di dipolo magnetico, pari a $0.857 \mu_N$, che corrisponde circa alla somma di quelli del protone e del neutrone. Siccome però si trova sperimentalmente che il deutone ha anche un momento non nullo di quadrupolo elettrico, pari a $2.82 \times 10^{-31} \text{ m}^2/e$, ciò significa che il suo stato fondamentale non può essere considerato un puro stato in onda S , che sarebbe sfericamente simmetrico e quindi compatibile con un momento di quadrupolo elettrico nullo¹³, ma dovrà essere una mescolanza con altri momenti angolari orbitali. Per rispondere a quali possano essere questi ultimi che concorrono allo stato fondamentale del deutone si consideri che deve valere

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S} \quad , \quad \text{con} \quad \vec{S} = 1 \quad \text{e} \quad \vec{J} = 1 \quad (2.27)$$

e questo è possibile per $L = 0$, $L = 1$ (onda P) ed $L = 2$ (onda D). Ma l'onda P ha parità opposta a quella delle onde S e D , quindi se ne deduce, come verificato sperimentalmente, che la mescolanza può sussistere solo fra onda S e onda D ¹⁴.

2.3.7 Natura delle forze nucleari e dimensioni dei nuclei

- 1 - Atomi muonici

La forza nucleare ha un ridottissimo raggio d'azione; se infatti si considera l'atomo e il fatto che la sua struttura è spiegata ottimamente dalle sole interazioni elettromagnetiche, è chiaro che il raggio d'azione delle forze nucleari non deve estendersi molto oltre le dimensioni del nucleo stesso, altrimenti perturberebbe l'eccellente accordo fra dati sperimentali e previsioni teoriche per quanto concerne la fisica atomica.

¹³Vedi paragrafo [2.3.9](#)

¹⁴Sul deutone si vedano anche i paragrafi [9.1.1](#) e [9.1.2](#)

Il fatto però che il nucleo abbia una distribuzione di carica elettrica estesa nello spazio, legata ai suoi protoni, suggerisce di studiare le eventuali perturbazioni alle energie dei livelli atomici, calcolate nell'ipotesi di un nucleo puntiforme, per dedurre informazioni sulle dimensioni e forma della distribuzione di carica protonica nel nucleo.

Se si immagina il nucleo come una struttura a simmetria sferica centrata in O , queste perturbazioni dipendono dal raggio " r " del nucleo, in quanto al suo interno il campo elettrico non è coulombiano e non dipende da $1/r^2$.

La causa di questi effetti è essenzialmente quantistica: per il teorema di Gauss il campo elettrico nella regione "classicamente" fuori dal nucleo dovrebbe coincidere con quello generato da una carica puntiforme pari a Ze e posizionata in O , pertanto un'orbita elettronica classica di raggio maggiore di r non dovrebbe essere perturbata né in forma né in energia. Il livello energetico dell'orbitale atomico dipende in realtà dall'andamento del potenziale in tutto lo spazio, che determina anche la funzione d'onda.

Si calcolino quindi gli spostamenti dei livelli indotti da una carica nucleare Ze supposta, per semplicità, uniformemente distribuita in una sfera di raggio R .

La carica contenuta in una sferetta di raggio $r < R$ è

$$q(r) = Ze \frac{r^3}{R^3} \quad , \quad \text{con} \quad q(R) = Ze \quad (2.28)$$

Di conseguenza il campo elettrico è

$$\begin{aligned} E_e(r) &= \frac{Ze}{4\pi\epsilon_0 r^2} && \text{esternamente al nucleo } (r > R) \\ E_i(r) &= \frac{q(r)}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{Ze r}{4\pi\epsilon_0 R^3} && \text{internamente al nucleo } (r \leq R) \end{aligned} \quad (2.29)$$

e l'energia potenziale elettrica $eV(r)$ è

$$\begin{aligned} eV(r) &= \frac{-Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} && \text{esternamente al nucleo } (r > R) \\ eV(r) &= eV_0 + \frac{Ze^2 r^2}{8\pi\epsilon_0 R^3} && \text{internamente al nucleo } (r \leq R) \end{aligned} \quad (2.30)$$

con V_0 determinato dalla condizione di continuità del potenziale in $r = R$:

$$eV(r) = eV_0 + \frac{Ze^2}{8\pi\epsilon_0 R} = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 R} \quad (2.31)$$

da cui l'espressione del potenziale per $r < R$

$$eV(r) = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 R} \left(\frac{3}{2} - \frac{r^2}{2R^2} \right) \quad (2.32)$$

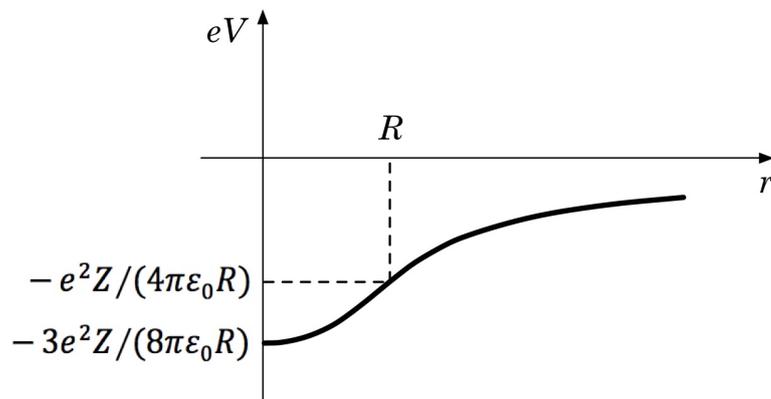


Figura 2.11:

Siccome si sa che le dimensioni lineari di un atomo sono circa $10^4 \div 10^5$ volte maggiori di quelle del suo nucleo, si può affermare che la funzione d'onda atomica si estende quasi del tutto all'esterno della zona occupata dal nucleo, e si può quindi calcolare l'effetto, supposto piccolo, della distribuzione non puntiforme della carica nucleare, con un approccio perturbativo.

Detta $\psi_{E_0}(\vec{r})$ la funzione d'onda dell'elettrone atomico corrispondente al livello imperturbato di energia E_0 , calcolato cioè per un atomo con nucleo puntiforme e posizionato in O , la perturbazione energetica è data da

$$\Delta E = \int \psi_{E_0}^*(\vec{r}) e\Delta V(r) \psi_{E_0}(\vec{r}) d\vec{r} = \int \psi_{E_0}^2(\vec{r}) e\Delta V(r) d\vec{r} \quad (2.33)$$

dove l'ultima uguaglianza è giustificata dall'essere reale la funzione d'onda per uno stato legato e $\Delta V(r)$ è la differenza fra il potenziale generato dalla distribuzione di carica e quello generato dalla carica puntiforme.

Supposto di considerare un atomo idrogenoide in uno stato S ($L = 0$), la funzione d'onda assume la forma

$$\psi_{E_0}(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{Z}{a}\right)^{3/2} e^{-\frac{Zr}{a}} \quad (2.34)$$

con $a = \hbar^2/(me^2)$ il raggio di Bohr, $E_0 = -Z^2e^2/(8\pi\epsilon_0a)$, e

$$\Delta V(r) = \frac{Ze}{4\pi\epsilon_0 r} \left[1 - \frac{r}{R} \left(\frac{3}{2} - \frac{r^2}{2R^2} \right) \right]$$

Per la perturbazione energetica si ha quindi

$$\Delta E = 4\pi \int_0^R r^2 \psi_{E_0}^2(r) \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} \left[1 - \frac{r}{R} \left(\frac{3}{2} - \frac{r^2}{2R^2} \right) \right] d\vec{r} \quad (2.35)$$

Essendo $R \ll a$ si può approssimare la funzione d'onda atomica dentro l'integrale col suo valore nell'origine O , sostituendo $\psi_{E_0}^2(r)$ con $\psi_{E_0}^2(0)$, per cui

$$\begin{aligned}\Delta E &= \frac{Ze^2}{\epsilon_0} \frac{Z^3}{\pi a^3} \int_0^R r^2 \left(\frac{1}{r} - \frac{3}{2R} + \frac{r^2}{2R^3} \right) dr = \\ &= \frac{e^2 Z^4}{\pi \epsilon_0 a^3} \left(\frac{R^2}{2} - \frac{R^2}{2} + \frac{R^2}{10} \right) = \frac{1}{5} \frac{Z^2 e^2}{2\pi \epsilon_0 a} \left(\frac{ZR}{a} \right)^2\end{aligned}\quad (2.36)$$

Ricordando che $E_0 = -Z^2 e^2 / (8\pi \epsilon_0 a)$, si ottiene

$$\left| \frac{\Delta E}{E_0} \right| = \frac{4}{5} \left(\frac{ZR}{a} \right)^2 \quad (2.37)$$

Scegliendo un atomo idrogenoide molto pesante, con $Z = 82$ come il piombo, per cui $R \sim 8 \times 10^{-15}$ m ed $a \sim 0.53 \times 10^{-10}$ m, si ottiene

$$\left| \frac{\Delta E}{E_0} \right| \simeq 10^{-4}$$

ovvero un effetto molto piccolo anche per l'onda S , la cui funzione d'onda non si annulla in O , e del tutto trascurabile per le altre onde (P , D , ...), la cui funzione d'onda è nulla in O .

Questo suggerisce un modo per come attuare la misura sperimentale di questo effetto, che consiste nel rilevare per un atomo la frequenza $\nu = (E_P - E_0) / \hbar$ dei raggi X emessi in transizioni da onda P a onda S e confrontarla con quanto calcolato per il corrispondente atomo idrogenoide con nucleo supposto puntiforme.

Per rendere l'entità dell'effetto maggiore, e quindi permettere una misura più significativa, dalla [2.37](#) si vede che si può lavorare su tre termini, ma già scegliendo un atomo come il piombo si è fatto quanto possibile per accrescere i primi due Z ed R , e nonostante ciò si ottiene un risultato al limite della rilevabilità. Rimane il raggio a di Bohr dell'atomo che può essere opportunamente ridotto se per un tempo sufficientemente lungo si riesce a legare all'atomo una particella carica negativamente, più pesante dell'elettrone, che si vada a posizionare su orbite idrogenoidi. Il muone negativo μ^- è un candidato ideale allo scopo in quanto possiede le stesse caratteristiche dell'elettrone in termini di spin e carica elettrica, ha una massa m_μ circa 200 volte superiore a quella m_e dell'elettrone e dopo essere stato catturato dall'atomo e prima di decadere, vive abbastanza a lungo da poter dar luogo alle transizioni richieste. Quest'ultima condizione si può stimare semiclassicamente tenendo conto che fissato Z , il periodo medio di un'orbita idrogenoide del μ^- scala, rispetto a quella elettronica equivalente, come m_e/m_μ , in quanto così fanno anche le dimensioni lineari delle nuove orbite idrogenoidi. Queste risultano dunque circa 200 volte inferiori alle corrispondenti per gli elettroni e si può di conseguenza quasi del tutto trascurare anche l'effetto schermante

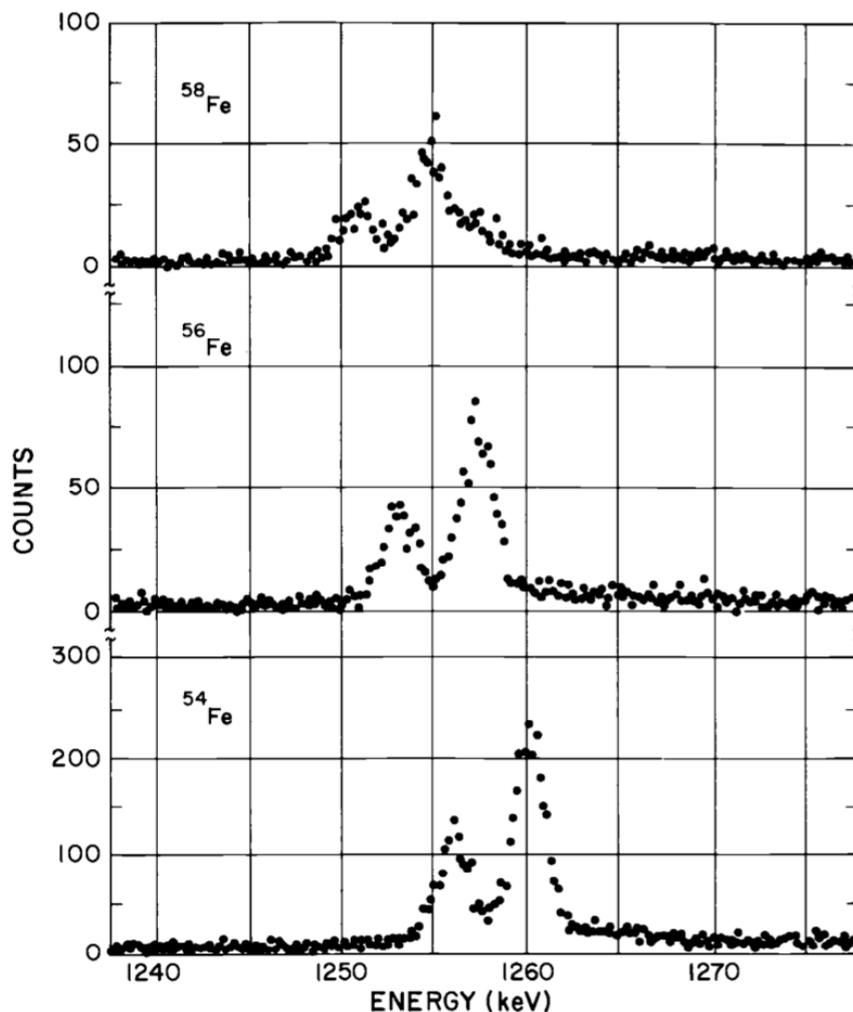


Figura 2.12: Spettri X di isotopi muonici del Ferro. Si vedono i due picchi delle transizioni $2p_{3/2}1s_{1/2}$ e $2p_{1/2}1s_{1/2}$ per i muoni, la prima con intensità doppia della seconda. Lo shift in energia della transizione è dello 0.02% fra un isotopo e il successivo, rispetto a valori dell'ordine di 10^{-6} ottenibili con elettroni equivalenti. [E.B. Shera et al., Phys. Rev. C 14 (1976) 731]

sulla carica del nucleo da parte degli elettroni atomici presenti.

I risultati sperimentali, corrispondenti a salti del muone fra i livelli atomici, concernono l'emissione e la rivelazione di fotoni piuttosto energetici, dell'ordine di frazioni del MeV, quindi raggi γ . Il calcolo dell'effetto non può dunque più essere condotto con tecniche perturbative, data l'entità, in quanto le funzioni d'onda vengono modificate sostanzialmente e il calcolo preciso dell'energia dei livelli richiede di risolvere direttamente l'equazione di Schrödinger corrispondente nel potenziale modificato. Per una stima del-

l'entità si può comunque osservare che essendo $E_0^H \simeq 10$ eV l'energia tipica d'un livello elettronico dell'idrogeno, l'energia dei corrispondenti livelli muonici E_μ^H , che scala in modo equivalente ai raggi orbitali, è proporzionale a $Z^2 E_0^H m_\mu/m_e$, che calcolata per $Z = 82$ risulta di ~ 13 MeV. Le variazioni energetiche associate ai γ rivelati costituiscono quindi frazioni importanti delle energie dei livelli stessi.

Lo studio delle differenze fra i valori dei livelli energetici reali, misurati tramite la rivelazione dei raggi γ , e i valori calcolati per atomi idrogenoidi nell'ipotesi di dimensioni nucleari finite, fornisce stime dei raggi R delle distribuzioni di carica nucleari coerenti con la forma

$$R = R_0 A^{1/3} \quad , \quad \text{con} \quad R_0 \simeq 1.16 \text{ fm} \quad (2.38)$$

Oltre al muone vi sono anche altri candidati possibili alla cattura come pioni, Kaone, antiprotone, Sigma, ecc., e il sistema dopo la loro cattura, almeno finché la particella catturata si mantiene su orbitali con alti valori di n , si comporta a tutti gli effetti come un atomo di idrogeno (atomo mesico, atomo antiprotonico, ...) il cui nucleo ha carica Ze , quindi emette raggi X in risposta alla cascata della particella verso orbitali con n inferiore.

Nel caso in cui le particelle in orbita idrogenoide sentano l'interazione forte, e ciò avviene col procedere del processo a cascata verso livelli con n sempre minore, bisogna considerare che non appena la loro funzione d'onda si sovrappone sensibilmente al nucleo, cresce moltissimo la probabilità di una interazione fra esse e il nucleo stesso, e se tale probabilità supera quella delle transizioni radiative i livelli si allargano con conseguente scomparsa della radiazione X associata. L'interruzione delle serie a un dato valore di n , con il conseguente spostamento e allargamento dei livelli, dà informazioni sull'interazione fra la particella e il nucleo e sul raggio d'azione di tale interazione, oltre che sulla massa ridotta della particella catturata. Si ottengono in tal modo informazioni sulla distribuzione in un nucleo di tutti i suoi componenti, compresi i neutroni, e i risultati sono sempre coerenti con una dipendenza da $A^{1/3}$.

- 2 - Core repulsivo

Un'altra importante evidenza del breve raggio d'azione delle forze nucleari viene dalla sostanziale costanza dell'energia media di legame B/A per nucleone, essenzialmente indipendente dalla taglia del nucleo e quindi dal numero di massa A , per valori di A circa maggiori di 12. Se infatti la forza nucleare avesse, come quella coulombiana, un ampio raggio d'azione, allora in un nucleo con A nucleoni vi sarebbero $A(A-1)/2$ coppie di interazioni fra essi e l'energia di legame media corrispondente B/A per ogni nucleone del nucleo dovrebbe quindi crescere proporzionalmente ad $(A-1) \simeq A$, per valori non piccoli di A , ovvero: $B/A \propto A$, per valori non piccoli di A .

Si constata però che sostanzialmente ogni nucleone di un nucleo interagisce

efficacemente soltanto con i nucleoni che gli sono immediatamente vicini, e l'aggiunta di ulteriori nucleoni contribuisce ad accrescere le dimensioni del nucleo ma non la sua energia media di legame per nucleone.

La forza nucleare, garantendo la coesione del nucleo, è essenzialmente attrattiva. Esperimenti di diffusione su nuclei con particelle di alta energia mettono tuttavia in evidenza che le forze nucleari, al di sotto di un certo raggio d'azione, hanno caratteristiche fortemente repulsive, e ciò è attribuito alla struttura a quark dei nucleoni. Questo tra l'altro spiega perchè un nucleo non collassi sotto l'azione della forza nucleare.

Il comportamento della forza nucleare percepita da un nucleone in moto verso il centro del nucleo può in prima approssimazione essere grezzamente schematizzato come dovuto a una energia potenziale della forma di una buca quadrata come descritto in figura 2.13 Per sondare gli effetti del potenzia-

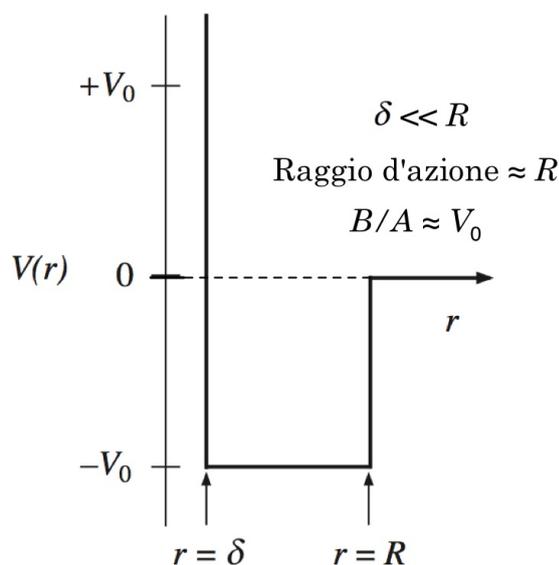


Figura 2.13: Approssimazione dell'energia potenziale nucleare in forma di buca quadrata con core repulsivo in funzione della distanza r dal centro del nucleo. L'estensione radiale del *core* repulsivo è indicata da $\delta \ll R$.

le nucleare a distanze prossime a quelle dell'estensione δ del core repulsivo sono necessarie particelle incidenti con energie alte, tipicamente superiori a qualche centinaio di MeV. Questa considerazione permette, quando si trattano fenomeni caratterizzati da basse energie, di approssimare il potenziale nucleare con una semplice buca quadrata, priva della parte repulsiva.

Naturalmente non ci si aspetta che la densità nucleare e le forze nucleari s'interrompano bruscamente a una certa distanza $r = R$, e quindi il potenziale a buca quadrata costituisce semplicemente un grezzo approccio alla descrizione di effetti di carattere generale della forza nucleare. Esso risulta

ad esempio più appropriato per descrivere l'effetto su neutroni incidenti, o altre particelle elettricamente neutre che risentano però l'effetto dell'interazione nucleare, che non su protoni o nuclei incidenti, che risentono anche l'effetto repulsivo coulombiano degli altri protoni del nucleo e sono quindi più sensibili alla forma della zona periferica della buca di potenziale.

Un protone incidente con energia totale E_0 su un nucleo con Z protoni sente la barriera repulsiva coulombiana e da un punto di vista classico non dovrebbe potersi avvicinare a una distanza inferiore ad $r = r_0^{min} = Ze^2 / (4\pi\epsilon_0 E_0)$ in quanto, per $R < r < r_0^{min}$, l'energia potenziale $V(r)$ sarebbe superiore ad E_0 e ciò condurrebbe alla condizione assurda di un'energia cinetica negativa per tale protone. Se tuttavia si considerano neutroni di energia equivalente e tale da non dover tenere conto del core repulsivo per $r \lesssim \delta$, questi dovrebbero essere in grado di penetrare nel nucleo. Questo portò a pensare che

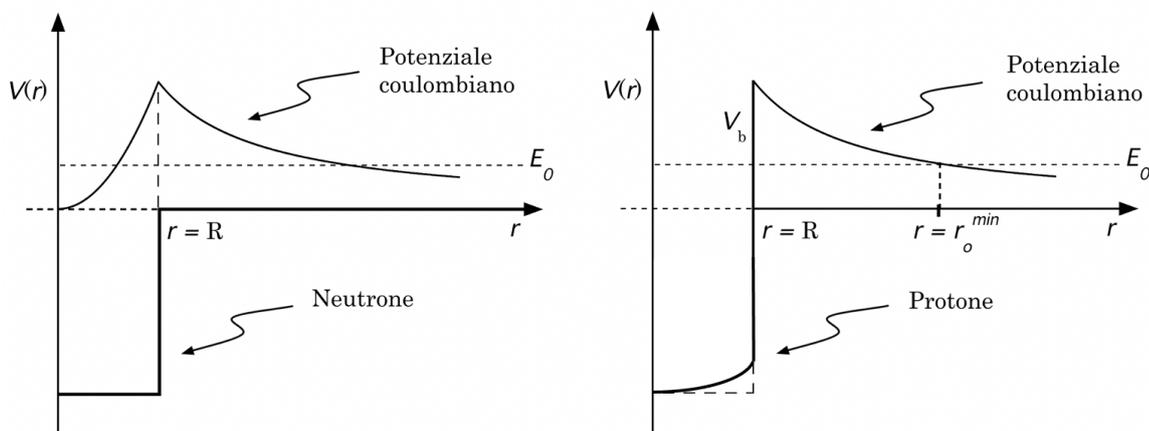


Figura 2.14: Schematizzazione di potenziale nucleare per particelle incidenti neutre di bassa energia, a sinistra, e cariche, a destra. Il core repulsivo non è presente, ma per il protone si tiene anche conto del potenziale coulombiano.

esperimenti con neutroni di bassa energia avrebbero potuto permettere di ottenere la forma corretta del potenziale nucleare, mentre invece i risultati sperimentali derivanti da esperimenti con fasci di neutroni di bassa energia mostrano una ridottissima dipendenza dai dettagli della forma del potenziale, con una dipendenza più diretta dai suoi intensità e raggio d'azione.

Si può dunque considerare il potenziale a buca quadrata semplicemente come un modo per dare una parziale descrizione fenomenologica di alcune rilevanti caratteristiche della forza nucleare.

Da un punto di vista quantistico questo suggerisce che un sistema fisico quale un nucleo atomico debba presentare una struttura con livelli energetici discreti e conseguentemente stati legati del. La presenza di questi stati quantistici nucleari e delle possibili transizioni fra essi, sono state confermate

da una molteplicità di risultati sperimentali, sia con esperimenti di diffusione che con lo studio degli spettri energetici delle emissioni radioattive. La modellizzazione dei livelli fondamentali e degli stati eccitati di nuclei hanno rappresentato una delle prime basi di prova della meccanica quantistica, e sono all'origine del cosiddetto *modello a shell* e delle sue varianti che con successo descrivono parti importanti della fenomenologia nucleare.

_ 3 _ Nuclei speculari

Studi effettuati su *nuclei speculari*, ovvero isobari che si differenziano per lo scambio fra i corrispondenti numeri di protoni e neutroni¹⁵ come ad esempio $^{15}_8\text{O}$ e $^{15}_7\text{N}$, e tramite reazioni di protoni e neutroni su nuclei, mostrano che una volta apportate le correzioni dovute agli effetti coulombiani, la forza fra due neutroni è sostanzialmente la stessa che fra due protoni, o fra protone e neutrone. Si riscontra quindi una sostanziale *indipendenza dalla carica elettrica* per la forza nucleare. Immaginando di poter "spegnere" l'effetto del campo coulombiano, neutrone e protone dovrebbero dunque, secondo quest'ipotesi, comportarsi in modo indistinguibile dal punto di vista della loro interazione nucleare, analogamente a quanto succede per due elettroni di spin opposti, nello stesso orbitale ma in assenza di un campo magnetico esterno. In questo caso i due stati risultano degeneri in energia finchè appunto non si applichi il campo magnetico esterno che definendo una direzione privilegiata nello spazio rimuove la degenerazione fra i due stati differenziandoli in energia.

Similmente si può pensare a protone e neutrone come due stati degeneri in massa per effetto di una qualche simmetria dell'interazione forte (ovvero dell'Hamiltoniano che la descrive) e si può chiamare questa simmetria *simmetria di spin isotopico forte*. La presenza delle forze elettromagnetica e debole "rompe" in effetti questa simmetria e quindi la degenerazione in massa, permettendo di distinguere fra protone e neutrone.

Questo ha condotto all'introduzione del concetto di *spin isotopico* o *isospin*, un numero quantico che qui caratterizza neutrone e protone come due diversi stati di una medesima particella, il nucleone. L'isospin di cui si tratta ora viene anche detto *isospin forte* per distinguerlo da un concetto simile introdotto per spiegare alcune caratteristiche dell'interazione *debole*.

Questi risultati e osservazioni hanno anche suggerito un ulteriore modo per stimare le dimensioni della distribuzione di carica elettrica di un nucleo. Si consideri la differenza fra le energie di legame di due nuclei speculari, che nelle ipotesi precedenti sarà dovuta interamente alle diverse energie potenziali coulombiane fra i protoni dei due nuclei. Supponendo ogni nucleo come una sfera uniformemente carica di raggio R si ha che l'energia potenziale

¹⁵Questi nuclei presentano ugual numero di interazioni $n - p$, ma diversi numeri di interazioni $p - p$ ed $n - n$.

elettrostatica è espressa da

$$E_C = \frac{\epsilon_0}{2} \left[\int_0^R r^2 E_i^2(r) dr + \int_R^\infty r^2 E_e^2(r) dr \right] \quad (2.39)$$

dove $E_i(r)$ ed $E_e(r)$ sono i campi elettrici dentro e fuori la sfera che rappresenta il nucleo, dati dalle [2.29](#), per cui

$$\begin{aligned} E_C &= \frac{(Ze)^2}{8\pi\epsilon_0} \left[\int_0^R \frac{r^4}{R^6} dr + \int_R^\infty \frac{dr}{r^2} \right] = \frac{(Ze)^2}{8\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{5R} + \frac{1}{R} \right) = \\ &= \frac{3}{20\pi\epsilon_0} \frac{(Ze)^2}{R} = \frac{3}{5} \frac{(Ze)^2}{4\pi\epsilon_0 R} \end{aligned} \quad (2.40)$$

Nell'ipotesi, suffragata dai dati sperimentali, che le dimensioni radiali di un nucleo dipendano essenzialmente da A come già visto, cioè $R = R_0 A^{1/3}$, si può assumere che i due nuclei speculari abbiano lo stesso raggio R , quindi, per grandi valori di Z , la differenza fra le energie di legame si scrive come

$$\Delta E_C = \frac{3}{20\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{R} [Z^2 - (Z-1)^2] \simeq \frac{3}{10\pi\epsilon_0} \frac{e^2 Z}{R_0 A^{1/3}} \quad (2.41)$$

Se ΔE_C è sufficientemente grande il nucleo con Z maggiore decade β^+ nel nucleo con Z minore emettendo un positrone e^+ , dalla misura dell'energia del quale si può risalire alla differenza d'energia di legame e di conseguenza ricavare R_0 , che anche in questi casi risulta consistente con quanto ottenuto negli altri modi.

Le tecniche finora descritte per lo studio delle dimensioni dei nuclei, supponendo comunque che essi siano delle strutture spazialmente simmetriche che tendono a una forma sferica al crescere del numero di massa A , si basano essenzialmente su proprietà e caratteristiche strutturali dei nuclei stessi. Più oltre si vedranno anche altri approcci, legati a processi di diffusione di proiettili sia carichi che neutri da parte dei nuclei.

2.3.8 Modello a goccia e formula di Weizsäcker

La formulazione di una *teoria del nucleo*, in grado di interpretare la molteplicità dei fenomeni osservati e organizzarli logicamente è un obiettivo perseguito ma non raggiunto.

Lo studio delle proprietà statiche e dinamiche del nucleo atomico coinvolge la soluzione di un complicato problema quantistico a più corpi: un nucleo contiene tipicamente troppi nucleoni per poter sperare di descriverne la struttura e le interazioni con particelle o altri nuclei risolvendo le equazioni del moto collettivo dei nucleoni, ma contemporaneamente contiene un numero ancor troppo piccolo di nucleoni per poter applicare senza riserve i

metodi statistici.

Queste due opposte circostanze hanno congiuntamente concorso allo sviluppo di modelli ad hoc per la descrizione di particolari aspetti della fenomenologia nucleare. La mancanza di un'unità concettuale che questo comporta è largamente compensata dagli importanti chiarimenti forniti dalla modellistica nucleare nell'analisi e interpretazione dei risultati sperimentali: i modelli nucleari, anche se spesso fra loro contraddittori e mutuamente inconciliabili, si completano parzialmente a vicenda e forniscono premesse per una possibile sintesi delle conoscenze acquisite che dovrebbe basarsi sull'opportuna applicazione delle interazioni fondamentali fra quark.

Ogni modello nucleare si fonda su una più o meno accentuata idealizzazione della realtà allo scopo di individuare, in uno schema teorico semplificato, gli elementi fisici essenziali per interpretare una certa classe di risultati sperimentali. La schematizzazione da cui trae origine il modello implica inevitabilmente la ricerca di un opportuno compromesso fra l'esigenza del rigore matematico e la realistica opportunità di procedere a semplificazioni, anche drastiche, quando fisicamente giustificabili.

Il più semplice modello di nucleo atomico lo schematizza come una *goccia sferica* di liquido, di volume $V = \frac{4}{3}\pi R_0^3$, nella quale gli $A = (Z + N)$ nucleoni sono uniformemente distribuiti con densità^[16] costante e indipendente da A

$$\begin{cases} \rho(r) = 3A/4\pi R_0^3 \equiv \rho_0 & \text{con } r \leq R_0 \\ \rho(r) = 0 & \text{con } r > R_0 \end{cases} \quad (2.42)$$

Le ipotesi alla base di tale modello di nucleo sono sostanzialmente che

- l'energia di interazione fra due nucleoni non dipende dal tipo e dal numero di altri nucleoni presenti;
- l'interazione è attrattiva con un breve raggio d'azione r_{int} , così come nelle gocce di liquido in cui le molecole hanno interazione dipolo-dipolo;
- per distanze $r \ll r_{int}$, l'interazione fra i componenti nucleari è fortemente repulsiva;
- l'energia di legame di un nucleo è proporzionale al numero dei suoi nucleoni.

Queste ipotesi implicano la cosiddetta condizione di *saturazione della densità* , per cui ogni nucleone interagisce efficacemente solo con i suoi primi vicini e si ha

$$R_0 = \left(\frac{3A}{4\pi\rho_0} \right)^{1/3} = r_0 A^{1/3} \quad (2.43)$$

Basandosi sul modello a goccia e con un approccio semi-empirico, nel 1928 von Weizsäcker formulò un'equazione che ben descrive l'andamento dell'energia media di legame per nucleone $\langle B \rangle \equiv |B/A|$, illustrato in figura [2.5](#). L'equazione di von Weizsäcker aveva dunque come obiettivo di interpretare

¹⁶Si ricordi che la densità nucleare media è pari a $\rho_0 \simeq 0.17$ nucleoni/fm³.

l'osservata dipendenza dell'energia di legame $B(A, Z)$ di un nucleo atomico dai numeri A e Z .

Esaminando la dipendenza dell'energia media di legame per nucleone $|B/A|$ da A e Z si individuano due distinti contributi all'energia di legame $B(A, Z)$ di un nucleo: un contributo di volume $B_V(A)$ che ha carattere *universale* e assicura la debole dipendenza da A e Z di $|B/A|$ per le diverse specie nucleari, e un contributo $B_i(A, Z)$ articolato su caratteristiche specifiche dei vari nuclidi, cioè

- la **repulsione elettrostatica** fra gli Z protoni del nucleo che tende a ridurre il legame nucleare;
- le **dimensioni finite** del nucleo, per cui i nucleoni delle regioni *periferiche* sono meno legati di quelli localizzati nella regione più centrale;
- l'**eccesso neutronico** che tende anche a ridurre il legame nucleare;
- la natura **pari o dispari** di A e Z , responsabile delle variazioni di massa e quindi di energia di legame, osservate nelle sequenze isobariche.

La dipendenza da A e Z delle prime due caratteristiche indicate si ottiene sulla base di elementari considerazioni classiche. Questo, e il modo in cui nel modello si tien conto di alcune prescrizioni quantistiche, costituiscono uno dei limiti sostanziali di tale approccio, al di là del suo importante ruolo nell'interpretazione di molta fenomenologia nucleare e nell'utilizzazione pratica.

- La riduzione dell'energia di legame dovuta alle dimensioni finite di un nucleo, espressa dalla cosiddetta *energia di superficie* $B_S(A)$, è proporzionale alla superficie $S = 4\pi R_0^2 = 4\pi r_0^2 A^{2/3}$ del nucleo stesso. Ciò è intuibile tenendo conto del fatto che ogni nucleone sulla superficie, proprio per motivi geometrici, ha minori interazioni leganti con i suoi simili rispetto ad un nucleone nell'interno di un nucleo. Si pone quindi

$$B_S(A) = b_S A^{2/3} \quad (2.44)$$

con b_S costante da determinare.

Questo termine spiega perchè l'energia media di legame per nucleone $|B/A|$ sia minore per i nuclei più leggeri, che hanno un maggior rapporto superficie/volume e quindi relativamente più nucleoni sulla superficie che nel *core* interno.

- La riduzione dell'energia di legame dovuta alla repulsione coulombiana fra i protoni è indicata col termine $B_C(A, Z)$. La si può stimare considerando una distribuzione, non necessariamente uniforme ma di simmetria sferica, della carica protonica in un nucleo descritta dalla

densità di carica $\rho_Z(r)$. Detta $V_C(r)$ l'energia potenziale elettrostatica di un protone nel campo elettrico degli altri $(Z - 1)$ protoni del nucleo, applicando il teorema di Gauss si ha, detto $\Phi(E_{r'})$ il flusso della componente radiale $E_{r'}$ del campo elettrico attraverso la superficie $S(r') = 4\pi r'^2$

$$E_{r'} = \frac{Q(r')}{4\pi\epsilon_0 r'^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r'^2} \int_0^{r'} 4\pi\rho_{Z-1}(r'')r''^2 dr'' \quad (2.45)$$

con $Q(r')$ la carica elettrica racchiusa nel volume sferico di raggio r' . Per la conservatività del campo elettrostatico si ha $E_{r'} = -dV_C(r')/dr'$, da cui:

$$V_C(r) = -\frac{1}{\epsilon_0} \int_\infty^r \frac{dr'}{r'^2} \int_0^{r'} \rho_{Z-1}(r'')r''^2 dr'' \quad (2.46)$$

Si ricordi che $V_C(r) \rightarrow 0$ per $r \rightarrow \infty$.

L'energia potenziale elettrostatica (coulombiana) del nucleo è

$$B_C = \frac{1}{2} \int \rho_Z(r)V_C(r)d^3r \quad (2.47)$$

Supponendo ora che la densità di carica sia uniforme entro il volume del nucleo e nulla fuori

$$\begin{cases} \rho_Z(r) = 3Ze/4\pi R_0^3 & \text{con } r \leq R_0 \\ \rho_Z(r) = 0 & \text{con } r > R_0 \end{cases} \quad (2.48)$$

si ha:

$$\begin{cases} V_C(r) = \frac{(Z-1)e}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2R_0} \left(3 - \frac{r^2}{R_0^2}\right) & \text{con } r \leq R_0 \\ V_C(r) = \frac{(Z-1)e}{4\pi\epsilon_0 r} & \text{con } r > R_0 \end{cases} \quad (2.49)$$

In base alle [2.48](#) e [2.49](#), la [2.47](#) diventa:

$$B_C(A, Z) = \frac{3}{5} \frac{Z(Z-1)}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{R_0} = b_C \frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}} \quad (2.50)$$

con $b_C = (3e^2)/(20\pi\epsilon_0 r_0)$.

La dipendenza da A e Z trovata per l'energia coulombiana vale anche se la carica elettrica non è uniformemente distribuita nel volume nucleare, purchè sia a simmetria sferica, in tal caso sarà il valore di b_C a cambiare.

Allo stesso risultato si poteva arrivare ricordando, come ottenuto con la [2.40](#) che l'energia potenziale elettrostatica di una distribuzione sferica di raggio R_0 e simmetrica di carica Ze vale

$$\frac{3}{5} \frac{(Ze)^2}{4\pi\epsilon_0 R_0}$$

ma che al tempo stesso, perchè ci sia repulsione fra cariche, bisogna che ce ne siano almeno due, quindi per $Z = 1$ il termine di potenziale che "indebolisce" l'energia di legame di un nucleo deve annullarsi, e ciò si ottiene sostituendo $Z(Z - 1)$ a Z^2 .

- La riduzione dell'energia di legame dovuta all'eccesso neutronico è espressa dalla cosiddetta *energia di simmetria* $B_{sim}(A, Z)$. Sperimentalmente si osserva che mentre per nuclei con bassi valori di A si tende ad avere una condizione per cui $N \cong Z$, al crescere di A il numero di neutroni diventa preponderante ($N/Z > 1$), e ciò in parte compensa l'accrescersi della repulsione coulombiana che seppur più debole dell'interazione nucleare, agendo però a lungo range ridurrebbe troppo l'energia di legame rendendo instabili i nuclei al crescere di A ben prima di quanto non avvenga, se si mantenesse $N \cong Z$. La dipendenza da A e Z di $B_{sim}(A, Z)$ può essere intuitivamente ottenuta considerando che ogni neutrone in eccesso provoca una riduzione di energia di legame per nucleone proporzionale a $(N - Z)/A$. Siccome il numero totale di neutroni in eccesso è $(N - Z)$, l'effetto complessivo è proporzionale ad $(N - Z)^2/A$, da cui

$$B_{sim}(A, Z) = b_{sim} \frac{(N - Z)^2}{A} = b_{sim} \frac{(A - 2Z)^2}{A} \quad (2.51)$$

La costante di proporzionalità b_{sim} si ottiene sperimentalmente. Perchè il termine $B_{sim}(A, Z)$ contribuisca a ridurre $|B/A|$, nonostante l'aumento di N/Z al crescere di A favorisca la stabilità dei nuclei più pesanti, può essere intuito pensando al principio d'esclusione secondo il quale uno stesso stato quantico non può essere occupato da più di due fermioni. Considerando che ad ogni fissato livello energetico di stato legato c'è un numero finito di stati quantici disponibili, si ha che aggiungendo nucleoni a un nucleo essi si posizioneranno su livelli a energie sempre più alte; ciò però determina l'aumento dell'energia totale del nucleo portando di conseguenza a una diminuzione della sua energia di legame.

Come si vedrà più avanti, trattando del modello nucleare a gas di Fermi, protoni e neutroni occupano nel nucleo due diversi gruppi di livelli energetici pressochè paralleli e se un nucleo contiene più neutroni che protoni, vi sarà per esso un certo numero di neutroni su livelli a energie superiori rispetto ai protoni.

Immaginando di poter trasformare metà dei neutroni in eccesso in protoni e sistemandoli quindi sui relativi livelli, riequilibrando così i numeri di protoni e neutroni di quel nucleo, si otterrebbe una riduzione della

sua energia, e quindi una maggior energia di legame, non sufficiente però a bilanciare l'aumento del contributo di repulsione coulombiana. È dunque lo squilibrio fra Z ed N che genera il termine d'asimmetria.

- Lo studio sistematico delle masse nucleari mostra che i nuclei sono più stabili quando posseggono un numero pari di protoni e/o di neutroni. Questo viene interpretato come un accoppiamento a doppietti sia dei protoni che dei neutroni, in funzione di come si accoppiano i loro momenti orbitali e di spin a formare il momento angolare totale J di un nucleo. Empiricamente si tiene conto di ciò ponendo

$$B_{ac}(A, Z) = b_{ac} \frac{\delta(A, Z)}{A} \quad (2.52)$$

L'analisi fenomenologica delle sequenze isobariche suggerisce di porre $\delta(A, Z) = -1$ se N e Z sono entrambi pari, $\delta(A, Z) = 0$ se N e Z sono l'uno pari e l'altro dispari, o viceversa, e $\delta(A, Z) = +1$ se N e Z sono entrambi dispari. Per tener conto di ciò si può anche scrivere

$$B_{ac}(A, Z) = -b_{ac} \frac{(-1)^N + (-1)^Z}{2A} \quad (2.53)$$

Tornando ora al termine dell'energia di volume $B_V(A)$, lo si esprime come una funzione lineare del numero di massa A

$$B_V(A) = b_V A \quad (2.54)$$

cosicché il contributo di volume dell'energia media per nucleone, $b_V = B_V(A)/A$, risultando indipendente da A , rappresenti l'indispensabile termine costante dell'energia media di legame, senza il quale la debole dipendenza da A (per $A \geq 12$) osservata per $b(A, Z)$ non sarebbe giustificabile.

Si ottiene quindi, per l'energia di legame dei nuclei atomici, la seguente formula semi-empirica:

$$\begin{aligned} B_0(A, Z) &= B_V(A) + B_S(A) + B_C(A, Z) + B_{sim}(A, Z) + B_{ac}(A, Z) = \\ &= b_V A + b_S A^{2/3} + b_C \frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}} + b_{sim} \frac{(A-2Z)^2}{A} + b_{ac} \frac{\delta(A, Z)}{A} \end{aligned} \quad (2.55)$$

Un best-fit con questa relazione sui dati sperimentali permette di ottenere i valori dei cinque parametri b_V , b_S , b_C , b_{sim} e b_{ac} . Qui di seguito sono riportati i valori di uno di tali best-fit:

$$\left\{ \begin{array}{ll} b_V = -15.56 & \text{MeV} \\ b_S = +17.23 & \text{MeV} \\ b_C = +0.697 & \text{MeV} \\ b_{sim} = +19.1 & \text{MeV} \\ b_{ac} = +135.0 & \text{MeV} \end{array} \right. \quad (2.56)$$

Per le masse nucleari si ottiene quindi, partendo dalla [2.9](#),

$$M(A, Z) = Zm_p + (A - Z)m_n + \frac{B_0(A, Z)}{c^2} \quad (2.57)$$

L'attendibilità media dei risultati forniti dalla [2.57](#) è di circa 2 MeV/c²,

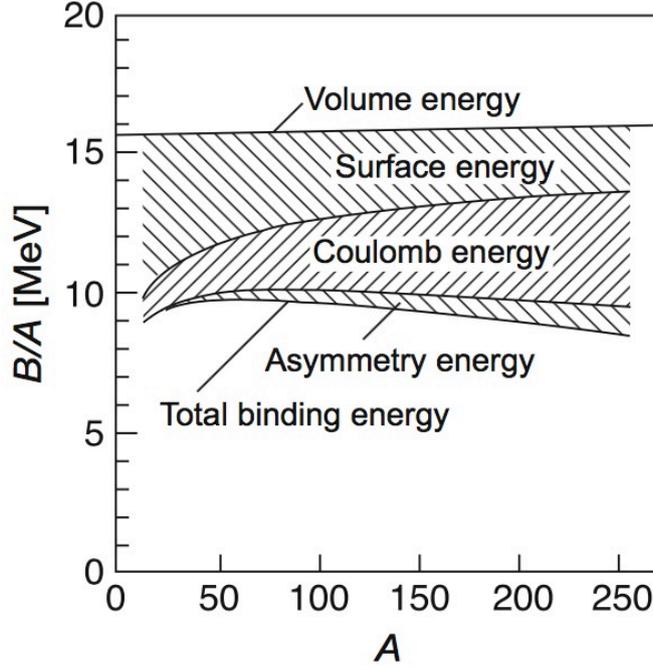


Figura 2.15: Illustrazione del contributo dei vari termini della formula di Weizsäcker all'energia media di legame per un nucleone in un nucleo, in funzione del numero di massa A .

tranne che in corrispondenza ai valori di A e Z per i quali si fanno sentire forti effetti di *chiusura degli strati*.

In figura [2.15](#) è illustrata l'entità dei diversi contributi all'energia media di legame per un nucleone in un nucleo presenti nella [12.1.2](#); in figura [2.16](#) è riportato il risultato di un fit, sempre utilizzando la formula di Weizsäcker [12.1.2](#), sull'insieme dei valori delle energie di legame medie per nucleone. Si veda ora che se nella [2.57](#) si pone

$$\begin{cases} \alpha = b_C A^{-1/3} + 4b_{sim} A^{-1} \\ \beta = b_C A^{-1/3} + 4b_{sim} + m_n - m_p \\ \gamma = b_V + b_S A^{-1/3} + b_{sim} + m_n \end{cases} \quad (2.58)$$

essa diventa

$$M(A, Z) = \alpha Z^2 - \beta Z + \gamma A + b_{ac} \frac{\delta(A, Z)}{A} \quad (2.59)$$

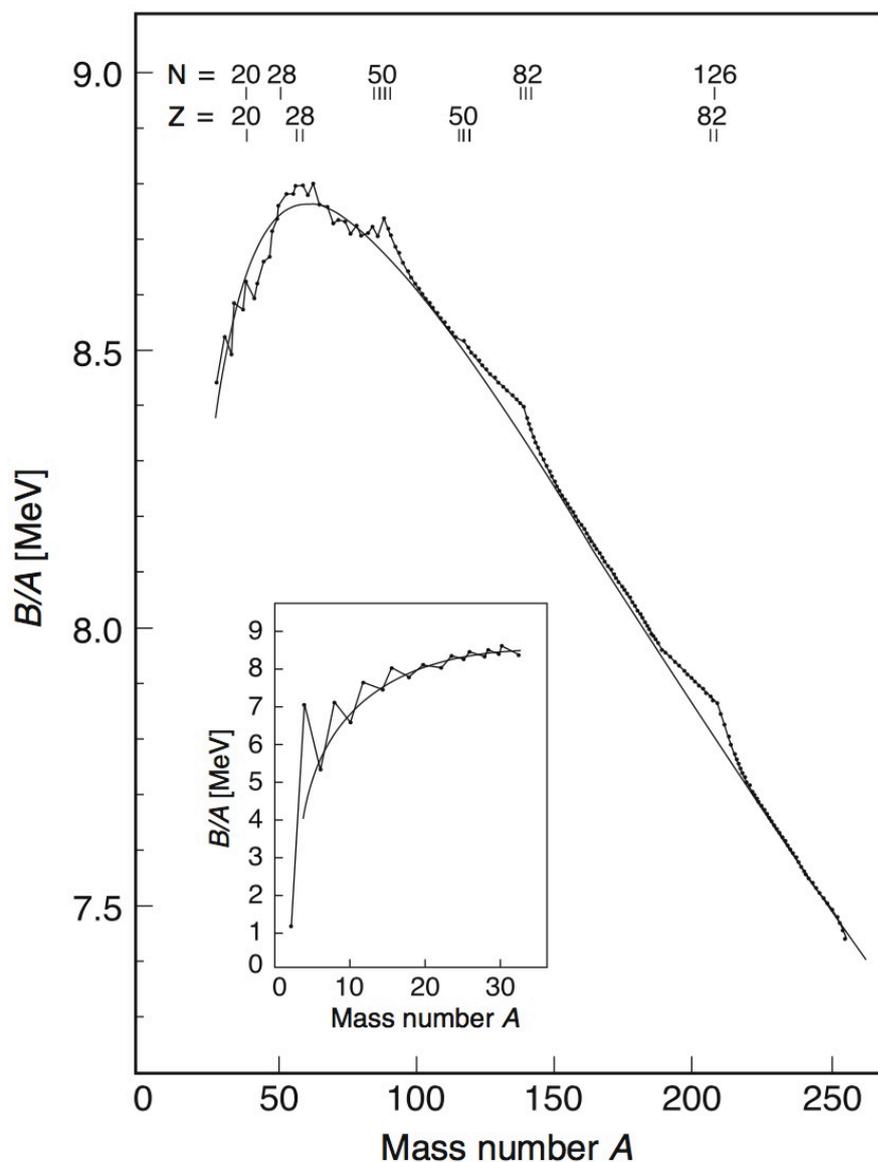


Figura 2.16: Fit con la formula di Weizsäcker sull'insieme dei valori delle energie di legame medie per nucleone, dei nuclei con valore pari di A (dalla compilazione di Mattauch, Thiele e Wapstra, Nuc. Phys. 67(1965) 1). Sono evidenziati i *numeri magici*.

esprimendo la massa dei nuclei come una funzione quadratica di Z , per valori fissati di A . Con valori dispari di A si ha un unico andamento parabolico per $M(Z)$; per valori pari di A si trova che le masse dei nuclei pari-pari e dispari-dispari si distribuiscono su due parabole traslate verticalmente, con

quella relativa ai nuclei dispari-dispari situata a energie maggiori della quantità $2|B_{ac}(A, Z)|$.

I minimi di tali parabole sono in corrispondenza di $Z = \beta/2\alpha$, e indicano i nuclidi di massa inferiore per la sequenza isobarica individuata dal particolare valore di A , stabili rispetto al decadimento β .

Si è così ritrovato quanto evidenziato sperimentalmente dalla tabella dei nuclidi e descritto nel precedente paragrafo [2.2](#).

Per chiarire l'importanza e l'utilità della formula di Weizsäcker è anche necessario sottolinearne i limiti che contribuiscono a definirne gli effettivi ambiti di applicabilità.

L'ipotesi in base alla quale si sono ottenuti alcuni termini considera il nucleo come sostanzialmente *sferico*, e questo non permette di tener conto dei termini non nulli di quadrupolo elettrico che si osservano per svariati nuclei. Risultati in merito alla saturazione della forza di coesione fra i nucleoni in un nucleo e alla loro repulsione a breve range [17](#), mettono in evidenza che non basta tener conto del principio di esclusione di Pauli come fatto.

Le considerazioni sul ruolo che momento angolare orbitale e spin dei nucleoni hanno sul carattere repulsivo della forza, sono puramente qualitative e semiclassiche.

Si osservi poi che il filo conduttore che conduce a tale formula consiste sostanzialmente nell'assimilare il nucleo atomico a una specie di *goccia di liquido*, ma le predizioni che ne conseguirebbero per descrivere moti collettivi rotazionali e/o vibrazionali non coprono la panoramica dei fenomeni osservati, o comunque non li descrivono in modo completo e soddisfacente.

L'approccio è stato ed è comunque utile nel descrivere la stabilità dei nuclei rispetto al decadimento α , alla fissione e al decadimento β .

2.3.9 Momenti elettrici e magnetici dei nuclei

La gran parte di quanto si sa della struttura dei nuclei non deriva direttamente dallo studio di come essi interagiscono "fortemente" con altri nuclei, ma piuttosto di come interagiscono elettromagneticamente.

La forza nucleare determina sostanzialmente distribuzione e moto dei nucleoni nel nucleo e se per sondarli si utilizzano interazioni elettromagnetiche, queste hanno effetti più deboli dell'ambiente "nucleare" circostante, in tal modo si ha una discreta garanzia di non distorcere significativamente le caratteristiche di quanto si sta misurando.

Ogni distribuzione di cariche o correnti è sorgente di campi elettrici e magnetici la cui forma e intensità dipendono anche dalla distanza dalla sorgente. Abitualmente si associano alle distribuzioni di cariche e correnti dei "momenti di multipolo" per ogni specifica distribuzione spaziale: la proporzionalità $1/r^2$ del campo elettrico deriva dalla carica totale della sorgente e gli

¹⁷Si veda anche il paragrafo [9.2](#).

si assegna il momento d'ordine zero o "monopolo"; la proporzionalità $1/r^3$ deriva dal momento d'ordine uno o "dipolo"; la proporzionalità $1/r^4$ deriva dal momento d'ordine due o "quadrupolo", e così via.

Per i momenti magnetici le cose sono simili con l'eccezione del momento di ordine zero, il monopolo magnetico, che sembra non esistere, e quindi non vi sono contributi di momento magnetico proporzionali a $1/r^2$.

Con l'elettromagnetismo si è visto come calcolare i diversi momenti di multipolo elettrici e magnetici e la stessa strategia può essere adottata per i momenti di un nucleo, tenendo però conto che si ha a che fare in tal caso con un soggetto che va trattato quantisticamente, per cui i momenti di multipolo diventeranno delle osservabili per le quali si possono calcolare i valori d'aspettazione associati ai diversi stati di un nucleo. Questi valori d'aspettazione dovranno naturalmente essere poi direttamente confrontabili con i valori sperimentali misurati.

Classicamente si ha che una distribuzione di carica a simmetria sferica genera soltanto il campo monopolare coulombiano e i multipoli d'ordine superiore sono tutti nulli.

Una corrente che si sviluppi su un percorso piano-circolare genera soltanto un campo magnetico dipolare.

È inoltre ragionevole pensare che i nucleoni di un nucleo si aggregino a formare il nucleo in una struttura che se non eccitata, nel rispetto dell'interazione nucleare, tende a una distribuzione e forma il più possibile simmetriche, quindi per quanto possibile prossima a quella sferica, ed è per questo che in molti casi è sufficiente misurare e calcolare soltanto i multipoli d'ordine più basso per caratterizzare le proprietà elettromagnetiche di un nucleo. Questo porta a immaginare che le proprietà multipolari d'ordine superiore di un nucleo possano essere ascritte alla presenza in esso di nucleoni spaiati. Un ulteriore vincolo all'insorgere di momenti di multipolo nei nuclei è legato alle loro proprietà di simmetria e alla parità dei loro stati. Ogni momento di multipolo elettromagnetico ha una definita parità, determinata dal comportamento dell'operatore associato quando si considera la trasformazione $r \rightarrow -r$, e bisogna tenerne conto per la compatibilità con la parità degli stati del nucleo.

La parità dei momenti elettrici è data da $(-1)^\ell$, dove ℓ rappresenta l'ordine del momento di multipolo ($\ell = 0$ per il monopolo, $\ell = 1$ per il dipolo, ...). La parità dei momenti magnetici è invece data da $(-1)^{\ell+1}$.

Per calcolare il valore d'aspettazione di un operatore "momento di multipolo" \mathcal{O} , si effettua un integrale del tipo

$$\int \psi^*(\vec{r}) \mathcal{O} \psi(\vec{r}) d\vec{r} \quad (2.60)$$

Se le forze in gioco conservano la parità, allora in un sistema descritto da una funzione d'onda ψ non degenere, la parità della stessa è ininfluenza e

si ha che $\psi^*\psi = |\psi|^2$ è pari. Se però \mathcal{O} è un operatore dispari allora tutto l'integrando è una funzione dispari, per cui l'integrale si annulla. Questo porta ad affermare che *in un nucleo tutti i momenti di multipolo statico con parità dispari devono essere nulli*, quindi il dipolo elettrico, il quadrupolo magnetico, l'ottupolo elettrico,

L'evidenza sperimentale dell'assenza di momenti di dipolo elettrici per i nuclei, porta dunque a concludere che le forze nucleari conservano la parità.

Il fatto che a meno di possibili piccole influenze dovute all'interazione debole che può introdurre nell'Hamiltoniana termini che non conservano la parità, gli stati nucleari abbiano parità definita, è però di per sé una condizione solo sufficiente all'annullarsi dei momenti di multipolo elettrico d'ordine dispari; si può infatti provare che il momento di dipolo elettrico di un nucleo si annulla anche se tutti i moti interni soddisfano l'*inversione temporale*.

Si vedano ora i primi tre momenti di multipolo nucleari non nulli, che sono quelli significativi dal punto di vista sperimentale.

- Il momento di multipolo elettrico corrisponde, come già osservato, alla carica nucleare netta Ze .
- Il successivo momento non nullo è il momento di dipolo magnetico μ . Considerando una corrente I che si sviluppa lungo una traiettoria piana circolare di area A , si vede che gli è associato un momento magnetico di modulo $|\vec{\mu}| = IA$, e se la corrente è dovuta a una particella di massa M e carica e che ruota con velocità di modulo v su una traiettoria circolare di raggio r , con periodo $T = 2\pi r/v$, allora

$$|\vec{\mu}| = \frac{ev}{2\pi r} \pi r^2 = \frac{evr}{2} = \frac{e}{2M} |\vec{\ell}| \quad (2.61)$$

con $\vec{\ell}$ il momento angolare classico. Quantisticamente si definisce operativamente l'osservabile momento magnetico come corrispondente alla massima componente di $\vec{\ell}$, per cui si può scrivere la forma quantistica di μ sostituendo ℓ nella [2.61](#), col suo valore d'aspettazione relativo alla direzione lungo la quale la sua proiezione è massima, ovvero pari ad $m_\ell \hbar$ con $m_\ell = +\ell$

$$\mu = \frac{e\hbar}{2M} \ell \quad (2.62)$$

con ℓ numero quantico del momento angolare orbitale.

La quantità $e\hbar/2M$ è detta *magnetone elementare* e nel caso atomico si pone $M = m_e$, ottenendo il magnetone di Bohr μ_B , mentre nel caso nucleare si pone $M = m_p$, ottenendo il magnetone nucleare μ_N .

Il fatto che $\mu_N/\mu_B \ll 1$ giustifica che in molte circostanze gli effetti derivanti dal magnetismo atomico siano preponderanti rispetto a quelli del magnetismo associato ai nuclei.

La [2.62](#) può essere utilmente scritta come

$$\mu = g_\ell \ell \mu_N \quad (2.63)$$

dove g_ℓ è un fattore associato al momento angolare orbitale ℓ che vale 1 per i protoni e 0 per i neutroni.

I nucleoni posseggono, come visto, anche un momento angolare intrinseco di spin cui è associato un momento magnetico intrinseco, che non ha analogo classico, ma che può essere scritto come

$$\mu = g_s s \mu_N \quad (2.64)$$

con $s = 1/2$ e g_s il cosiddetto *fattore di spin*, che dalla soluzione dell'equazione di Dirac dovrebbe coincidere con 2, nell'ipotesi di particelle puntiformi, quindi prive di struttura interna.

Ciò è molto ben verificato per l'elettrone, mentre i valori misurati sperimentalmente su nucleoni liberi sono

$$\begin{aligned} g_s &= 5.5856912 \pm 0.0000022 && \text{per il protone} \\ g_s &= -3.8260837 \pm 0.0000018 && \text{per il neutrone} \end{aligned}$$

Questo è chiaramente un indizio imprescindibile del fatto che protoni e neutroni non sono assimilabili a particelle elementari, ma hanno una struttura costitutiva e non sono puntiformi.

Tabella - Momenti di dipolo magnetico di alcuni nuclei nello stato fondamentale

Nuclide	$\mu (\mu_N)$
n	-1.9130418
p	+2.7928456
${}^2\text{H (D)}$	+0.8574376
${}^{17}\text{O}$	-1.89379
${}^{57}\text{Fe}$	+0.09062293
${}^{57}\text{Co}$	+4.733
${}^{93}\text{Nb}$	+6.1705

Si è accennato al fatto che i nucleoni in un nucleo interagiscono in modo da accoppiarsi favorendo quanto più possibile una condizione di massima energia di legame per il nucleo stesso, e questo corrisponde al fatto che gli accoppiamenti tendono a determinare per ogni nucleo un momento angolare orbitale totale e di spin totale, quanto più possibile

prossimi a zero.

Questo porta a dedurre che i nucleoni accoppiati non danno contributo al momento magnetico che deriva sostanzialmente solo dagli eventuali "pochi" *nucleoni di valenza*, ovvero disaccoppiati, presenti.

Queste osservazioni sono suffragate dai risultati sperimentali che mostrano come la gran parte dei nuclei abbia valori contenuti del momento di dipolo magnetico; il valore più alto è quello del ^{93}Nb , leggermente superiore a 6 magnetoni nucleari.

Nel 1937 Schmidt elaborò un modello per predire i valori dei momenti magnetici di dipolo dei nuclei, basato sull'idea che il contributo prevalente sia dovuto al nucleone spaiato, suggerito da una regolarità abbastanza generale desumibile dai dati per i nuclei con A dispari. Questi possono infatti essere visti come composti da una parte costituita da un nocciolo completo di nucleoni con spin appaiati, più un nucleone spaiato. Il nocciolo completo contiene necessariamente un numero pari di neutroni e protoni ed è quindi ragionevole pensare che non possieda né momento angolare né momento magnetico. Aggiungendo a questo un nucleone di momento angolare ℓ e spin $1/2$, lo spin totale del nucleo risulta pari ad $\ell \pm 1/2$. In base al modello vettoriale $\vec{\ell}$ ed \vec{s} si combinano per formare \vec{J} , acquisendo ognuno e indipendentemente un moto di precessione attorno a \vec{J} . Il momento magnetico lungo la direzione di \vec{J} è allora

$$\mu_J = \left(g_\ell \frac{\vec{\ell} \cdot \vec{J}}{J} + g_s \frac{\vec{s} \cdot \vec{J}}{J} \right) \mu_N = J g_J \mu_N \quad (2.65)$$

con $g_\ell = 0$ per il neutrone, $g_\ell = 1$ per il protone ed $\vec{\ell} \cdot \vec{J}$ espresso dalla

$$s^2 = \ell^2 + J^2 - 2\vec{\ell} \cdot \vec{J}$$

che quantisticamente diventa

$$\frac{\vec{\ell} \cdot \vec{J}}{J^2} = \frac{\ell(\ell+1) + J(J+1) - s(s+1)}{2J(J+1)}$$

e analogamente per $(\vec{s} \cdot \vec{J})/J^2$. Sostituendo si ottiene

$$\begin{aligned} g_J &= g_s \frac{J(J+1) + s(s+1) - \ell(\ell+1)}{2J(J+1)} + \\ &+ g_\ell \frac{J(J+1) + \ell(\ell+1) - s(s+1)}{2J(J+1)} \end{aligned} \quad (2.66)$$

Quindi, per $J = \ell + 1/2$,

$$\mu_J = \left(\frac{1}{2} g_s + \ell g_\ell \right) \mu_N \quad (2.67)$$

e per $J = \ell - 1/2$

$$\mu_J = \left[-\frac{1}{2} g_s \frac{2\ell - 1}{2\ell + 1} + g_\ell \frac{(\ell + 1)(2\ell - 1)}{2\ell + 1} \right] \mu_N \quad (2.68)$$

Combinando le due espressioni si ha

$$\mu_J = J \left[g_\ell \pm \frac{1}{2\ell + 1} (g_s - g_\ell) \right] \mu_N \quad (2.69)$$

con il segno ”+” che vale per $J = \ell + 1/2$. Nelle figure [2.17](#) e [2.18](#) sono riportati i valori sperimentali per μ_J , confrontati con i risultati forniti dalla formula [2.67](#) che individua le cosiddette ”curve di Schmidt”. Si nota che queste non riproducono con precisione i valori sperimentali che si trovano comunque compresi nella fascia di valori da esse delimitata, e ciò non deve sorprendere, dato il carattere grossolano del modello.

- Proseguendo nella ricerca dei momenti di multipolo non nulli si trova il ”momento di quadrupolo elettrico”. L’espressione classica per il momento di quadrupolo elettrico eQ associato a una carica puntiforme e , posta a distanza r dall’origine di un sistema di riferimento cartesiano ortogonale (x, y, z) , e riferito all’asse z , è data da

$$eQ = e(3z^2 - r^2) \quad (2.70)$$

come mostrato in Appendice [B](#).

Se nel nucleo c’è un nucleone spaiato che però si muove in modo sfericamente simmetrico, per cui in media si ha $x^2 = y^2 = z^2 = r^2/3$, allora il momento di quadrupolo elettrico risulta nullo.

Se si immagina che il nucleone si muova lungo un’orbita piana ”classica” giacente sul piano $(x; y)$, allora si ha $z = 0$ e $Q = -r^2$.

La corrispondente osservabile momento di quadrupolo elettrico in meccanica quantistica è definita come

$$eQ = e \int \psi^*(\vec{r}) (3z^2 - r^2) \psi(\vec{r}) d\vec{r} \quad (2.71)$$

se quindi il nucleone spaiato è un neutrone, il suo contributo al momento di quadrupolo elettrico del nucleo è nullo.

Se $|\psi|^2$ ha simmetria sferica, quindi con $|\vec{J}| = 0$, allora $Q = 0$, come nel caso classico.

Quantisticamente si trova che $Q = 0$ anche per $|\vec{J}| = 1/2$ [18](#).

Se $|\psi|^2$ è concentrata nel piano $(x; y)$, ovvero $(z \simeq 0)$, allora si ha che $Q \sim -\langle r^2 \rangle$, con $\langle r^2 \rangle$ il raggio quadratico medio dell’orbita, e si ha una

¹⁸Si veda l’Appendice [B](#)

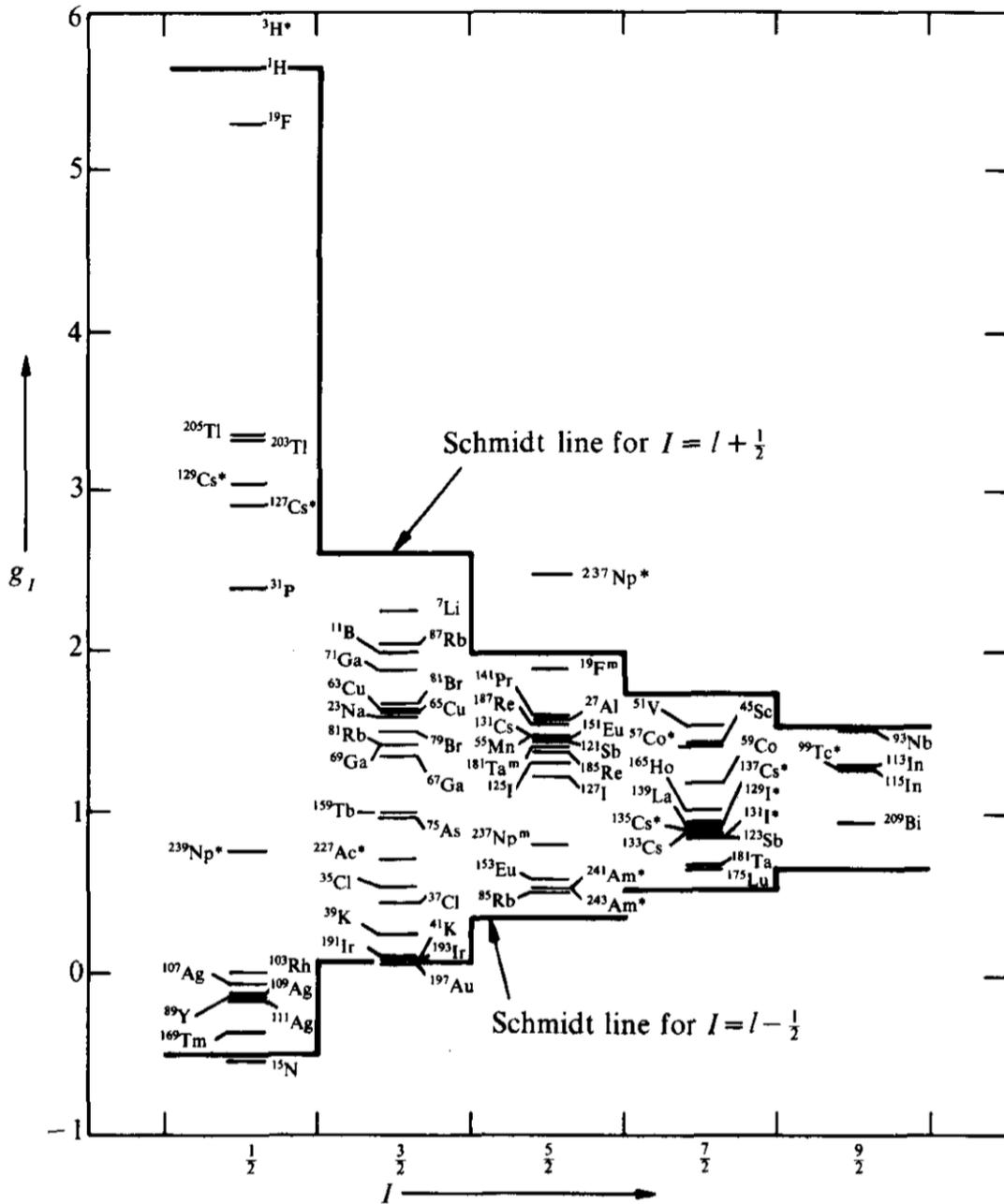


Figura 2.17: Valori di g_I e linee di Schmidt per nuclei con numero dispari di protoni.

deformazione "oblata" della distribuzione di carica.
 Se invece $|\psi|^2$ è concentrata lungo l'asse z , quindi ($z \simeq r$), si trova

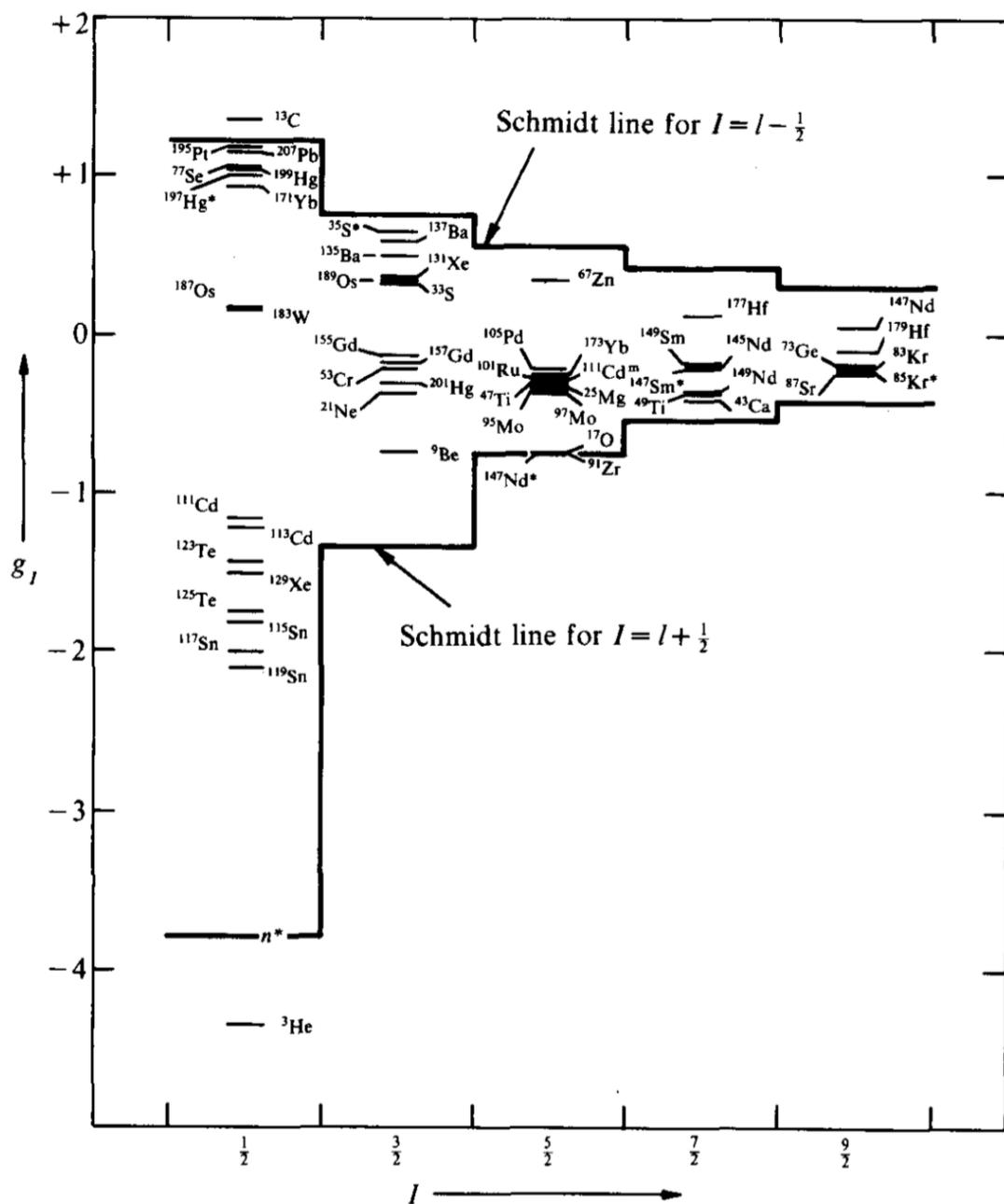


Figura 2.18: Valori di g_J e linee di Schmidt per nuclei con numero dispari di neutroni.

$Q \sim +2\langle r^2 \rangle$, e si ha una deformazione "prolata" della distribuzione di carica.

Considerare il termine d'accoppiamento risulta anche in questo caso

utile in quanto si può assumere che nucleoni accoppiati che si muovono nel nucleo in modo sfericamente simmetrico non contribuiscano a Q . Si può dunque immaginare che per nuclei che soddisfino questa simmetria strutturale il momento di quadrupolo elettrico possa essere stimato tenendo conto della presenza di un eventuale nucleone spaiato, detto anche di valenza, che si muova in prossimità della superficie di un core quasi sferico costituito dagli altri $A - 1$ nucleoni accoppiati, quindi a distanza $R = R_0 A^{1/3}$ dal centro, il che porta a stimare il momento di quadrupolo come

$$|eQ| \leq e R_0^2 A^{2/3} \quad (2.72)$$

Calcolando $|eQ|$ si trova che esso varia da circa $6 \times 10^{-30} e \cdot m^2$, per i nuclei leggeri, fino a circa $50 \times 10^{-30} e \cdot m^2$ per i nuclei più pesanti. Introducendo il *barn*, con $1 \text{ b} = 10^{-28} \text{ m}^2$, si trova quindi che i valori calcolati secondo il semplice modello proposto soddisfano la condizione $0.06 e \cdot \text{b} \leq |eQ| \leq 0.5 e \cdot \text{b}$.

Le misure sperimentali mostrano che molti nuclei hanno valori di $|eQ|$ compresi entro questo intervallo, nonostante ve ne siano alcuni, soprattutto fra le terre rare, che se ne discostano anche significativamente, indicando che in quei casi il modello a nucleone spaiato singolo non riesce a spiegare i grandi valori misurati per il momento di quadrupolo elettrico. Quindi l'assunzione che i nuclei siano costituiti da un core a simmetria sferica di nucleoni appaiati, più un eventuale nucleone spaiato, non è valida per tutti i nuclei; in certi casi anche il "core" può presentarsi con una simmetria non sferica.

Nella tabella che segue sono riportati i valori dei momenti di quadrupolo di alcuni nuclei nel loro stato fondamentale.

Tabella - Momenti di quadrupolo di alcuni nuclei nello stato fondamentale.

Nuclide	Q (barn)
^2H (D)	+0.00288
^{17}O	-0.02578
^{59}Co	+0.40
^{63}Cu	-0.209
^{133}Cs	-0.003
^{161}Dy	+2.4
^{179}Lu	+8.0
^{209}Bi	-0.37

2.3.10 Misure dei momenti elettrici e magnetici dei nuclei

Nei nuclei ci sono quindi neutroni e protoni in movimento che danno luogo a densità di massa, di carica e di correnti. Nell'ipotesi che i campi elettrici e magnetici esterni in cui un nucleo si può trovare non perturbino le sue distribuzioni interne di cariche e correnti, l'energia globale del nucleo dipende anche dall'interazione dei suoi momenti elettrici e magnetici con questi campi esterni.

I campi esterni elettrici e magnetici possono essere quelli dovuti agli elettroni dell'atomo e/o della molecola cui il nucleo appartiene, o altri prodotti ad hoc.

I campi magnetici dovuti agli elettroni atomici sono orientati lungo la direzione del momento angolare totale dell'atomo. Anche il momento angolare e il momento magnetico del nucleo sono orientati lungo una stessa direzione, che per le note prescrizioni quantistiche derivanti dal rispetto del principio di indeterminazione non potrà però mai allinearsi esattamente alla precedente.

Campi magnetici ad hoc possono essere generati e controllati dagli sperimentatori, ma non superano intensità massime dell'ordine di poche decine di Tesla; quelli generati dagli elettroni atomici sono noti con minor precisione, ma possono essere molto più intensi. Le energie d'interazione con i momenti elettrici e magnetici nucleari perturbano i livelli di atomi e/o molecole generando la cosiddetta *struttura iperfine* delle linee spettrali atomiche o molecolari, spiegata da W. Pauli nel 1924 e la cui analisi sperimentale permette appunto di effettuare misure dei momenti nucleari.

Misure del momento d_n di dipolo elettrico del neutrone danno un limite superiore (d_n/e) $< 3 \times 10^{-28}$ m, con e la carica elementare.

I valori dei momenti di quadrupolo elettrico misurati per i nuclidi sono compresi fra i +8 barn del ^{176}Lu e -1.0 barn del ^{123}Sb .

Introducendo la quantità

$$Q_{rid} = \frac{Q}{Ze \langle R \rangle^2} \quad (2.73)$$

detta *momento di quadrupolo ridotto* e dove $\langle R \rangle$ è una sorta di raggio medio della distribuzione di carica, si agevola il confronto fra le entità delle deformazioni nucleari in funzione dei diversi numeri di massa.

Osservando in figura [2.19](#), la distribuzione dei momenti di quadrupolo elettrico ridotto di nuclei con A dispari, graficati in funzione del valore di N , si nota che il Q_{rid} dei nuclei con Z dispari e N pari dipende essenzialmente dal numero di protoni, mentre quello dei nuclei con Z pari ed N dispari dipende in segno dal numero di protoni e in valore assoluto dal numero di neutroni. Inoltre Q_{rid} cambia bruscamente valore tra coppie di nuclei adiacenti a nuclei con valori di Z ed N espressi da: $Z^*, N^* = 2, 8, 20, 50, 82, 126$, ovvero i *numeri magici* già incontrati nel paragrafo [2.2](#).

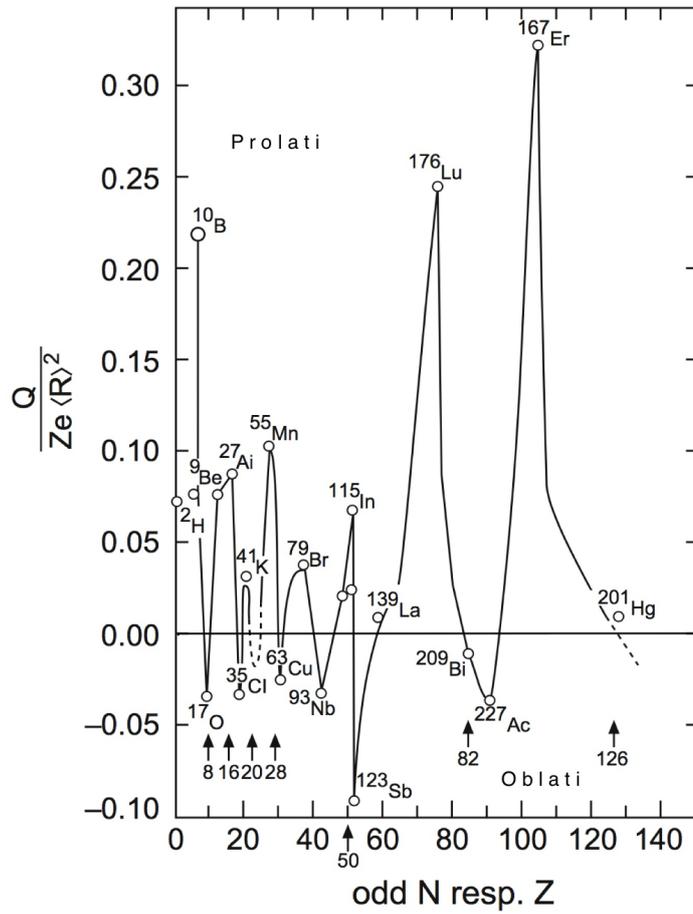


Figura 2.19: Q_{rid} di nuclei con A dispari in funzione di N . Il tratto continuo interpola i dati misurati, di cui è mostrato solo un sottoinsieme. I nuclidi con $Q_{rid} < 0$ assumono forme oblate, quelli con $Q_{rid} > 0$ forme prolate.

Dei momenti magnetici dei nuclei si tratterà ulteriormente parlando anche del "modello a shell".

2.3.11 Isospin

Gli esperimenti di diffusione su nuclei a bassa energia hanno messo in evidenza la stretta somiglianza tra le forze *neutrone – protone* e quelle *protone – protone*, così come anche l'analisi delle proprietà dei nuclei speculari, quali ${}^3\text{H}$ ed ${}^3\text{He}$, ${}^7\text{Li}$ e ${}^7\text{Be}$, ...

Le forze coulombiane sono diverse nei nuclei speculari, ma a parte questo i livelli energetici di nuclei speculari mostrano una considerevole somiglianza, come si osserva nelle figure [2.20](#) e [2.21](#).

I nuclei speculari con $N = Z \pm 1$ hanno oltretutto masse molto simili,

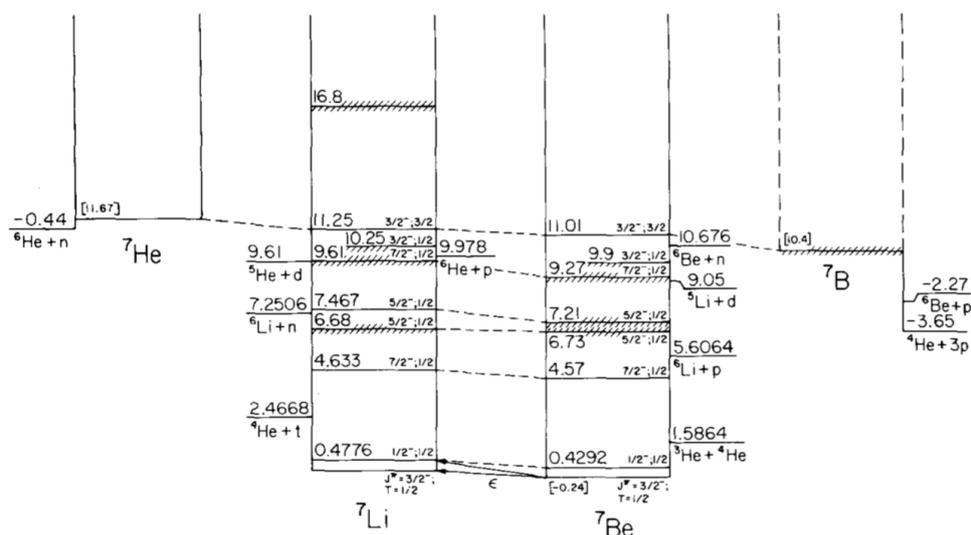


Figura 2.20: Livelli energetici dei nuclei speculari ${}^7\text{He}$, ${}^7\text{B}$, e ${}^7\text{Li}$, ${}^7\text{Be}$.

a meno del contributo dovuto alle diverse energie elettrostatiche; la loro differenza in massa, a meno del termine c^2 , è infatti espressa da

$$\Delta M = \frac{3}{5} \frac{(2Z + 1)}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{R_0 A^{1/3}} \quad (2.74)$$

come si deduce dal termine coulombiano della formula semi-empirica di Weizsäcker [2.50](#).

Per la precisione, la somiglianza fra i livelli dei nuclei speculari del tipo $N = Z \pm 1$ suggerisce soltanto che vi sia "simmetria di carica", ovvero sostanziale equivalenza tra le forze $n - n$ e quelle $p - p$. L'equivalenza più completa appare evidente analizzando anche nuclei con A pari quali ${}^6\text{He}$, ${}^6\text{Li}$, ${}^6\text{Be}$, ${}^8\text{Li}$, ${}^8\text{Be}$, ${}^8\text{B}$, o ${}^{14}\text{C}$, ${}^{14}\text{N}$ e ${}^{14}\text{O}$, di cui si vedono alcuni livelli nelle figure [2.22](#) e [2.23](#). Le differenze tra i livelli si spiegano pressochè totalmente in base agli effetti coulombiani. Questi risultati suggerirono a Heisenberg, Coudon e Cassen, nel 1932, che le forze nucleari debbano essere considerate

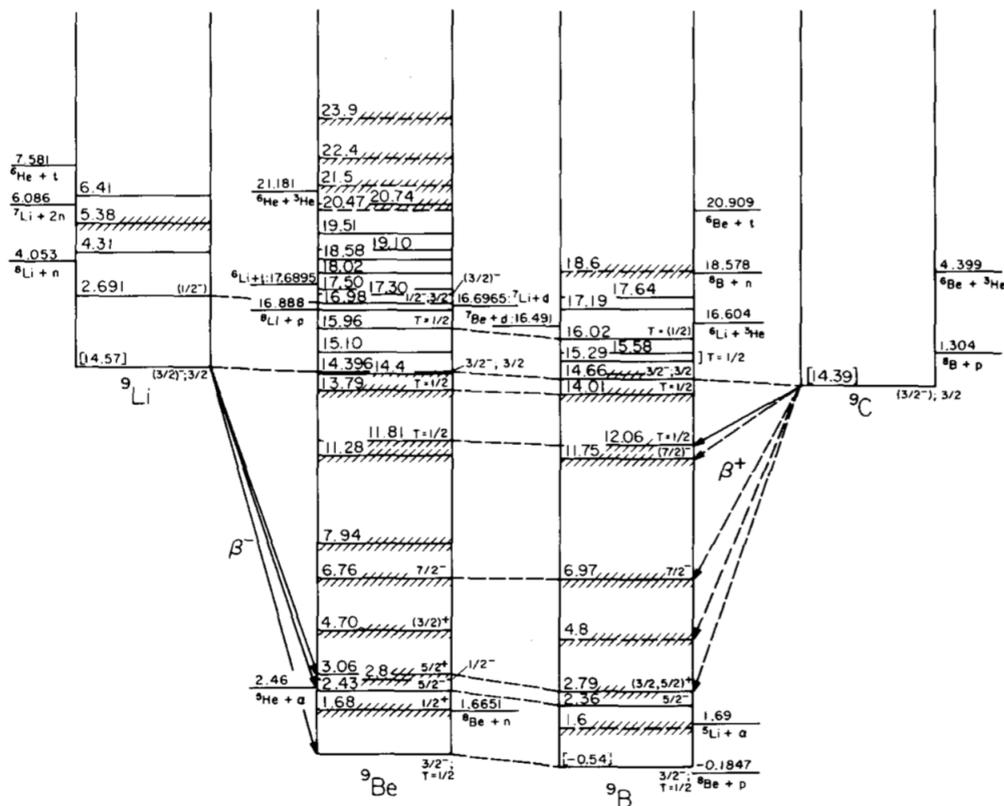


Figura 2.21: Livelli energetici dei nuclei speculari ${}^9\text{Li}$, ${}^9\text{C}$, e ${}^9\text{Be}$, ${}^9\text{B}$.

indipendenti dalla carica elettrica e che quindi, tolto l'effetto coulombiano, le interazioni fra $n-p$, $p-p$ e $n-n$, siano uguali (si trascura comunque, ad esempio, quanto dipende dalla leggera differenza in massa tra protone e neutrone). Questa ipotesi è più forte della pura simmetria di carica ma non dice nulla circa le forze $n-p$.

Per sfruttare le conseguenze di quest'ipotesi si è introdotto il formalismo del cosiddetto *spin isotopico* che permette di assegnare a ogni nucleone un ulteriore grado di libertà cui corrisponde una variabile detta *isospin* I o appunto *spin isotopico*, che può assumere soltanto due valori, ed è dunque dicotomica, dovendosi limitare a differenziare tra protone e neutrone. Disponendo già di un modello di variabili dicotomiche per lo spin ordinario dei fermioni, se ne mutua in questo caso la struttura algebrica.

Partendo da un esempio specifico di nuclei speculari si presentano ora alcune caratteristiche della simmetria di isospin per i nuclei.

In figura 2.23 sono riportati i diagrammi dei livelli energetici di ${}^{14}_6\text{C}_8$ e ${}^{14}_8\text{O}_6$, assieme a quelli di ${}^{14}_7\text{N}_7$.

Sono evidenti le somiglianze fra i livelli di ${}^{14}_6\text{C}_8$ e ${}^{14}_8\text{O}_6$, sia per i numeri quantici J^P che nelle spaziature relative dei rispettivi livelli. Le piccole dif-

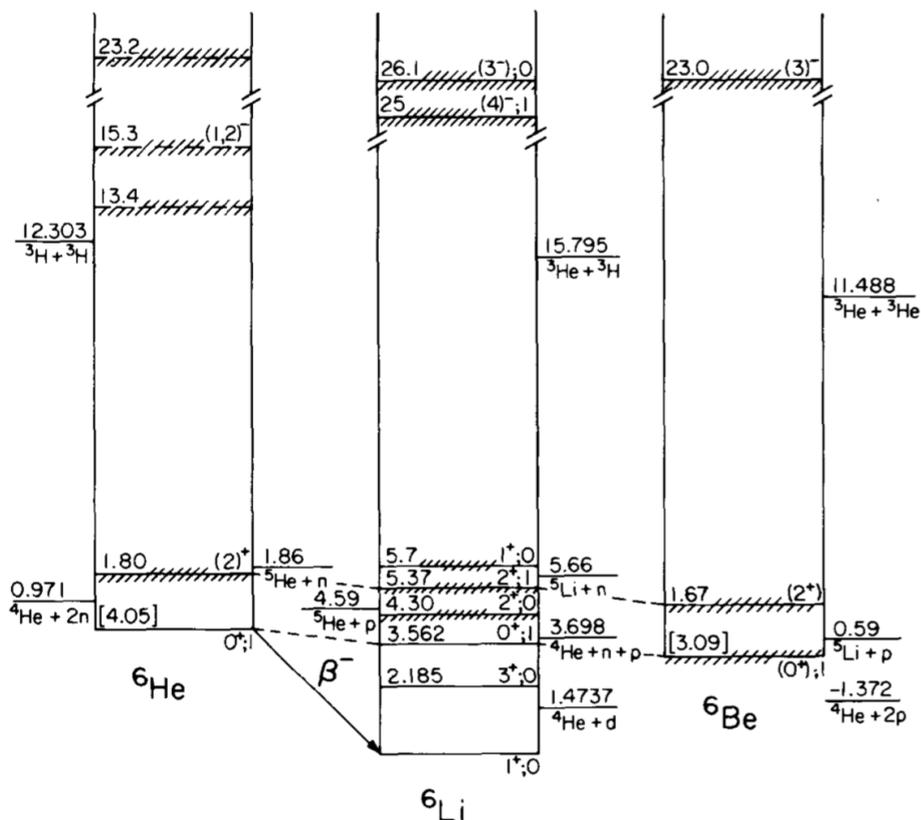


Figura 2.22: Livelli energetici dei nuclei ${}^6\text{He}$, ${}^6\text{Li}$, ${}^6\text{Be}$.

ferenze residue e la traslazione globale quasi rigida dei livelli di ${}^{14}_8\text{O}_6$ a valori superiori rispetto a quelli di ${}^{14}_6\text{C}_8$, sono spiegabili con i diversi contributi coulombiani all'energia per i due nuclei.

Livelli energetici equivalenti a quelli di ${}^{14}_6\text{C}_8$ e ${}^{14}_8\text{O}_6$ sono presenti anche nell'isobaro ${}^{14}_7\text{N}_7$, che possiede però anche altri livelli che non trovano corrispondenza con quelli dei due nuclei adiacenti. Si può distinguere fra stati di *tripletto* e stati di *singoletto*.

Questi *multipletti* di stati mostrano una chiara analogia formale con i multipletti degli accoppiamenti di spin. Protoni e neutroni possono quindi, come suggerito da Heisenberg nel 1932, essere visti come due diversi stati di una medesima entità, il *nucleone*, e formano un doppietto di isospin ($I = 1/2$), per le cui terze componenti si pone

$$\begin{cases} \text{protone:} & I_3 = +1/2 \\ \text{neutrone:} & I_3 = -1/2 \end{cases} \quad (2.75)$$

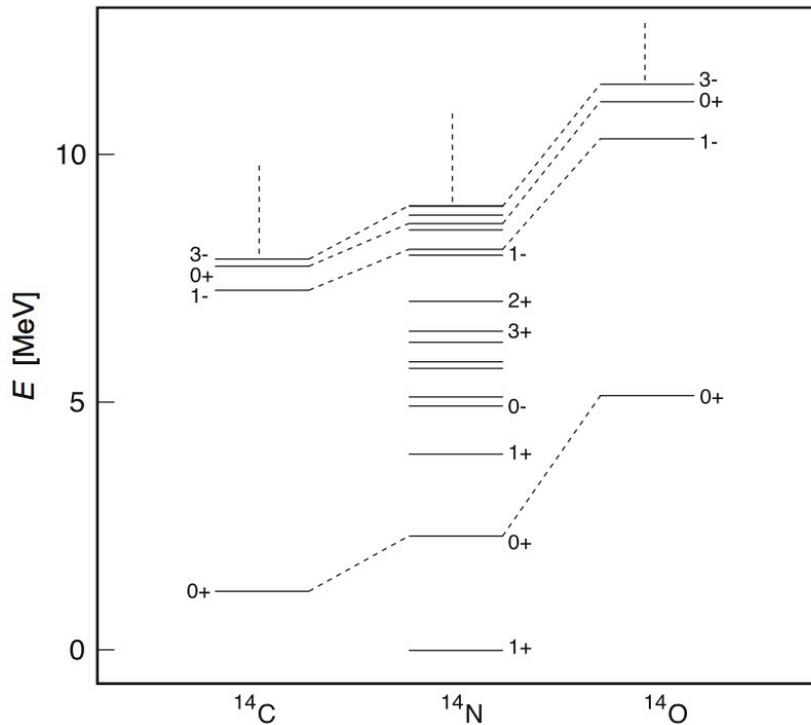


Figura 2.23: Livelli energetici dei nuclei speculari $^{14}_6\text{C}_8$ e $^{14}_8\text{O}_6$.

Essi sono quindi autostati degli operatori I^2 e I_3

$$|p\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |n\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.76)$$

La sostanziale indipendenza dell'interazione nucleare dalla carica elettrica si traduce così in una legge di conservazione, ovvero una proprietà di simmetria per cui

- l'isospin si conserva nelle interazioni nucleari;
- l'hamiltoniana d'interazione nucleare commuta con l'operatore di isospin ed è invariante per le trasformazioni generate da \vec{I} , cioè le rotazioni nello spazio dell'isospin.

La carica elettrica q_N di un nucleone è legata alla sua terza componente dell'isospin dalla relazione

$$q_N = 1/2 + I_3 \quad (2.77)$$

per cui la conservazione della carica elettrica comporta la conservazione della terza componente I_3 dell'isospin.

La conservazione dell'isospin \vec{I} , ovvero l'indipendenza dalla carica elettrica, ha un valore più forte della semplice conservazione della carica elettrica.

Si ricordi comunque che l'isospin è un numero quantico *adimensionale*. La trattazione formale dell'isospin corrisponde così a quella del momento angolare per cui si può ad esempio avere il caso di una coppia protone-neutrone in uno stato di isospin totale pari ad 1 o a 0. La terza componente dell'isospin è additiva e per un nucleo si ha

$$I_3^{nucleo} = \sum I_3^{nucleoni} = \frac{Z - N}{2} \quad (2.78)$$

Questo aiuta nel descrivere gli stati simili che compaiono in figura 2.23 assegnando rispettivamente $I_3 = -1$, al nucleo ${}^{14}_6\text{C}_8$, e $I_3 = +1$, al nucleo ${}^{14}_8\text{O}_6$; il loro isospin non può quindi essere minore di $I = 1$, per cui gli stati in questi nuclei appartengono necessariamente a un tripletto di stati simili nei nuclei ${}^{14}_6\text{C}_8$, ${}^{14}_7\text{N}_7$ e ${}^{14}_8\text{O}_6$. Siccome però la terza componente I_3 dell'isospin di ${}^{14}_7\text{N}_7$ è pari a 0, ne deriva che questo nucleo può possedere stati addizionali con isospin $I = 0$.

L'azoto ${}^{14}_7\text{N}_7$ è il più stabile isobaro con $A = 14$ e quindi il suo stato fondamentale è necessariamente un singoletto di isospin, perchè se non fosse così ${}^{14}_6\text{C}_8$ dovrebbe possedere uno stato analogo che però, per la minor repulsione coulombiana, dovrebbe essere a un'energia inferiore e quindi più stabile.

In figura 2.23 non sono mostrati stati con $I = 2$, che dovrebbero in linea di principio avere stati analoghi in ${}^{14}_5\text{B}_9$ e ${}^{14}_9\text{F}_5$. Questi nuclei sono però molto instabili e i loro livelli stanno oltre il limite energetico mostrato in figura 2.23.

Gli isobari di $A = 14$ sono nuclei in cui l'effetto dell'energia coulombiana non è particolarmente intenso. L'influenza dell'energia coulombiana cresce al crescere del numero atomico Z , perturbando sempre più le caratteristiche di simmetria di isospin.

L'isospin riveste un ruolo importante anche nella descrizione del comportamento delle particelle e delle strutture sub-nucleari, i quark che come si vedrà possono essere classificati in multipletti di isospin¹⁹.

L'isospin è inoltre un buon numero quantico per la descrizione dei processi dinamici coinvolgenti le interazioni forti, nel corso dei quali appunto, l'isospin del sistema si conserva.

2.3.12 Ricapitolando

Il concetto importante che emerge come risultato delle evidenze sperimentali sinora illustrate sui nuclei atomici e la loro struttura, è il fatto che essi costituiscono sistemi legati di nucleoni, carichi e neutri, gli uni di massa pressochè uguale a quella degli altri, che essendo fermioni ubbidiscono al

¹⁹Si vedano i capp. ?? e ??.

principio di esclusione e interagiscono con una forza che presenta caratteristiche di brevissimo range manifestando saturazione.

Inoltre le regolarità individuate, come ad esempio quelle associabili all'emergere in diverse situazioni dei cosiddetti "numeri magici", fanno pensare che tali nucleoni siano organizzati nei vari nuclei su livelli energetici secondo uno schema in parte mutuabile da quello che spiega la struttura atomica, con la differenza che mentre nell'atomo il potenziale che determina la struttura dei livelli è quello dovuto alla carica elettrica dei protoni concentrata nel nucleo, nel caso del nucleo il potenziale è quello determinato dall'insieme degli stessi nucleoni del nucleo che si muovono dunque in esso soggetti al potenziale che essi stessi determinano.

Capitolo 3

Struttura dei nuclei e modelli nucleari

Benchè si ritenga che il modello standard deva poter descrivere completamente sia la struttura dei nuclei che la fenomenologia ad essi associata, è molto più difficile e arduo formulare con esso predizioni quantitative che non per il resto delle aree coperte dalla fisica delle particelle.

Ciò sostanzialmente per due ragioni:

- in linea di principio la fisica in un nucleo può essere derivata interamente dalla QCD, anche se gli attuali approcci matematici e computazionali per risolverla su sistemi a bassa energia, come i nuclei, sono estremamente limitati. Ciò è dovuto alla transizione di fase che ha luogo fra materia costituita da quark ad alta energia e materia adronica a più bassa energia, che rende inutilizzabili gli approcci perturbativi, complicando molto la costruzione di un modello delle forze inter-nucleoniche basato sulla QCD.

- nonostante la forza nucleare risulti ben contenuta(?) [a corto raggio ?], serve una quantità enorme di potenza di calcolo per riprodurre con accuratezza le caratteristiche di un nucleo con un approccio "ab initio". Importanti sviluppi sulla teoria dei molti corpi hanno reso possibile attuare ciò per sistemi nucleari stabili e di massa ridotta, ma non per quanto concerne nuclei più pesanti o eccitati.

I modelli con cui storicamente si sono confrontati i risultati sperimentali sono relativamente grezzi e necessariamente approssimati. Nessuno di essi riesce a spiegare completamente, o comunque con ugual precisione, l'ampia panoramica di fenomeni che caratterizzano i nuclei e la loro struttura.

Si considera il raggio nucleare una quantità basilare che ogni modello deve essere in grado di predire, nell'ipotesi di nucleo non eccitato e sferiforme.

Tratteremo qui brevemente due modelli, quello a gas di Fermi e quello a "shell", che hanno il pregio di spiegare, assieme al modello a goccia di liquido alla base della formula semiempirica di Weizsäcker, molti risultati sperimentali.

3.1 Modello a gas di Fermi

Un nucleo che si trovi nel proprio stato fondamentale o sia leggermente eccitato può essere visto come un esempio di gas di Fermi degenerare. La densità di materia nel nucleo è determinata dalle interazioni fra nucleoni che sono essenzialmente caratterizzate, sulla scala del fm, da una forte repulsione a brevi distanze e da una relativamente blanda attrazione fra nucleoni non troppo vicini. I nucleoni di un nucleo non vanno pensati come localizzati in posizioni più o meno definite all'interno del nucleo, ma piuttosto come due sistemi indipendenti di particelle di spin 1/2 che ubbidiscono alla statistica di Fermi-Dirac e che nel rispetto del principio d'esclusione di Pauli, si muovono per il resto liberamente nell'intero volume del nucleo con un impulso medio corrispondente associato che si vedrà essere dell'ordine di 250 MeV/c. Questa mobilità dei nucleoni nel nucleo è conseguenza della relativa "debolezza" dei legami fra i nucleoni di uno stesso nucleo ^[1]

Il fatto concettualmente importantissimo che i nucleoni di uno stesso nucleo si muovano come se fossero quasi liberi al suo interno non è però immediatamente ovvio, e risulterà più chiaro in seguito quando si parlerà dei cosiddetti *ipernuclei*, ovvero quei nuclei che fra i loro componenti annoverano un *iperone* in sostituzione di un nucleone. Si vedrà che un iperone Λ si muove entro un ipernucleo come una particella sostanzialmente "libera", soggetta a una buca di potenziale la cui profondità è praticamente indipendente dal particolare nucleo considerato, e di ampiezza pari al raggio del nucleo stesso.

Il modello a gas di Fermi per i nuclei è in grado di giustificare i valori delle energie di legame fra nucleoni, i termini principali della formula semi-empirica di massa di Weizsäcker ^[12.1.2] e come vedremo in seguito anche le distribuzioni in impulso trovate per le interazioni quasi elastiche fra elettroni e nuclei.

Il potenziale percepito da ogni nucleone è la sovrapposizione dei potenziali dovuti a tutti i restanti nucleoni del nucleo. Nel seguito si supporrà che tale potenziale abbia la forma di una buca rettangolare che per i protoni tenga anche conto del contributo coulombiano, come schematizzato in figura ^[3.1]. Il numero di stati disponibili per un nucleone nel volume V e nell'intervallo d'impulso dp è quindi dato da

$$dn = \frac{4\pi p^2 dp}{(2\pi\hbar)^3} V \quad (3.1)$$

dove $(2\pi\hbar)^3$ è il volume di una cella dello spazio delle fasi contenente due nucleoni di ogni tipo con spin antiparalleli.

Nello stato fondamentale, caratterizzato da temperatura pari a zero, i livelli a più basse energie saranno tutti occupati fino ad un certo valore massimo

¹Si può ad esempio vedere quanto si ottiene per l'intensità dell'interazione fra il protone e il neutrone che costituiscono uno stesso nucleo di deuterio

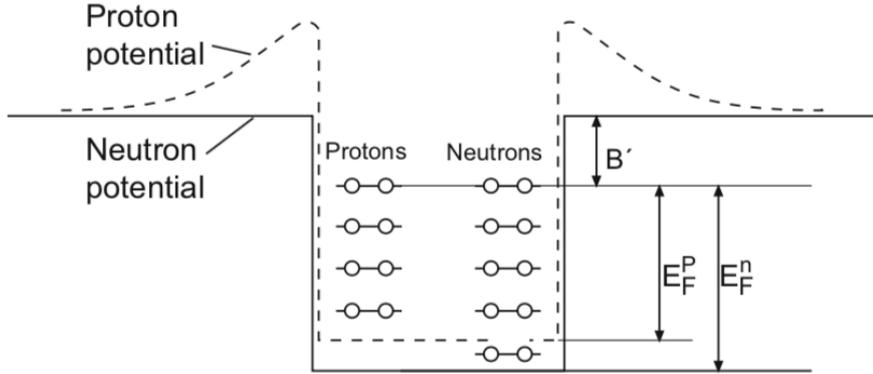


Figura 3.1: Forma schematica dei potenziali per neutroni e protoni in un nucleo, nell'ambito del modello a gas di Fermi.

di impulso indicato con p_F e detto *impulso di Fermi*. Il numero di questi livelli è ottenibile integrando la [3.1](#)

$$n = \frac{V p_F^3}{6\pi^2 \hbar^3} \quad (3.2)$$

e poichè ogni livello può ospitare al massimo due fermioni dello stesso tipo, si hanno rispettivamente

$$N = \frac{V (p_F^n)^3}{3\pi^2 \hbar^3} \quad \text{e} \quad Z = \frac{V (p_F^p)^3}{3\pi^2 \hbar^3} \quad (3.3)$$

neutroni e protoni.

Se si esprime il volume del nucleo come quello di una sfera, $V = 4\pi R^3/3 = 4\pi R_0^3 A/3$, con $R_0 = 1.21$ fm ottenuto da esperimenti di diffusione di elettroni e si ipotizza che la buca di potenziale per i protoni e quella per i neutroni abbiano la stessa estensione radiale, si trova, per un nucleo con $Z = N = A/2$, un impulso di Fermi pari a

$$p_F = p_F^n = p_F^p = \frac{\hbar}{R_0} \left(\frac{9\pi}{8} \right)^{1/3} \simeq 250 \text{ MeV}/c \quad (3.4)$$

Per i nuclei più leggeri p_F tende ad assumere valori inferiori e in tali casi il modello a gas di Fermi non rappresenta una buona descrizione del nucleo. L'energia del livello occupato più alto, corrispondente all'energia di Fermi E_F , vale

$$E_F = \frac{p_F^2}{2M} \simeq 33 \text{ MeV} \quad (3.5)$$

con M la massa del nucleone. Detta B' la differenza fra il massimo valore della buca e il livello di Fermi, si trova che è costante per la gran parte dei

nuclei e corrisponde all'energia media di legame per nucleone $B/A = 7 \div 8$ MeV.

La profondità della buca di potenziale e l'energia di Fermi sono in larga misura indipendenti dal numero di massa A

$$V_0 = E_F + B' \simeq 40 \text{ MeV} \quad (3.6)$$

Per un nucleo come il $^{208}_{82}\text{Pb}_{126}$ ad esempio, con $B/A \simeq 7.67$ MeV, il fondo della buca dei neutroni giace 44 MeV al di sotto del livello di energia nulla e quello della buca dei protoni a 34 MeV.

Questo modello è analogo a quello dell'elettrone libero in un metallo ed equivalentemente fornisce utili risultati nei problemi in cui si richiede la distribuzione delle quantità di moto, piuttosto che le energie o la distribuzione spaziale dei nucleoni. Similmente se ne deduce che l'energia cinetica media del gas di nucleoni nella "materia nucleare" è confrontabile con la profondità della buca di potenziale, ulteriore evidenza del fatto che un nucleo è una struttura non troppo fortemente legata.

I nuclei contengono tanti più neutroni, rispetto ai protoni, al crescere del numero di massa A . Il fatto che i livelli di Fermi di protoni e neutroni di uno stesso nucleo stabile devano coincidere², implica che la profondità della buca di potenziale sentito dal gas di neutroni debba essere maggiore di quella del potenziale sentito dal gas di protoni, come in figura 3.1. In media i protoni appaiono quindi meno legati dei neutroni per la loro mutua repulsione coulombiana che introduce nel potenziale un termine aggiuntivo del tipo

$$V_C = (Z - 1) \frac{\alpha \hbar c}{R} \quad (3.7)$$

Si calcoli ora, nell'ambito del modello a gas di Fermi, la dipendenza dell'energia di legame dall'eccesso di neutroni presenti in un nucleo. L'energia cinetica media per nucleone è (si adotta un approccio classico, date le energie in gioco)

$$\langle E_k \rangle = \frac{\int_0^{p_F} E_k p^2 dp}{\int_0^{p_F} p^2 dp} = \frac{3}{5} \frac{p_F^2}{2M} \simeq 20 \text{ MeV} \quad (3.8)$$

Il contributo cinetico totale di energia del nucleo è dunque

$$E_k(N, Z) = N \langle E_n \rangle + Z \langle E_p \rangle = \frac{3}{10M} \left[N (p_F^n)^2 + Z (p_F^p)^2 \right] \quad (3.9)$$

che tenendo conto delle 3.3 e supposto il nucleo di forma sferica, con raggio della buca di potenziale uguale per neutroni e protoni, diventa

$$E_k(N, Z) = \frac{3}{10M} \frac{\hbar^2}{R_0^2} \left(\frac{9\pi}{4} \right)^{2/3} \frac{N^{5/3} + Z^{5/3}}{A^{5/3}} \quad (3.10)$$

²In caso contrario il nucleo potrebbe ricondursi ad una condizione energeticamente più favorevole attraverso un decadimento β , contraddicendo però così l'ipotesi che il nucleo originalmente considerato fosse "stabile".

Si vede che questa energia cinetica media presenta, per A fissato e al variare di N o equivalentemente Z , un minimo quando $Z = N$, e da ciò consegue che l'energia di legame si riduce per $N \neq Z$. Sviluppando la [3.8](#) in serie di potenze di $(N - Z)$ si ha

$$E_k(N, Z) = \frac{3}{10M} \frac{\hbar^2}{R_0^2} \left(\frac{9\pi}{8} \right)^{2/3} \left[A + \frac{5(N - Z)^2}{9A} + \dots \right] \quad (3.11)$$

che contiene una dipendenza funzionale dall'eccesso neutronico. Il primo termine contribuisce al termine dell'energia di volume nella formula semi-empirica di Weizsäcker [12.1.2](#), mentre il secondo descrive la correzione dovuta alla asimmetria $N \neq Z$. Per riprodurre con ragionevole accuratezza quest'ultimo bisogna tener conto del cambiamento del potenziale per $N \neq Z$ e della variazione nell'energia cinetica.

È un notevole risultato che dal semplice modello a gas di Fermi con nucleoni che si muovono in un potenziale medio senza interagire, più o meno agli antipodi di quello a goccia di liquido su cui si basa la formula di Weizsäcker, si possano dedurre due termini cruciali di tale formula come quello di volume e quello di asimmetria neutroni-protoni.

Questo modello mette in evidenza l'importanza dell'energia di zero nella materia nucleare e i valori particolarmente elevati delle velocità dei nucleoni nei nuclei, come confermato dai risultati sperimentali. La soglia di produzione di mesoni per urto di protoni è ad esempio più bassa nei nuclei più pesanti che nell'idrogeno, poichè nel sistema del laboratorio alcuni nucleoni del nucleo bersaglio sono dotati di velocità v tutt'altro che trascurabili, con $v/c \simeq 1/4$.

Il modello a gas di Fermi suggerisce inoltre che nell'urto di un nucleone contro un nucleo non siano probabili trasferimenti di piccole quantità di moto al nucleo, in quanto gli stati nucleonici con quantità di moto piccole sono tutti già occupati e quindi o si ha un trasferimento rilevante oppure l'urto non ha luogo, come confermato dai risultati dello studio sperimentale delle reazioni nucleari.

3.2 Modello a shell (gusci)

Pensare i nucleoni densamente impacchettati in un nucleo e al tempo stesso come se percorressero orbite giacenti su *gusci*, non sembra di primo acchito ragionevole e plausibile come lo è invece nel caso degli elettroni di un atomo. È facile immaginare che un elettrone atomico possa compiere indisturbato molte orbite senza urtare alcunchè, mentre ci si potrebbe aspettare che i protoni e i neutroni di un nucleo siano in una condizione di collisioni continue l'uno contro l'altro. Modelli nucleari del tipo a gas densi con molteplici

collisioni al loro interno non sono però in grado di riprodurre i dati sperimentali, e vi sono poi fatti rilevanti, come quello suggerito dallo schema dei numeri magici associati a configurazioni nucleari particolarmente stabili, che sembrano suffragare una struttura a gusci.

Com'è possibile che i nucleoni di un nucleo, sottoposti all'intensa forza che li lega e con una così alta densità di loro simili nel volume del nucleo ($\rho_0 \simeq 0.17$ nucleoni \times fm $^{-3}$), possano completare intere orbite senza *urtarsi*? Ciò ha luogo come conseguenza del *principio di esclusione di Pauli*, in base al quale due fermioni non possono mai condividere contemporaneamente lo stesso stato quantico. Se non ci sono nelle vicinanze stati quantici vuoti che possano essere raggiunti grazie all'energia messa in gioco in un'interazione, allora quell'interazione non avrà luogo. È un'idea essenzialmente legata alla natura quantistica delle strutture coinvolte, se non c'è uno stato libero in cui un nucleone possa essere mandato da un urto, allora quell'urto non avverrà e non esiste di ciò un analogo classico.

L'evidenza di una sorta di struttura a gusci con un numero limitato di stati energetici permessi suggerisce che ogni nucleone in un nucleo si muova soggetto a una specie di buca di potenziale efficace creato dai restanti nucleoni di quel nucleo. Ciò conduce a una quantizzazione degli stati similmente a quanto si ha con un oscillatore armonico in un potenziale a buca quadrata. Poiché i dettagli della forma della buca determinano l'effettiva struttura dei livelli energetici, si è cercato di costruire buche di potenziale che permettano di riprodurre i livelli energetici nucleari osservati sperimentalmente.

I livelli di energia trovati con tali potenziali sono del tipo riportato in figura [3.2](#). L'etichettatura di questi livelli potrebbe ricordare quella dei livelli atomici, ma vi sono sostanziali differenze legate alle diverse caratteristiche del potenziale in gioco.

Le energie dei livelli crescono col crescere del numero quantico ℓ del momento angolare orbitale e per i valori $\ell = 0, 1, 2, 3 \dots$, come nel caso atomico si utilizzano i simboli $s, p, d, f \dots$

Non c'è però un reale analogo fisico del numero quantico principale n , per cui i numeri associati ai livelli iniziano semplicemente con $n = 1$ per il livello più basso associato ad un assegnato numero quantico orbitale, senza che vi sia una diretta corrispondenza con lo schema utilizzato nel caso atomico. Il numero quantico per il momento angolare orbitale non è qui limitato dal valore di n come nel caso atomico.

Oltre alla dipendenza dai dettagli della forma della buca di potenziale e dal numero quantico orbitale, è presente anche un ragguardevole contributo di interazione di spin-orbita che scinde i livelli separandoli di entità energetiche crescenti al crescere del numero quantico orbitale. Ciò porta ad una mescolanza fra i livelli di diversi numeri quantici orbitali ℓ come mostrato in figura.

Il pedice indica il valore del momento angolare totale J , e la molteplicità degli stati è pari a $2J + 1$.

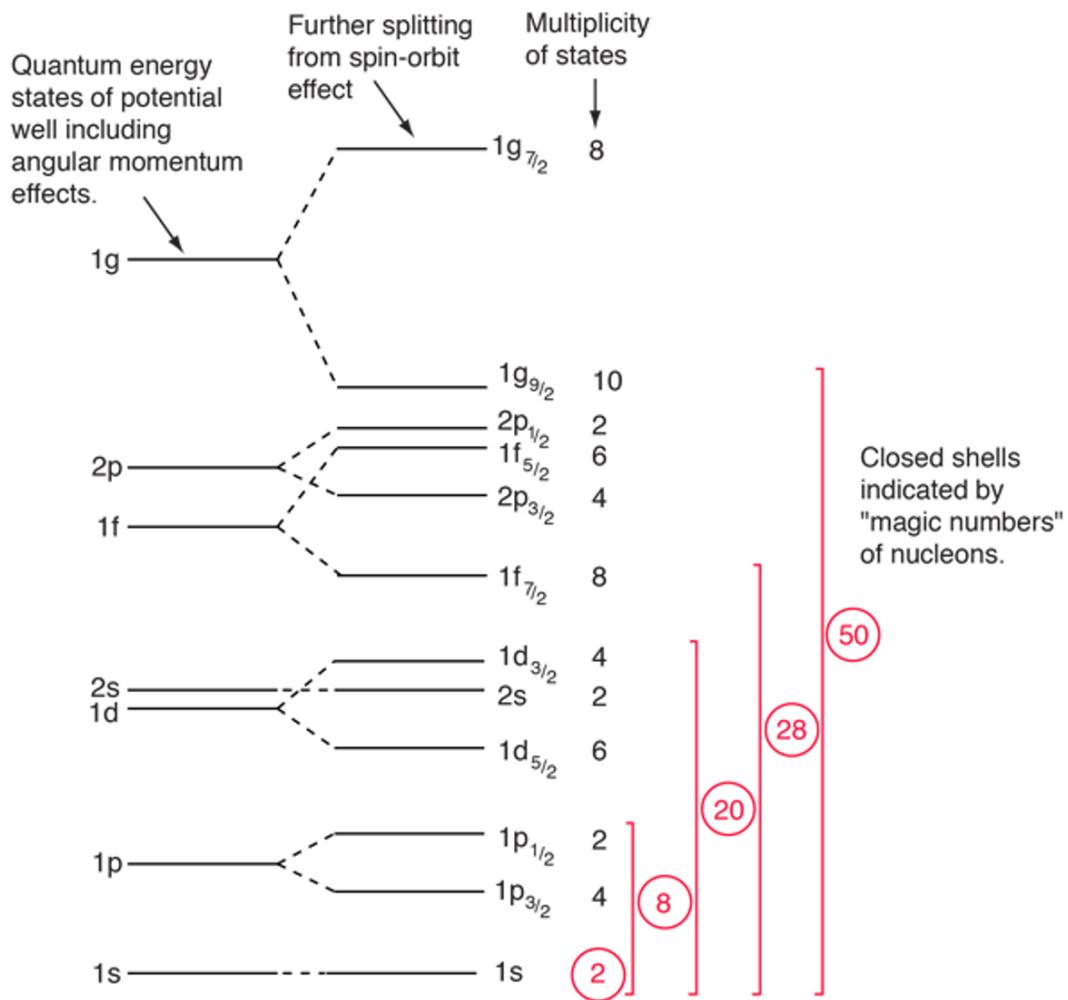


Figura 3.2: Shell levels.

Il contributo dei protoni all'energia di un livello è diversa da quella dei neutroni, per la mutua repulsione coulombiana dei primi, ma questo costituisce tutto sommato una perturbazione minore all'aspetto di una serie di livelli energetici nucleari.

Avendo definito questa struttura di stati nucleari e in base ai valori dei numeri magici, si può predire lo spin di un nucleo con A dispari rappresentando il suo stato come sostanzialmente dovuto al nucleone spaiato nella sequenza degli stati mostrati in figura 3.2. Si tratta del cosiddetto modello a shell a particella singola che permette di predire anche la parità dello stato.

3.2.1 Numeri Magici e struttura a shell

Come detto si trova che nuclei con numeri pari di protoni e neutroni sono più stabili rispetto a quelli con numeri dispari di protoni e neutroni. In particolare c'è una sequenza di numeri cosiddetti *magici* di neutroni e protoni tale che i nuclidi che ne sono rappresentati sono particolarmente favoriti in termini di stabilità, ovvero presentano energie di legame maggiori rispetto ai nuclidi vicini:

$$2, 8, 20, 28, 50, 82, 128 \quad (\text{numeri magici}) \quad (3.12)$$

I nuclei con entrambi i numeri di protoni e neutroni coincidenti con un valore *magico* sono detti *doppiamente magici* e risultano più stabili degli altri.

Il ${}^{40}_{20}\text{Ca}_{20}$ ed il ${}^{48}_{20}\text{Ca}_{28}$ sono due esempi di nuclei eccezionalmente stabili e doppiamente magici. In figura 3.3 sono riportate le energie di legame di isotopi del calcio a confronto con i valori calcolati per essi tramite la formula di Weizsäcker.

Assieme ai numeri magici altre evidenze sperimentali suggeriscono una struttura a configurazioni di shell chiuse per i nuclei, similmente a quanto si ha

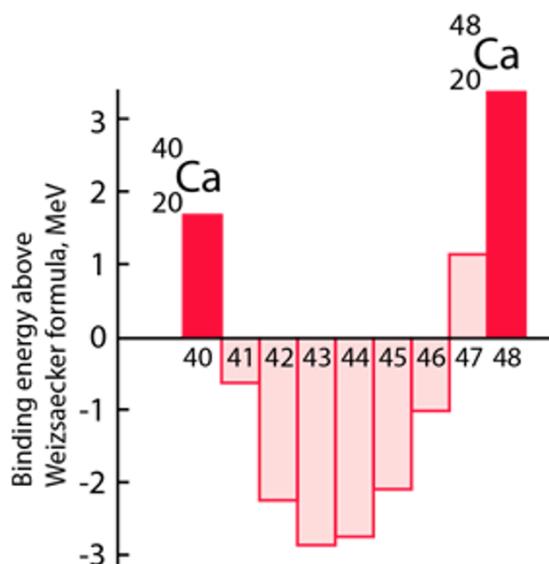


Figura 3.3: Energie di legame di isotopi del calcio.

per la struttura atomica. Fra queste:

- maggiore abbondanza di quegli elementi per i quali Z o N sono magici;
- gli elementi stabili al termine di ogni sequenza radioattiva naturale hanno tutti numeri magici di neutroni o protoni;
- le probabilità di assorbire neutroni (sezioni d'urto di assorbimento neutronico) per isotopi con N magico sono più basse che per gli isotopi contigui;

- l'energia di legame dell'ultimo neutrone è massima per nuclei con N magico e decresce fortemente con l'aggiunta di un ulteriore neutrone;
- i momenti di quadrupolo elettrico sono circa nulli per i nuclei magici;
- l'energia d'eccitazione dallo stato nucleare fondamentale al primo stato eccitato è maggiore per nuclei con ipotetiche shell chiuse.

3.2.2 Potenziale nucleare nel modello a shell

Il modello nucleare a shell presuppone dunque che ogni nucleone di un nucleo si muova in un potenziale attrattivo efficace prodotto dai restanti nucleoni. Il potenziale dovrebbe dunque essere approssimativamente proporzionale alla densità di nucleoni nel nucleo e lo si può scrivere come

$$V = \frac{-V_0}{1 + e^{\frac{r-R}{a}}} \quad (3.13)$$

con il seguente possibile set di valori per i parametri

$$V_0 \approx 57 \text{ MeV} + \text{correzioni}$$

$$R \approx 1.25 \times A^{1/3} \text{ fm}$$

$$a \approx 0.65 \text{ fm}$$

Si noti che il valore del raggio R è leggermente maggiore di quello utilizzato per la formula del raggio nucleare in quanto tien conto anche del range della forza nucleare, che si estende un po' oltre il raggio del nucleo.

Per meglio riprodurre i dati si considerano due contributi aggiuntivi che ricordano in parte quanto detto in merito alla formula semiempirica di Weizsäcker.

Il primo, detto energia di simmetria, agisce per nuclei con $N \neq Z$ e lo si scrive empiricamente come

$$\Delta V_s = \pm 27 \text{ MeV} \left(\frac{N - Z}{A} \right) \quad (3.14)$$

Dove il segno $+$ vale se $N > Z$ e viceversa.

Un ulteriore termine tiene conto della repulsione elettrostatica fra i protoni, e lo si scrive

$$V(r) = \frac{Zke^2}{R_c} \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left[1 - \left(\frac{r}{R_c} \right)^2 \right] \right\}, \quad r \leq R_c \quad (3.15)$$

$$V(r) = \frac{Zke^2}{r}, \quad r > R_c \quad (3.16)$$

con R_c il raggio della distribuzione di carica protonica del nucleo.

I potenziali approssimati assumono, per i protoni e i neutroni, le forme generali mostrate a sinistra in figura [3.4](#)

Come detto un ulteriore termine correttivo considerato nel potenziale del

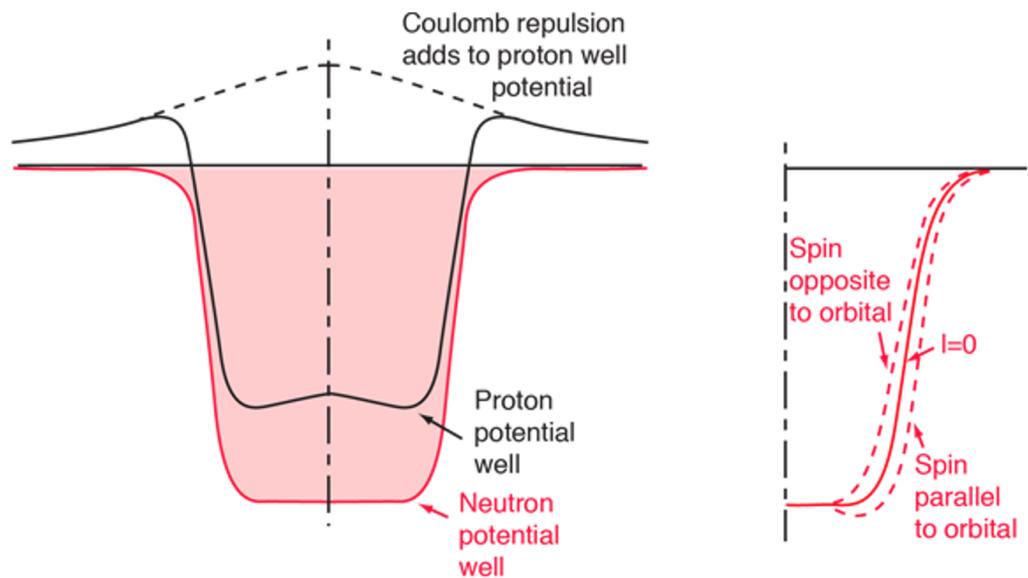


Figura 3.4: Potenziale del modello a shell.

modello a shell è quello relativo all'interazione di spin-orbita: il suo effetto sulla forma del potenziale nucleare è illustrato a destra in figura 3.4. Se lo spin è di verso opposto al momento angolare orbitale, la buca di potenziale efficace risulta più stretta conducendo a un'energia maggiore, e viceversa, similmente a quanto si ha per un potenziale rettangolare, come si osserva nelle separazioni fra i livelli energetici del modello a shell.

3.3 Panoramica dei modelli nucleari

Qui di seguito, in figura 3.5, uno schema che indica la gran parte dei modelli nucleari esistenti, con l'indicazione degli ambiti in cui sono utilmente usati. Il loro notevole numero testimonia del grande lavoro che ancora va fatto per poter ricondurre a una visione unitaria la comprensione e la calcolabilità delle varie fenomenologie legate ai nuclei.

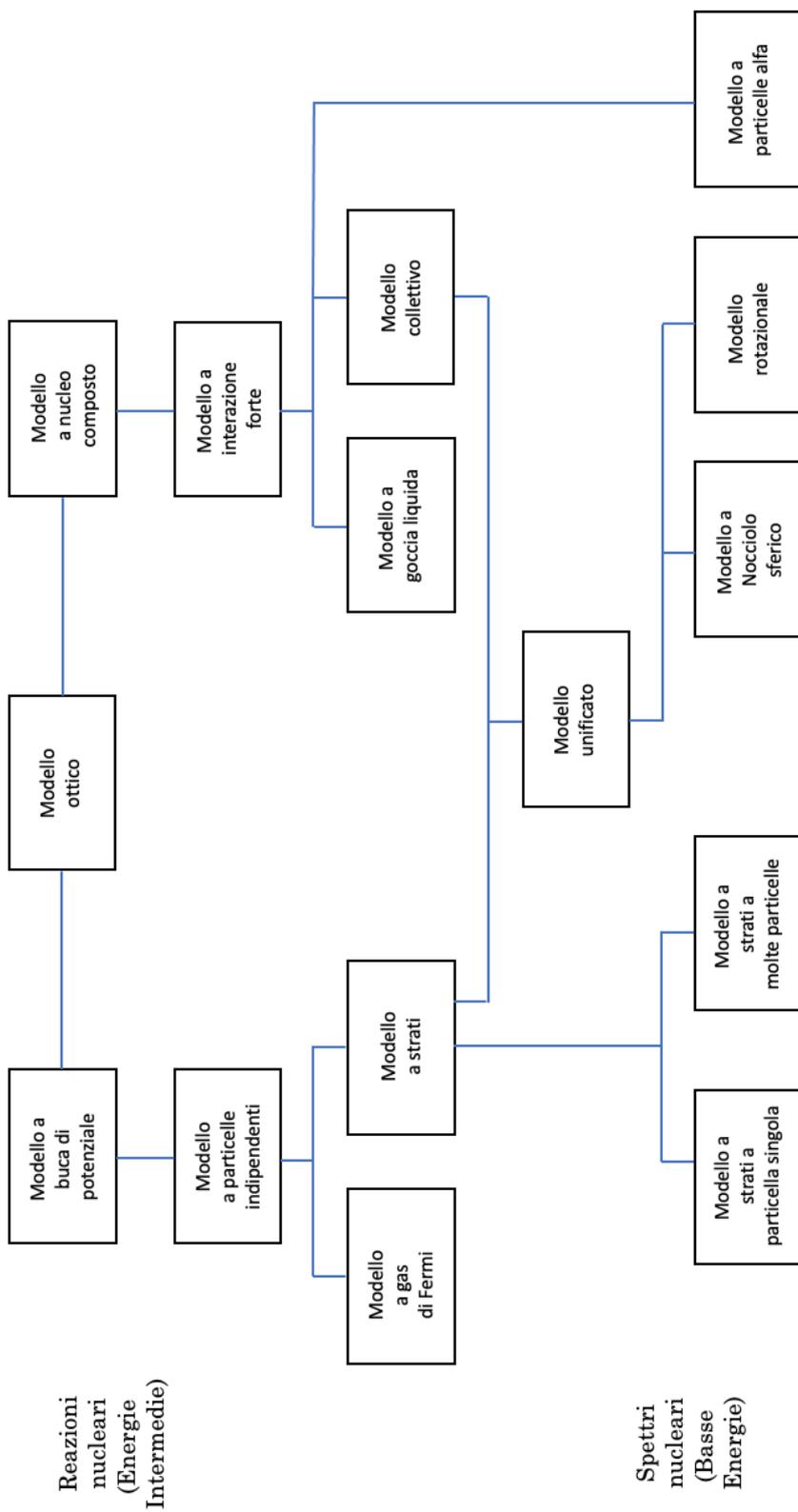


Figura 3.5: Modelli nucleari.

Capitolo 4

Instabilità dei nuclei

Le specie nucleari oggi note sono circa 3300 ^[1]; 254 sono i nuclidi naturali stabili, 85 quelli naturali instabili, i restanti sono radionuclidi prodotti artificialmente. Degli 85 nuclidi naturali instabili 32 sono ritenuti *primordiali*, mentre gli altri si sono formati attraverso reazioni e decadimenti nucleari spontanei nel corso dei miliardi di anni di vita dell'universo.

L'uranio ${}_{92}^{238}\text{U}$ è il nucleo con i valori maggiori di A e Z spontaneamente presente in natura. I nuclidi con $Z > 92$, detti *transuranici*, sono tutti prodotti artificialmente.

Tutti gli elementi transuranici e una parte di quelli *suburanici* sono naturalmente instabili rispetto all'emissione di nuclei di elio ${}^4_2\text{He}$ (radioattività α), rispetto all'emissione di elettroni e^- o positroni e^+ (radioattività β), e all'emissione di radiazione elettromagnetica (radioattività γ).

A questi tre tipi di decadimento si aggiunge la *fissione spontanea* dell'isotopo ${}_{92}^{238}\text{U}$, scoperta da K.Petrzhak e G.Flerov nel 1940, che consiste nella scissione del nucleo di uranio in due frammenti nucleari di massa confrontabile.

La radioattività naturale fu casualmente scoperta da H.Bequerel nel 1896 con l'osservazione di *raggi fortemente penetranti*, spontaneamente emessi dal minerale di uraninite picea (pechblenda), individuati per l'impressione da essi prodotta in lastre fotografiche, tramite l'eccitazione per fluorescenza di gas, oltre che per la ionizzazione dell'aria che provocavano ^[2].

Utilizzando come indicatore il potere ionizzante ^[3], si individuarono tre diversi tipi di radiazioni, fino ad allora sconosciute e molto diverse fra loro, che furono contraddistinte dalle lettere α , β e γ .

I nuclei stabili sono raccolti in una banda piuttosto stretta sul piano ($Z; N$) del grafico della tabella dei nuclidi, come mostrato in figura ^[4.1].

¹Paragrafo ^[2.2] Tabella dei nuclidi.

²Si vedano le prime tecniche di misura della radioattività con elettroscopi ed elettrometri, che hanno anche permesso l'individuazione dei raggi cosmici

³Il potere ionizzante di una radiazione è legato al numero di coppie elettrone-ione che tale radiazione produce interagendo con gli atomi del materiale che attraversa.

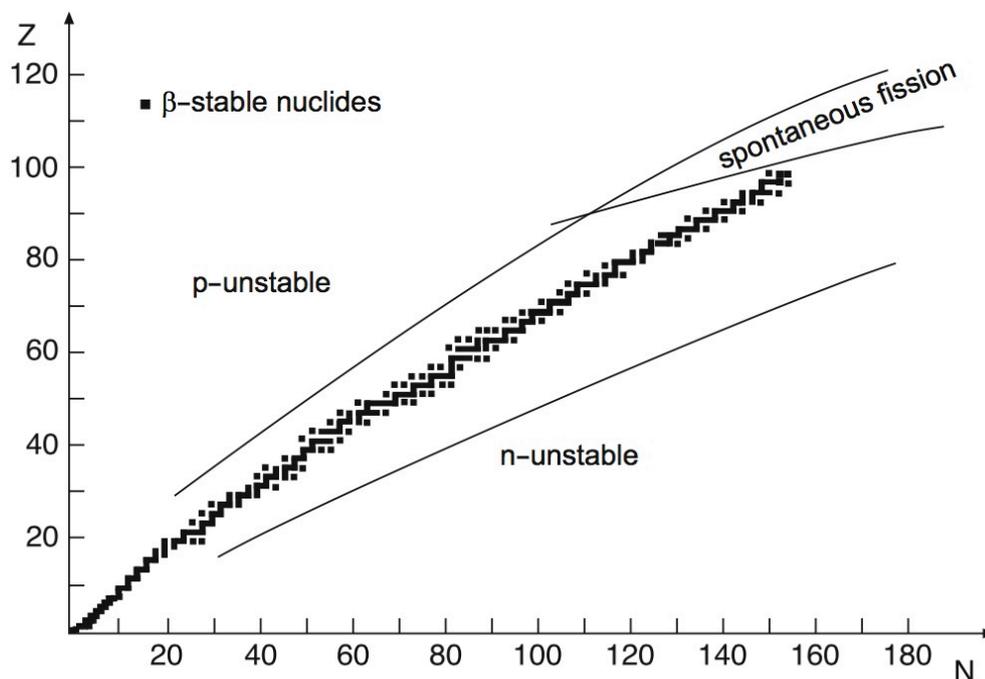


Figura 4.1: Carta dei nuclidi: i quadrati neri nel piano (Z, N) indicano i nuclei della "valle di stabilità".

Nel 1899, tre anni dopo la scoperta di Becquerel, si osservò che il rateo di decadimento di una sostanza radioattiva pura decresce, col passare del tempo, in accordo con un andamento esponenziale decrescente.

Ci vollero altri anni per assodare che la radioattività è un fenomeno che coinvolge ogni singolo atomo di una certa sostanza, e non il campione di sostanza radioattiva in quanto tale nella sua interezza.

Un'ulteriore paio d'anni furono quindi necessari per convincersi che il decadimento radioattivo di un atomo è un processo intrinsecamente statistico, e che sostanzialmente gli atomi di una sostanza, quand'anche radioattivi, "non invecchiano". È quindi impossibile predire quando uno specifico atomo deva decadere e ciò conduce naturalmente a una legge di tipo esponenziale decrescente col tempo.

Il decadimento radioattivo spontaneo è un fenomeno sostanzialmente indipendente dal tipo di emissione che produce. Nel caso di un decadimento in due corpi esso consiste nella disintegrazione spontanea del nucleo di un atomo, detto *genitore* che si trasforma in un più stabile nucleo *figlio*, più un residuo.

Se anche il nucleo figlio ed eventualmente il residuo sono radioattivi il processo continua con decadimenti a catena fino all'ottenimento di prodotti

stabili.

Considerando processi che coinvolgono grandi numeri di atomi li si può trattare alla stregua di variabili continue e supposto un sistema costituito a un certo istante da un gran numero di atomi radioattivi, la legge di decadimento fornisce il numero medio di atomi del sistema a un qualsiasi istante successivo.

I primi a formulare e applicare coerentemente la legge che descrive il decadimento di sostanze radioattive furono Rutherford e Soddy nel 1902.

Ogni nucleo instabile possiede quindi una determinata probabilità λ di decadere in un qualsiasi istante di tempo e la sua *vita media* τ è il reciproco della probabilità di decadimento: $\tau = 1/\lambda$.

Nei prossimi paragrafi descriveremo, prescindendo dalle cause dirette che li determinano, i fenomeni legati ai decadimenti nucleari e come questi possano essere utilmente sfruttati in molti ambiti.

Nel capitolo 5 si approfondiranno invece le caratteristiche e i meccanismi dei decadimenti α , β , γ e della fissione dei nuclei, mostrando anche come si possano predire stime attendibili delle vite medie da confrontare poi con i risultati sperimentali.

4.1 Decadimento radioattivo di una sola sostanza

Dato un qualsiasi atomo, la probabilità che esso decada nell'intervallo di tempo dt è proporzionale a dt moltiplicato per una costante λ , detta *costante o probabilità di decadimento*, le cui dimensioni sono l'inverso di un tempo, che risulta indipendente dall'età dell'atomo ed è caratteristica della sostanza e del tipo di decadimento.

Questa legge si applica indifferentemente a ogni tipo di decadimento radioattivo: α , β , γ , cattura elettronica, fissione spontanea.

Supposto di avere inizialmente un numero molto grande $N(0)$ di atomi di una singola sostanza radioattiva, che ogni singolo decadimento radioattivo sia indipendente da tutti gli altri e considerando il numero residuo $N(t)$ di atomi di tale sostanza ad un istante successivo t alla stregua di una variabile continua, dalla legge del decadimento si ha che la diminuzione $-dN$ di atomi nell'intervallo di tempo dt sarà data da

$$-dN(t) = \lambda N(t)dt \quad (4.1)$$

Integrando quest'equazione tenendo conto del numero $N(0)$ di atomi presenti all'istante iniziale, si ha

$$N(t) = N(0)e^{-\lambda t} \quad (4.2)$$

L'inverso della costante di decadimento, $\tau = 1/\lambda$ è detto *vita media* in quanto costituisce effettivamente il tempo medio $\langle t \rangle$ di vita degli atomi.

Si osservi infatti che se

$$\frac{\lambda N(t)}{N(0)} = \frac{\lambda N(0)e^{-\lambda t}}{N(0)} = \lambda e^{-\lambda t} \quad (4.3)$$

rappresenta la funzione di distribuzione statistica dei tempi di vita di ogni atomo della sostanza radioattiva, si ha, per il loro tempo medio $\langle t \rangle$ di vita

$$\langle t \rangle = \int_0^{\infty} t \lambda e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda} = \tau \quad (4.4)$$

Si utilizza spesso anche il cosiddetto *tempo di dimezzamento* della sostanza radioattiva, definito come il tempo $T_{1/2}$ necessario a far ridurre alla metà il numero di atomi rispetto a quelli presenti inizialmente

$$N(T_{1/2}) = N(0)e^{-T_{1/2}/\tau} = \frac{N(0)}{2} \quad \text{da cui}$$

$$\frac{T_{1/2}}{\tau} = \lambda T_{1/2} = \ln 2 \quad \implies \quad T_{1/2} = \tau \ln 2 \simeq 0.693147 \cdot \tau \quad (4.5)$$

Il numero o *rateo* di decadimenti nell'unità di tempo, detto anche *attività*

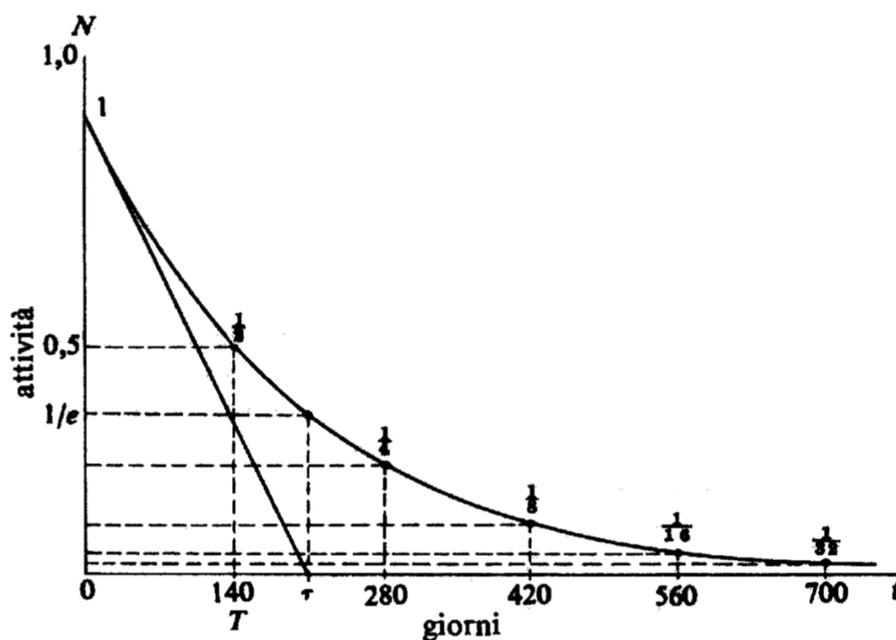


Figura 4.2: Decadimento d'una sostanza radioattiva con tempo di dimezzamento $T_{1/2} = 140$ giorni. La tangente a $N(t)$ nel punto d'ascissa $t = 0$, interseca l'asse t nel punto di valore τ .

$\mathcal{A}(t)$ della sostanza radioattiva, si ottiene dalle [4.1](#) e [4.2](#):

$$\mathcal{A}(t) = \left| \frac{dN(t)}{dt} \right| = \lambda N(t) = \lambda N(0)e^{-\lambda t} \quad (4.6)$$

ed è chiaramente anch'esso una funzione decrescente col tempo, dato che al suo trascorrere il numero di atomi non ancora decaduti e che possono quindi decadere, cala.

L'unità di misura internazionale dell'attività è il Becquerel (Bq)⁴, corrispondente a 1 disintegrazione al secondo. È ancora molto usato anche il Curie (Ci), corrispondente a $3.7 \cdot 10^{10}$ Bq.

$$1 \text{ Ci} = 3.7 \times 10^{10} \text{ Bq}$$

Una certa sostanza radioattiva può mostrare diversi meccanismi indipendenti e competitivi di decadimento, detti anche *canali di decadimento*, ognuno caratterizzato da una ben definita costante λ_i , originando così diverse sostanze figlie. Esempi ne sono le catene di disintegrazioni radioattive naturali e quelle di decadimenti beta successivi che caratterizzano alcuni frammenti di fissione, come mostrato ad esempio in figura 4.3. Supposto che per una sostanza vi siano n diversi e indipendenti canali di decadimento, la sua probabilità totale λ_{tot} di decadimento, essendo additive le probabilità di eventi fra loro indipendenti, è data da

$$\lambda_{tot} = \sum_{i=1}^n \lambda_i = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\tau_i} = \frac{1}{\tau_{tot}} \quad (4.7)$$

Un processo di decadimento con $n > 1$ viene anche detto *diramazione*, e il rapporto fra le quantità di due diversi tipi i e j di prodotti di decadimento associati a due diversi canali, in un certo intervallo di tempo, è detto *rapporto di diramazione (branching ratio) relativo* e coincide col rapporto fra le rispettive costanti di decadimento, λ_i/λ_j

$$\frac{dN_i(t)}{dN_j(t)} = \frac{\lambda_i N_0(t) dt}{\lambda_j N_0(t) dt} = \frac{\lambda_i}{\lambda_j} \quad (4.8)$$

4.2 Decadimento radioattivo di più sostanze

Una sostanza radioattiva può come detto decadere in un'altra anch'essa radioattiva e in tal caso le due si dicono in relazione genetica, con la prima chiamata *genitore* e la seconda *figlia*. Ciò può estendersi a molte "generazioni".

Si supponga di avere al tempo $t = 0$, $N_1(0)$ ed $N_2(0)$ atomi delle sostanze radioattive (1) e (2), in relazione genetica. Se ne vogliono trovare le quantità $N_1(t)$ ed $N_2(t)$ presenti nel generico istante t successivo. La sostanza (1) decade secondo la legge

$$dN_1 = -N_1 \lambda_1 dt \quad (4.9)$$

⁴Antoine Henri Becquerel condivise con Pierre e Maria Curie il Nobel per la fisica nel 1903 "in riconoscimento degli straordinari servizi che ha reso con la sua scoperta della radioattività spontanea".

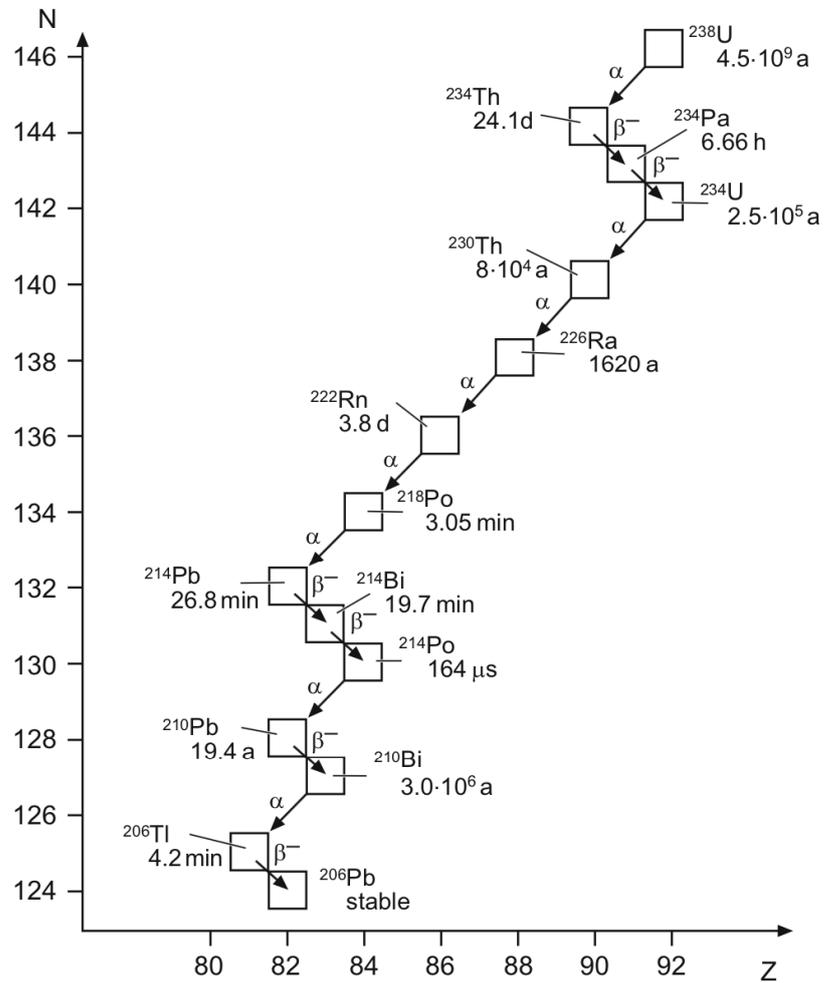


Figura 4.3: Famiglia radioattiva naturale dell' ^{238}U .

e per ogni suo atomo decaduto se ne forma uno della sostanza (2). Il numero di atomi della sostanza (2) quindi varia per due ragioni: da un lato diminuisce per i decadimenti spontanei degli atomi della sostanza (2), dall'altro cresce per effetto della formazione di atomi della sostanza (2) come prodotto del decadimento di atomi della sostanza (1). La variazione totale risultante è quindi:

$$\frac{dN_2}{dt} = \lambda_1 N_1 - \lambda_2 N_2 \quad (4.10)$$

con λ_1 e λ_2 le costanti di decadimento delle due sostanze.

Per una terza sostanza derivante dal decadimento di (2) si ha, in modo analogo:

$$\frac{dN_3}{dt} = \lambda_2 N_2 - \lambda_3 N_3 \quad (4.11)$$

e così via.

Considerando k diverse generazioni in cascata si ha un sistema di k equazioni differenziali che può essere risolto ponendo:

$$\begin{cases} N_1 = a_{11}e^{-\lambda_1 t} \\ N_2 = a_{21}e^{-\lambda_1 t} + a_{22}e^{-\lambda_2 t} \\ \dots \\ N_k = a_{k1}e^{-\lambda_1 t} + a_{k2}e^{-\lambda_2 t} + \dots + a_{kk}e^{-\lambda_k t} \end{cases} \quad (4.12)$$

Le costanti a_{ij} vanno determinate in modo che le [4.12](#) soddisfino le equazioni differenziali e le condizioni iniziali $N_i(0)$. Sostituendo le [4.12](#) in [4.9](#), [4.10](#), [4.11](#), ecc. si ottiene la seguente formula di ricorrenza, valida per i coefficienti a_{ij} con indici $i \neq j$

$$a_{ij} = a_{i-1,j} \frac{\lambda_{i-1}}{\lambda_i - \lambda_j} = \frac{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_{i-1}}{(\lambda_1 - \lambda_j)(\lambda_2 - \lambda_j) \dots (\lambda_{i-1} - \lambda_j)} a_{11} \quad (4.13)$$

I coefficienti con indici uguali si ricavano dalla condizione

$$N_i(0) = a_{i1} + a_{i2} + \dots + a_{ik} \quad (4.14)$$

Nel caso vi siano costanti di disintegrazione λ fra loro uguali, la [4.12](#) va modificata sostituendo, agli esponenziali con ugual valore di λ , termini della forma $te^{-\lambda t}$, $t^2e^{-\lambda t}$,

Ogni espressione della [4.12](#) contiene una somma d'esponenziali in cui compaiono le costanti di disintegrazione di tutte le sostanze che precedono quella considerata.

Alcuni casi specifici di condizioni iniziali hanno notevole importanza pratica. Si consideri il caso in cui all'inizio è presente la sola sostanza 1 con $N_1(0)$ atomi. Applicando direttamente le [4.12](#), [4.13](#) e [4.14](#) si ha, procedendo fino alla terza generazione

$$\begin{cases} N_1(t) = N_1(0)e^{-\lambda_1 t} \\ N_2(t) = N_1(0) \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}) \\ N_3(t) = N_1(0) \lambda_1 \lambda_2 \left[\frac{e^{-\lambda_1 t}}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1)} + \frac{e^{-\lambda_2 t}}{(\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_2)} + \frac{e^{-\lambda_3 t}}{(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_3)} \right] \end{cases} \quad (4.15)$$

Si consideri ora l'andamento col tempo delle attività di due sostanze radioattive, un genitore (1) e una sostanza figlia (2), di una stessa catena radioattiva $N_1(t) \xrightarrow{\lambda_1} N_2(t)$ e si determini l'istante $t_{1,2}^*$ in cui le due attività

combaciano.

Ciò implica, in base alla [4.6](#)

$$\lambda_1 N_1(t) = \lambda_2 N_2(t) \quad (4.16)$$

e sostituendo dalla [4.15](#)

$$\lambda_1 N_1(0) e^{-\lambda_1 t} = \lambda_2 N_1(0) \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t})$$

da cui

$$t_{1,2}^* = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \ln \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right) = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \ln \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right) \quad (4.17)$$

L'istante in cui l'entità della sostanza figlia ha il suo massimo si ottiene uguagliando a zero la variazione temporale della quantità di sostanza figlia

$$dN_2(t)/dt = N_1(0) \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} (\lambda_2 e^{-\lambda_2 t} - \lambda_1 e^{-\lambda_1 t}) = 0$$

da cui infine

$$t_{max} = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \ln \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right) \quad (4.18)$$

Quindi ne deriva l'interessante risultato che nel caso sia presente ad un

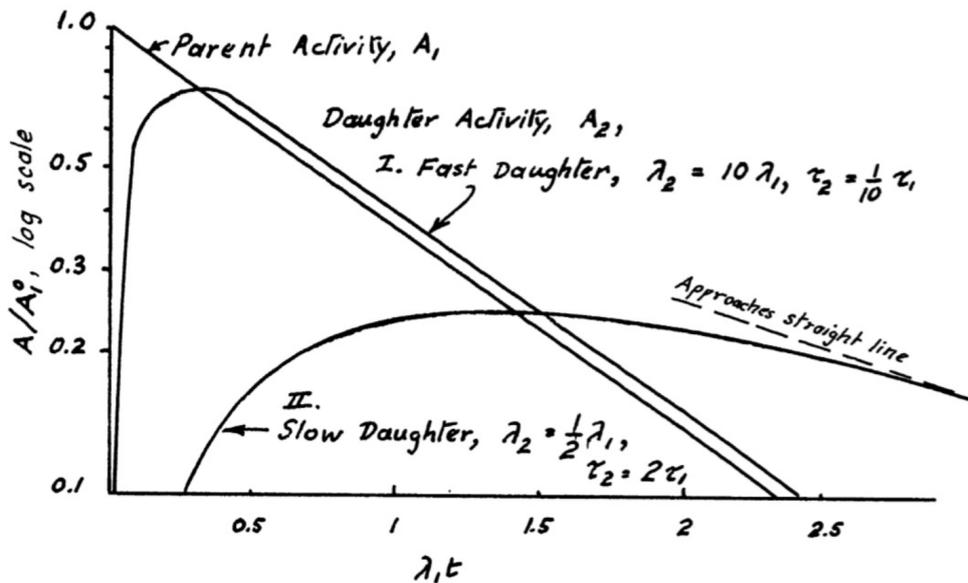


Figura 4.4: Ratei di decadimento di particelle figlie con probabilità di decadimento minore o maggiore di quella di uno stesso genitore.

istante iniziale una sola sostanza radioattiva, la sostanza figlia raggiunge il massimo della sua entità allo stesso istante in cui la sua attività coincide con quella della sostanza genitore, $t_{max} = t_{1,2}^*$.

Si consideri ora la catena radioattiva $N_1(t) \xrightarrow{\lambda_1} N_2(t) \xrightarrow{\lambda_2} N_3(t)$ e si faccia sempre riferimento ai risultati presentati nelle [4.15](#), supponendo però che la sostanza di terza generazione sia stabile, ovvero $\lambda_3 = 0$. In tal caso

$$N_3(t) = N_1(0) \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} \left(\frac{1 - e^{-\lambda_1 t}}{\lambda_1} - \frac{1 - e^{-\lambda_2 t}}{\lambda_2} \right) \quad (4.19)$$

Si vedano ora quattro casi notevoli.

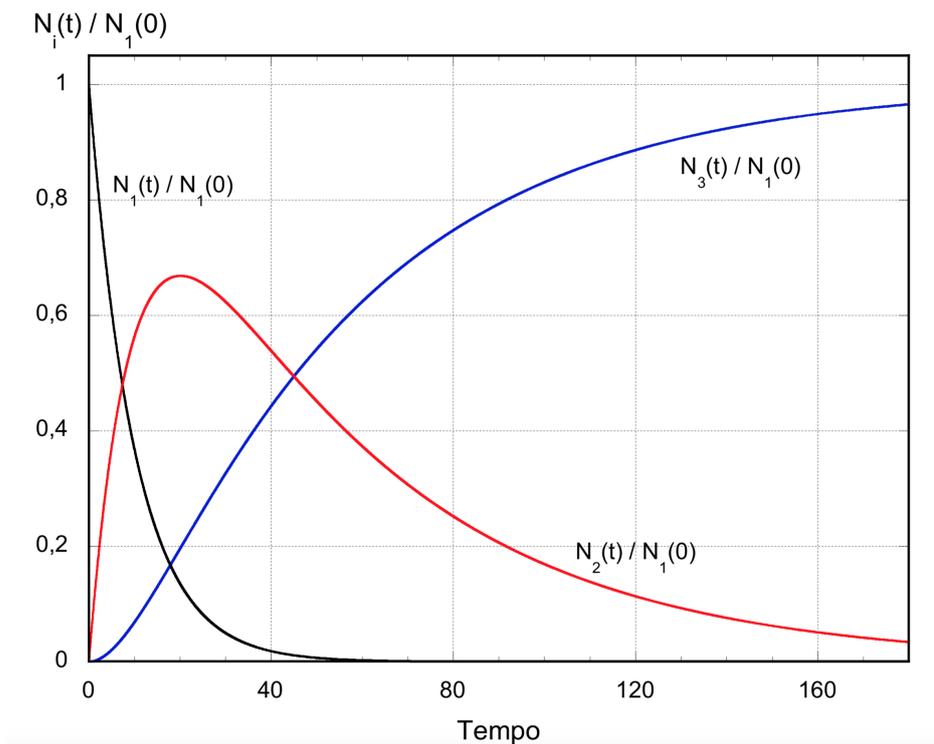


Figura 4.5: Esempio di una serie radioattiva con tre membri, di cui all'inizio è presente solo il genitore, l'ultimo è stabile e quello intermedio ha una vita media cinque volte superiore a quella del genitore

1. Supponendo dapprima $\lambda_1 > \lambda_2$, si ha che dopo un tempo t abbastanza lungo, per cui $t \gg 1/\lambda_1$, si può trascurare il primo esponenziale in parentesi per $N_2(t)$ dalle [4.15](#), ottenendo

$$N_2(t) \cong N_1(0) \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{-\lambda_2 t} \quad (4.20)$$

il che mostra come in questo caso, per tempi $t > t_{max}$, la sostanza figlia (2) proceda decadendo sostanzialmente secondo la propria costante di decadimento λ_2 , quindi secondo la propria vita media τ_2 .

2. Se invece si suppone $\lambda_1 < \lambda_2$, si ha che dopo un tempo t abbastanza lungo, per cui $t \gg 1/\lambda_2$ e quindi anche $t > t_{max}$, si può trascurare il secondo esponenziale in parentesi per $N_2(t)$ dalle [4.15](#), ottenendo

$$N_2(t) \cong N_1(0) \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{-\lambda_1 t} \quad (4.21)$$

che mostra come in questo caso la sostanza figlia (2) proceda decadendo sostanzialmente secondo la costante di decadimento λ_1 della sostanza genitore, quindi secondo la vita media τ_1 .

Ciò risulta comprensibile riflettendo sul fatto che essendo lento il rateo di decadimento della sostanza (1) rispetto a quello della sostanza (2), lo è anche quello di formazione della sostanza (2), che però decade poi rapidamente subito dopo essersi formata.

Moltiplicando per λ_2 i due termini della [4.21](#) si ottiene, per il rateo di decadimenti della sostanza (2), ovvero per la sua attività $\mathcal{A}_2(t)$

$$\mathcal{A}_2(t) = \lambda_2 N_2(t) \cong \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} \mathcal{A}_1(t) \quad (4.22)$$

3. Supponendo ora $\lambda_1 \ll \lambda_2$, dalla [4.22](#) e sempre per tempi $t > t_{max}$, si ha $\mathcal{A}_2(t) \cong \mathcal{A}_1(t)$, individuando quello che viene detto un *equilibrio transiente* fra le attività degli elementi (1) e (2), con un rapporto sostanzialmente costante fra esse: $\mathcal{A}_2/\mathcal{A}_1 \cong \lambda_2/(\lambda_2 - \lambda_1) \cong 1$.
4. Se ora, oltre a considerare $\lambda_1 \ll \lambda_2$ si suppone anche $\lambda_1 \cong 0$, e si considerano tempi t tali che $1/\lambda_1 \gg t \gg 1/\lambda_2$, allora

$$\begin{cases} N_1(t) \cong N_1(0) \\ N_2(t) \cong N_1(0) \frac{\lambda_1}{\lambda_2} (1 - e^{-\lambda_2 t}) \end{cases} \quad (4.23)$$

da cui:

$$\begin{cases} \mathcal{A}_1(t) \cong \mathcal{A}_1(0) \\ \mathcal{A}_2(t) \cong \mathcal{A}_1(0) (1 - e^{-\lambda_2 t}) \end{cases} \quad (4.24)$$

Si è quindi in presenza di un'attività molto piccola e quasi costante $\mathcal{A}_1(t)$. L'attività $\mathcal{A}_2(t)$ tende all'equilibrio per tempi $t \gg \lambda_2^{-1}$, quando $e^{-\lambda_2 t} \rightarrow 0$ e $\mathcal{A}_2(t) \rightarrow \mathcal{A}_1(0)$, quindi in regime di quasi saturazione, ovvero di quasi equilibrio (Figura [4.6](#)).

L'effettivo equilibrio richiederebbe d'altronde $dN_1(t)/dt = 0$, e riestendendo anche al caso di una generica catena radioattiva con k decadimenti successivi, ciò implicherebbe l'uguaglianza di tutte le attività

$$\mathcal{A}_1(t) = \mathcal{A}_2(t) = \mathcal{A}_3(t) = \dots = \mathcal{A}_k(t) \quad (4.25)$$

Questa condizione non può però essere effettivamente raggiunta in quanto l'aver $dN_1(t)/dt = 0$ significherebbe che la sostanza genitore è stabile, con $\lambda_1 = 0$ e $\tau_1 = \infty$. È d'altronde possibile conseguire una condizione tanto più prossima a quella dell'effettivo equilibrio quanto più lentamente decade la sostanza genitore rispetto ad ogni sostanza figlia della catena radioattiva. In tal caso, col crescere del tempo t , si tende alla condizione

$$N_1(t)\lambda_1 = N_2(t)\lambda_2 = N_3(t)\lambda_3 = \dots = N_k(t)\lambda_k \quad (4.26)$$

detta di *equilibrio secolare*. Essa risulta infatti applicabile soltanto quando un materiale, contenente tutti i prodotti di decadimento provenienti da una sostanza genitore, è stato lasciato indisturbato per un tempo sufficientemente lungo da permettere il conseguimento della suddetta condizione di equilibrio.

L'equilibrio può essere raggiunto anche nel caso in cui la sostanza genitore venga prodotta nel tempo con un rateo di produzione \mathcal{R} uguale al suo rateo di decadimento $\lambda N(t)$. Un caso del genere si può avere ad esempio bombardando un campione di sostanza i cui nuclei siano stabili, con un fascio di particelle che inducano un numero di trasmutazioni su \mathcal{R} atomi/s verso un elemento radioattivo che poi decada con una costante λ . Questo proce-

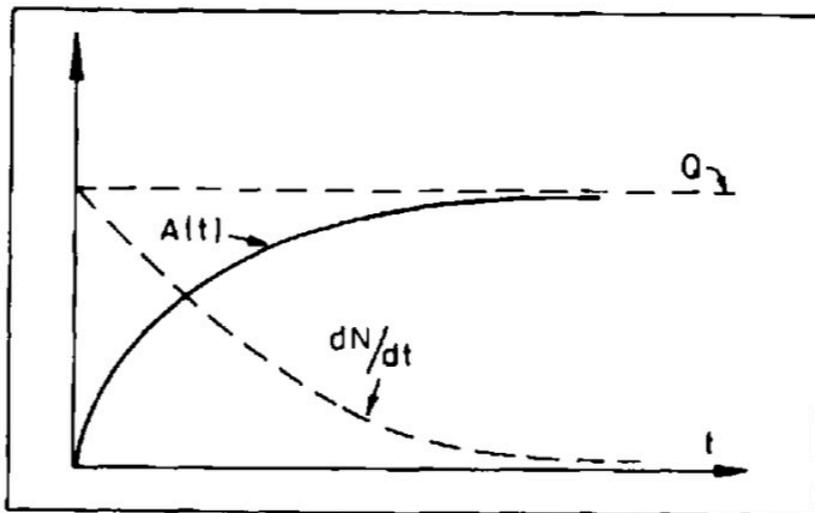


Figura 4.6: Equilibri asintotici fra ratei di produzione e attività.

dimento è in pratica utilizzato per produrre elementi radioattivi sfruttando ad esempio neutroni provenienti da reattori o fasci di particelle prodotti in acceleratori.

La variazione del numero $N(t)$ di nuclei radioattivi presenti si ottiene dal

bilanciamento fra il rateo \mathcal{R} di formazione e il rateo $\lambda N(t)$ di decadimento:

$$\frac{dN(t)}{dt} = \mathcal{R} - \lambda N(t) \quad (4.27)$$

che se $\mathcal{R} = \text{cost.}$, si può riscrivere ridefinendo e quindi separando le variabili:

$$\frac{d[\mathcal{R} - \lambda N(t)]}{\mathcal{R} - \lambda N(t)} = -\lambda dt \quad (4.28)$$

Integrandola, nell'ipotesi che all'istante iniziale $t = 0$ si abbiano $N(0) = 0$ nuclei, si ottiene

$$\mathcal{R} - \lambda N(t) = [\mathcal{R} - \lambda N(0)] e^{-\lambda t} \implies N(t) = \frac{\mathcal{R}}{\lambda} (1 - e^{-\lambda t}) \quad (4.29)$$

che rappresenta un andamento a saturazione, tipico dei casi in cui formazione e decadimento sono in competizione. In figura 4.6 sono schematicamente illustrati l'attività $\mathcal{A}(t) \equiv \lambda N(t)$, o rateo di decadimento radioattivo, e la variazione temporale del numero di nuclei genitori $dN(t)/dt$ per un sistema con un rateo di formazione di \mathcal{R} atomi/s. ⁵

4.3 Tecniche radioattive di datazione

Le tecniche di datazione basate sui decadimenti radioattivi permettono di ottenere le informazioni più attendibili in merito alle valutazioni dei tempi assoluti delle epoche geologiche. Le sostanze comunemente utilizzate per questi scopi sono l'uranio e i suoi isotopi, il torio, il potassio e il rubidio.

La storia iniziale del pianeta Terra non è nota, ma ad un certo punto le rocce raggiunsero la loro composizione attuale, cristallizzandosi e differenziando i loro diversi componenti minerali. Un processo di metamorfosi, seppur lento, è tutt'ora in atto. La datazione radioattiva si riferisce sostanzialmente alla possibilità di determinare il tempo di formazione dei minerali, ovvero la loro età. Una roccia che al momento della sua formazione contenesse ad esempio una certa quantità di uranio, ha accumulato nel tempo trascorso, elio prodotto dal decadimento dell'uranio. Ogni atomo di ^{238}U che si trasforma in ^{206}Pb emette infatti otto particelle α , ovvero otto nuclei di elio, che se non sfuggono dalla roccia permettono di datare quest'ultima dalla valutazione fra l'uranio ancora presente e l'elio nel frattempo accumulato. Anche il torio permette di attuare un procedimento simile.

Particolare attenzione va posta nel verificare che l'elio e l'uranio non siano sfuggiti dai campioni in analisi durante la storia della roccia, cosa peraltro

⁵Per una trattazione completa delle equazioni che descrivono le trasmutazioni nucleari si può vedere ad esempio: Jerzi Cetnar, General solution of Bateman equations for nuclear transmutations, Annals of Nuclear Energy, 33 (2006) 640-645.

frequente per quanto concerne l'elio. Il rapporto uranio/piombo è anche utilizzabile e risente meno dei problemi che caratterizzano l'elio⁶, dovuti a diffusione o fuga dalle rocce. Si utilizzano inoltre anche i rapporti $^{206}\text{Pb}/^{207}\text{Pb}$, K/Ar e $^{87}\text{Rb}/^{87}\text{Sr}$.

Si veda ora come implementare questa tecnica, considerando che la si vuole applicare a decadimenti che si sviluppano su tempi geologici ($\sim 10^9$ y) per i quali non si è in grado di misurare direttamente l'attività in funzione del tempo. Quanto si fa in tali casi è utilizzare i numeri relativi di nuclei genitori e figli osservati al tempo t_1 (oggi) in un campione di materiale, confrontandoli con i numeri relativi al tempo t_0 , quando il materiale in studio si è cristallizzato a costituire la roccia (minerale) intrappolando i nuclei genitori nella loro "posizione" attuale.

Dato il decadimento dell'isotopo (nucleo/atomo) genitore G nell'isotopo (nucleo/atomo) figlio F, bisogna semplicemente *contare*, ad esempio con metodi chimici, gli attuali numeri di atomi G ed F, $N_G(t_1)$ e $N_F(t_1)$; se null'altro tranne il decadimento radioattivo ha agito a partire dal tempo t_0 nel modificare $N_G(t)$ ed $N_F(t)$, allora supposto che al tempo t_0 della formazione non vi fosse ancora presenza di nuclei figli, cioè $N_F(t_0) = 0$, si ha

$$N_F(t_1) + N_G(t_1) = N_G(t_0) \quad (4.30)$$

e ancora

$$N_G(t_1) = N_G(t_0) e^{-\lambda(t_1-t_0)} \quad (4.31)$$

da cui

$$\Delta t \equiv t_1 - t_0 = \frac{1}{\lambda} \ln \left[\frac{N_G(t_0)}{N_G(t_1)} \right] = \frac{1}{\lambda} \ln \left[1 + \frac{N_F(t_1)}{N_G(t_1)} \right] \quad (4.32)$$

Noti quindi la costante di decadimento λ del nucleo genitore, misurabile in laboratorio, e il rapporto attuale fra abbondanza di nuclei genitori e figli, si ottiene l'età del campione in studio con una precisione dipendente da quella con cui è nota λ e dalla statistica di conteggio per N_G ed N_F .

Nelle relazioni [4.30](#) e [4.31](#) sono implicite delle assunzioni che devono essere accuratamente verificate prima di applicare la relazione [4.32](#) alla determinazione dell'età di un campione. La [4.30](#) assume infatti, come detto, che $N_F(t_0) = 0$, e anche che nel tempo intercorso dalla formazione del campione fino ad oggi non si siano verificati fenomeni che hanno portato a modificare il numero totale di atomi presenti, variando il rapporto genitori/figli, se non per quanto dovuto al processo di decadimento radioattivo.

La [4.31](#) assume che la variazione di N_G dipenda soltanto dal decadimento e

⁶La molecola di elio è monoatomica ed è sostanzialmente la più piccola fra tutte le molecole, quindi, unitamente alla piccola massa, questo spiega la maggior facilità per l'elio di sfuggire da materiali in cui sia presente o sia stato assorbito, sfruttando i micro-difetti strutturali dei materiali stessi.

che quindi non vengano introdotti ulteriori atomi genitori né da altri, diversi e concomitanti, fenomeni di decadimento, né da reazioni nucleari, come ad esempio quelle inducibili da raggi cosmici.

Si veda ora come modificare la procedura per l'ottenimento di Δt tenendo conto anche dell'eventuale numero di nuclei/atomi figli F già presenti nel campione all'istante t_0 della sua formazione, anche se al momento t_1 dell'analisi del campione non si può dire quali atomi figli siano derivati dal decadimento durante il tempo Δt e quali ci fossero fin dall'inizio.

Si supponga che al tempo t_0 siano già presenti $N_F(t_0)$ nuclei figli, ad esempio formati da decadimenti del genitore in tempi precedenti t_0 o comunque inglobati nel campione al momento t_0 della sua formazione. La [4.30](#) diventa in questo caso

$$N_F(t_1) + N_G(t_1) = N_F(t_0) + N_G(t_0) \quad (4.33)$$

La quantità $N_F(t_0)$ non è però nota e questo non permette quindi di ottenere Δt . Se tuttavia nel campione è presente anche un diverso isotopo F' della specie figlia, che sia stabile e non proveniente dal decadimento di un genitore con lunga vita media, si può comunque risalire all'età del campione. Indicata con $N_{F'}$ la popolazione dell'isotopo F' , il fatto che esso sia stabile implica $N_{F'}(t_1) = N_{F'}(t_0)$, da cui

$$\frac{N_F(t_1) + N_G(t_1)}{N_{F'}(t_1)} = \frac{N_F(t_0) + N_G(t_0)}{N_{F'}(t_0)} \quad (4.34)$$

che diventa

$$\frac{N_F(t_1)}{N_{F'}(t_1)} = \frac{N_G(t_1)}{N_{F'}(t_1)} [e^{\lambda(t_1-t_0)} - 1] + \frac{N_F(t_0)}{N_{F'}(t_0)} \quad (4.35)$$

I rapporti $N_F(t_1)/N_{F'}(t_1)$ e $N_G(t_1)/N_{F'}(t_1)$ possono essere misurati in laboratorio ma resta sempre incognito il rapporto isotopico $N_F(t_0)/N_{F'}(t_0)$. Avviene che minerali che cristallizzano secondo una comune origine dovrebbero mostrare uguali età e anche uguali rapporti isotopici $N_F(t_0)/N_{F'}(t_0)$, anche se in essi il numero $N_G(t_0)$ degli stessi atomi genitori può essere molto diverso, ad esempio per la diversa composizione chimica.

Supponendo corretta quest'ipotesi ci si attende al momento della misura, ovvero al tempo t_1 , di osservare minerali con diversi rapporti $N_F(t_1)/N_{F'}(t_1)$ e $N_G(t_1)/N_{F'}(t_1)$, corrispondenti ad una medesima coppia di valori Δt e $N_F(t_0)/N_{F'}(t_0)$.

Questa ipotesi può essere analizzata graficando $N_F(t_1)/N_{F'}(t_1)$ rispetto a $N_G(t_1)/N_{F'}(t_1)$: per svariati minerali la [4.35](#) mostra infatti una dipendenza lineare fra i rapporti, con pendenza data da $[e^{\lambda(t_1-t_0)} - 1]$ e intercetta $N_F(t_0)/N_{F'}(t_0)$.

Un esempio, relativo al decadimento $^{87}\text{Rb} \rightarrow ^{87}\text{Sr}$ ($T_{1/2} = 4.8 \times 10^{10}$ y), confrontato con l'isotopo stabile ^{86}Sr , è illustrato in figura [4.7](#). La buona

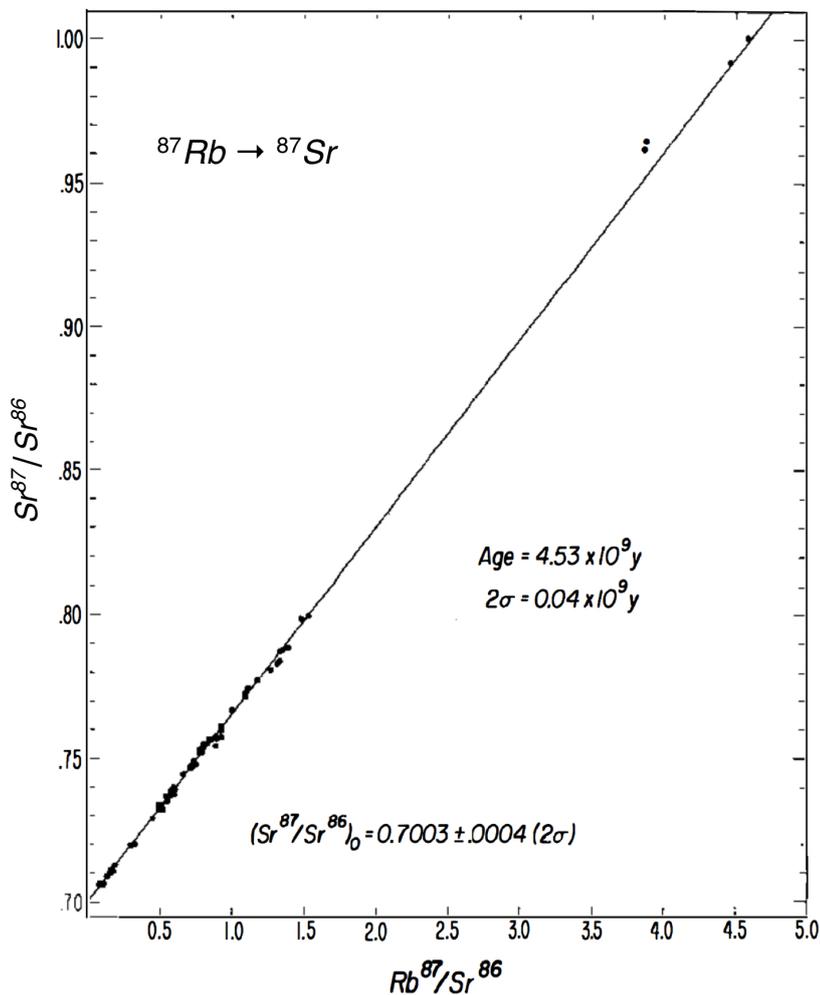


Figura 4.7: Tecnica di datazione Rb-Sr, tratto da G.W. Wertherill, Ann. Rev. Nucl. Sci. 25 (1975) 283.

linearità della regressione sui punti sperimentali suffraga l'ipotesi che non vi siano state perdite di nuclei genitori o figli.

Le rocce terrestri superficiali più vecchie datate con tali metodi hanno un'età di $4.374 \times 10^9 \pm 0.006 \cdot 10^9$ anni e sono costituite da granuli di zircone scoperti in Australia, nella regione di Jack Hills, nel 2013. Il risultato, compatibile con l'età dei frammenti di meteoriti più antichi analizzati, suggerisce che la crosta terrestre si sia formata circa 100 milioni di anni dopo il gigantesco impatto che potrebbe aver dato origine alla Luna.

Per datazioni di campioni più giovani, come quelli di materiali di tipo organico, il metodo che fa uso dell'isotopo radioattivo ^{14}C del Carbonio è il più

utilizzato.

Una struttura organica vivente assorbe anidride carbonica, CO_2 , e il contenuto in carbonio di quest'ultima è costituito quasi interamente da ^{12}C (98.89%), mescolato ad una piccola percentuale di ^{13}C (1.11%).

Il ^{14}C radioattivo, che decade β^- in ^{14}N con una vita media $\tau = 8267$ anni, è continuamente formato negli strati alti dell'atmosfera per effetto della cattura, da parte dell'azoto atmosferico, dei neutroni termici quali prodotti secondari del bombardamento dei raggi cosmici. L'equilibrio dinamico che si instaura fra produzione e decadimento, supposti stabili la struttura chimica e in densità media dell'atmosfera, oltrechè il flusso di raggi cosmici che la investe, mantengono costante la concentrazione di ^{14}C nell'atmosfera stessa. Il ^{14}C così prodotto con un rateo $\mathcal{R}(^{14}\text{C})$, reagisce con l'ossigeno per dare anidride carbonica $^{14}\text{CO}_2$ che viene riutilizzata dalle piante durante la fotosintesi clorofilliana.

Con questo meccanismo il ^{14}C si trasferisce quindi nei composti organici e attraverso la catena alimentare è presente in ogni struttura vivente secondo un preciso rapporto (abbondanza isotopica), pari a circa 1.3 atomi di ^{14}C ogni 10^{12} atomi di ^{12}C . Tutta la materia vivente è dunque leggermente radioattiva in funzione del suo contenuto di ^{14}C .

Supposto che il rateo di produzione di ^{14}C da parte dei raggi cosmici si mantenga relativamente costante⁷, ne consegue che la materia organica, se vive sufficientemente a lungo, raggiunge l'equilibrio del suo contenuto di ^{14}C con quello dell'atmosfera

$$\frac{dN(^{14}\text{C})}{dt} = 0 \quad \implies \quad \mathcal{R}(^{14}\text{C}) = \lambda(^{14}\text{C}) N(^{14}\text{C}) \quad (4.36)$$

e tramite il metabolismo lo mantiene sino alla morte, momento a partire dal quale smette di assumere ^{14}C e quindi di essere in equilibrio, per il suo contenuto, con il ^{14}C atmosferico. Dal momento della morte dell'organismo il suo contenuto di ^{14}C decresce quindi secondo la legge del decadimento radioattivo.

Si può dunque determinare l'età di un campione organico a partire dal momento della morte dell'organismo cui esso è appartenuto, misurando l'attività per grammo di carbonio in esso contenuto, detta *attività specifica* (A_{sp}), e confrontandola con l'attività specifica del carbonio atmosferico, pari a circa 0.23 Bq/g, ovvero 13.8 disintegrazioni/g al minuto.

Detto t_0 il tempo della morte dell'organismo, e t_1 il tempo della misura, si

⁷Nella realtà il livello di ^{14}C in atmosfera è variato significativamente nel tempo, sia per motivi naturali che "umani", come ad esempio nel secolo scorso a causa soprattutto degli esperimenti con ordigni nucleari. Questo rende necessario ricorrere a metodi complementari, che affiancano e complementano quello del radiocarbonio, per ottenere affidabili datazioni (M.J.Aitken, "Science-based dating in archaeology" - Longman, 1990; Aitken al., "Chronometric Dating in Archaeology" - Springer US, 1997)

ha, per l'età $\Delta t = (t_1 - t_0)$ del campione

$$\mathcal{A}_{sp}(^{14}\text{C}, t_1) = \mathcal{A}_{sp}(^{14}\text{C}, t_0) e^{-\lambda(t_1 - t_0)} \quad (4.37)$$

da cui:

$$\Delta t \equiv (t_1 - t_0) = \frac{1}{\lambda} \ln \frac{\mathcal{A}_{sp}(^{14}\text{C}, t_0)}{\mathcal{A}_{sp}(^{14}\text{C}, t_1)} \quad (4.38)$$

I metodi di datazione che sfruttano l'attività danno affidamento fino a tempi sostanzialmente non superiori a $7 \times \tau$, quindi con il ^{14}C si possono ottenere datazioni di una certa attendibilità fino a tempi inferiori a circa 6×10^4 y. Si può fare ancor meglio utilizzando la tecnica della spettrometria di massa

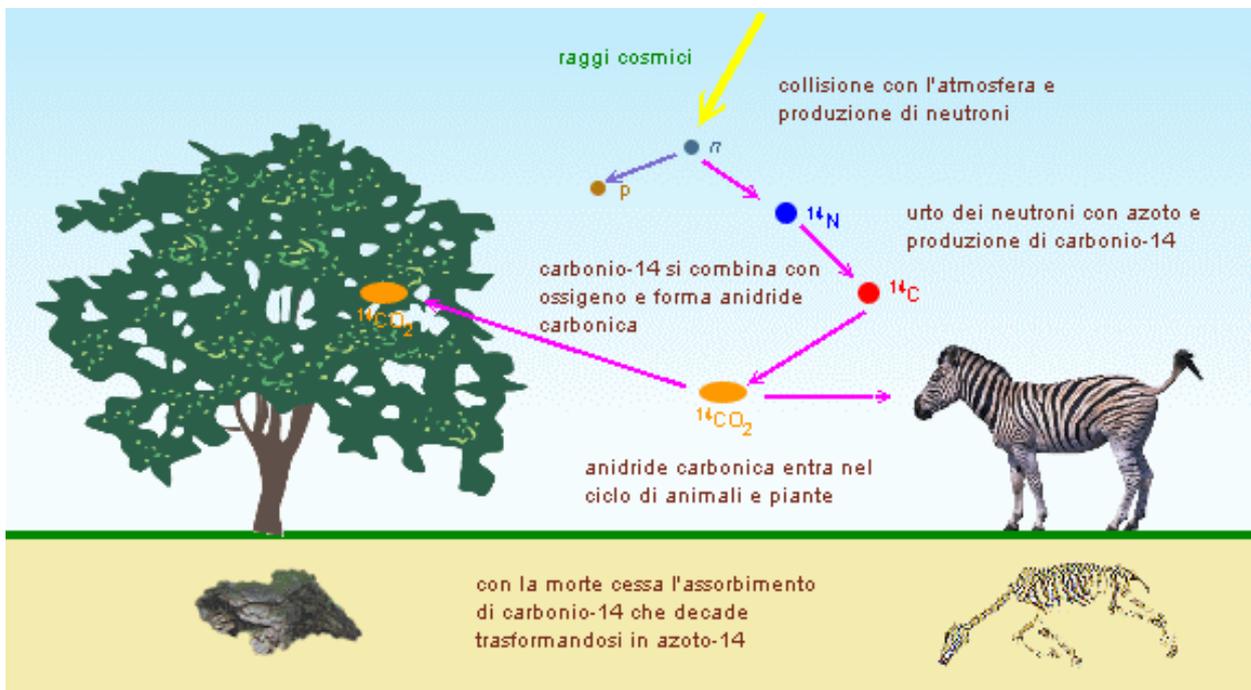


Figura 4.8: Schematizzazione del ciclo del ^{14}C .

con acceleratore (AMS) che permette di contare direttamente il numero di atomi sia di ^{14}C che anche di altri isotopi, presenti in un campione.

Capitolo 5

Decadimenti nucleari

5.1 Generalità sui decadimenti nucleari

Un nucleo A_ZX si dice *stabile* rispetto al decadimento

$${}^A_ZX \longrightarrow {}^{A-A'}_{Z-Z'}X + \sum_{i=1}^n {}^{A^i}_{Z^i}b \quad (5.1)$$

con $\sum_{i=1}^n A^i = A'$ e $\sum_{i=1}^n Z^i = Z'$, se risulta negativa la differenza fra le masse

$$\Delta M_b(A, Z) = M_X(A, Z) - M_X(A - A', Z - Z') - \sum_{i=1}^n M_b(A^i, Z^i) \quad (5.2)$$

Se invece $\Delta M_b > 0$, il processo [5.1](#) ha luogo spontaneamente, a meno di vincoli legati al rispetto di leggi di conservazione.

Questo presuppone che gli $n + 1$ prodotti del decadimento vengano emessi contemporaneamente. Non è però sempre così, soprattutto per $n > 2$. In quei casi ci si può trovare di fronte a catene di decadimenti sequenziali che partendo dai prodotti di un iniziale decadimento binario o ternario, ne coinvolgono poi alcuni in decadimenti successivi per cui, alla fine di tutto il processo, si possono avere molti prodotti come risultato del decadimento iniziale di un solo nucleo o particella, ma non tutti saranno stati emessi contemporaneamente. Lo studio di questi casi si può ricondurre a quello di decadimenti indipendenti, se si è in grado di risolvere la sequenza temporale con cui si manifestano.

Nel seguito di questo capitolo si considereranno decadimenti binari o ternari. Per decadimenti binari la quantità

$$E_b(A, Z) = \Delta M_b(A, Z)c^2 < 0 \quad (5.3)$$

è detta energia di legame di ${}^{A'}_{Z'}b$ nel nucleo A_ZX . L'opposto di $E_b(A, Z)$, detta energia di separazione, rappresenta l'energia minima che deve essere fornita

al nucleo A_ZX affinché esso emetta ${}^{A'}_{Z'}b$.

Quindi, equivalentemente a quanto visto sopra, se $E_b(A, Z) > 0$, il processo avviene spontaneamente, e i termini a destra della freccia nella [5.1](#) sono detti *prodotti del decadimento*.

La quantità totale di energia rilasciata in un decadimento è anche detta Q -valore del decadimento, e si ha quindi che un decadimento può aver luogo spontaneamente solo se $Q > 0$.

Dall'analisi dei valori sperimentali delle masse dei nuclidi naturali e di molti artificiali si trova, nel caso in cui ${}^{A'}_{Z'}b$ sia un protone p , un neutrone n o un deutone $d \equiv {}^2_1H$, che vale sempre $E_b(A, Z) < 0$, ovvero il decadimento spontaneo [5.1](#) non può aver luogo, quindi le radioattività naturali *protonica*, *neutronica* e *deutonica* sono energeticamente proibite.

In alcuni casi si osserva la cosiddetta *emissione ritardata* di neutroni o di protoni, che hanno però luogo sempre immediatamente a ridosso dell'emissione di un elettrone, o di un positrone (o di una cattura K), conseguenti a un decadimento β .

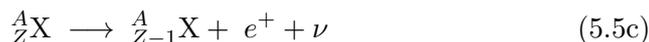
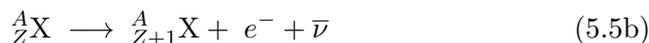
Per alcuni nuclei pesanti si ha $E_\alpha(A, Z) > 0$, ed è quindi energeticamente possibile l'emissione spontanea di particelle α da parte di quei nuclei pesanti. La grande energia di legame del nucleo di elio, pari a circa 28.3 MeV, rende inoltre la sua emissione da un nucleo pesante particolarmente favorevole, da un punto di vista energetico, rispetto a quella di altri frammenti nucleari leggeri.

Calcolando le energie di legame di protoni e neutroni, tramite la [5.3](#) si evidenzia che i nuclei con numero N^* di neutroni pari a

$$N^* = 2, 8, 20, 50, 82, 126 \quad (5.4)$$

sono eccezionalmente stabili, in quanto le energie di legame per i loro protoni e neutroni sono maggiori di quelle calcolate per i nuclei con valori adiacenti di N . Si noti la sistematica ricorrenza della sequenza [5.4](#), già individuata nel paragrafo [2.2](#).

Gli schemi di decadimento nucleare α e β sono rispettivamente



Analizzando il diagramma $Z - N$ si trova che il punto rappresentativo di un nucleo β -instabile si sposta lungo una linea isobarica verso il basso oppure verso l'alto, a seconda che venga emesso un positrone e^+ o un elettrone e^- ; il punto rappresentativo di un nucleo α -instabile si sposta invece nel punto di coordinate $(N - 2; Z - 2)$. Questa legge dello spostamento radioattivo fu

formulata nel 1913, indipendentemente da F. Soddy e K. Fajans.

Si trova sperimentalmente che tutti i nuclei con $Z > 82$ hanno almeno un nuclide α -instabile. Fra i pochi nuclei α -instabili con $Z < 82$ ci sono il neodimio (${}^{144}_{60}\text{Nd}$), il samario (${}^{146}_{62}\text{Sm}$ e ${}^{147}_{62}\text{Sm}$), il gadolinio (${}^{148}_{64}\text{Gd}$ e ${}^{149}_{64}\text{Gd}$), il terbio (${}^{149}_{65}\text{Tb}$ e ${}^{150}_{65}\text{Tb}$), l'afnio (${}^{174}_{72}\text{Hf}$), il platino (${}^{190}_{78}\text{Pt}$).

I nuclei α -instabili ${}^{238}_{92}\text{U}$, ${}^{235}_{92}\text{U}$ e ${}^{232}_{90}\text{Th}$ sono i capostipiti di tre serie radioattive ognuna delle quali, tramite una successione di decadimenti a catena α e β , termina con un isotopo stabile del piombo.

Per quanto concerne l'interpretazione del processo di decadimento α , formulata nel 1928 da G.Gamow, R.Gurney e F.Condon, essa rappresenta una brillante applicazione della meccanica quantistica, come si vedrà nei paragrafi [5.2](#), [5.2.2](#) e in Appendice [C](#).

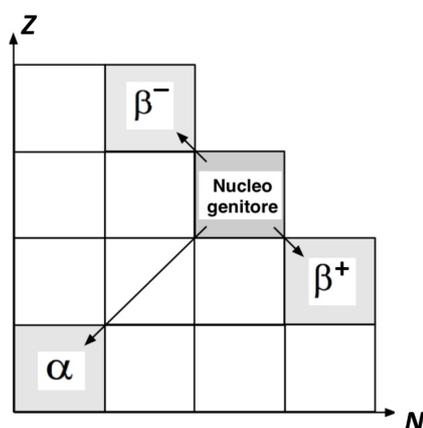


Figura 5.1: Illustrazione della legge dello spostamento radioattivo di Soddy-Fajans.

5.2 Radioattività α

Fu Rutherford nel 1909 a scoprire che la radiazione α è costituita da nuclei di elio: egli fece decadere sotto vuoto una sostanza radioattiva che emetteva particelle α e analizzando poi il contenuto dell'ambiente originariamente vuoto trovò presenza di elio.

Il decadimento α rappresenta quindi la disintegrazione di un nucleo genitore in un nucleo figlio e un nucleo di elio



e può essere considerato come una fissione spontanea del nucleo genitore (si veda il paragrafo [5.7](#)) in due nuclei figli con masse fortemente asimmetriche. Esso è sostanzialmente dovuto all'azione concomitante delle forze nucleari e di quelle elettromagnetiche.

La sua importanza cresce al crescere del numero di massa A , in quanto la repulsione coulombiana, dipendendo da Z^2 , cresce più rapidamente della forza di legame nucleare che dipende approssimativamente da A solo per nuclei leggeri per poi saturare al crescere di A .

Il motivo per cui un nucleo scelga il decadimento α per liberarsi *spontaneamente* di carica elettrica va ricercato nel fatto che la particella α è una struttura molto stabile e fortemente legata, ha quindi un'energia di massa equivalente sensibilmente inferiore alla somma delle energie di massa dei suoi componenti presi singolarmente. Se quindi si definisce spontaneo un processo di decadimento che porti una struttura a una riduzione della propria massa con la maggior possibile trasformazione di questa in energia cinetica, e si desidera nel contempo che il prodotto emesso nel decadimento sia il più leggero possibile, allora la particella α è un ottimo candidato.

Per alcuni nuclei molto pesanti c'è la possibilità energetica dell'emissione spontanea anche di altri nuclei leggeri, quali ${}^8\text{Be}$ o ${}^{12}\text{C}$, ma la probabilità è così bassa da rendere sperimentalmente non rilevabile il processo.

Per studiare l'energetica del processo si supponga il nucleo genitore inizialmente a riposo rispetto a un osservatore inerziale solidale col sistema del laboratorio (SL), che in questo caso coincide con quello del centro di massa (CM); la conservazione dell'energia si esprime come

$$M_X c^2 = M_Y c^2 + E_{k,Y} + M_\alpha c^2 + E_{k,\alpha} \quad (5.7)$$

con M_X , M_Y ed M_α le masse rispettivamente del nucleo genitore, di quello figlio e della particella α , $E_{k,Y}$ ed $E_{k,\alpha}$ le energie cinetiche del nucleo figlio e della particella α .

Dalla [5.7](#) si ha

$$E_{k,Y} + E_{k,\alpha} = (M_X - M_Y - M_\alpha) c^2 = \Delta M c^2 \equiv Q_\alpha \quad (5.8)$$

che viene detto Q -valore del decadimento α e coincide con l'energia a disposizione della disintegrazione. Le energie in gioco sono tali da permettere, con buona approssimazione, l'utilizzo delle formule non relativistiche; le energie cinetiche del nucleo figlio e della particella α sono quindi

$$E_{k,Y} = \frac{1}{2} M_Y v_Y^2 \quad , \quad E_{k,\alpha} = \frac{1}{2} M_\alpha v_\alpha^2 \quad (5.9)$$

con \vec{v}_Y e \vec{v}_α le velocità del nucleo figlio e della particella α . Avendo supposto il nucleo genitore a riposo, la conservazione dell'impulso implica che nucleo figlio e particella α si muovano con impulsi opposti

$$M_Y \vec{v}_Y = -M_\alpha \vec{v}_\alpha \quad \text{da cui,} \quad v_Y = \frac{M_\alpha}{M_Y} v_\alpha \quad (5.10)$$

e quindi:

$$\begin{aligned} E_{k,Y} + E_{k,\alpha} &= \frac{1}{2} M_Y v_Y^2 + \frac{1}{2} M_\alpha v_\alpha^2 = \frac{1}{2} M_Y \left(\frac{M_\alpha}{M_Y} v_\alpha \right)^2 + \frac{1}{2} M_\alpha v_\alpha^2 = \\ &= \frac{1}{2} M_\alpha v_\alpha^2 \left(\frac{M_\alpha}{M_Y} + 1 \right) \end{aligned}$$

$$\text{da cui,} \quad E_{k,Y} + E_{k,\alpha} = E_{k,\alpha} \left(\frac{M_\alpha}{M_Y} + 1 \right) = Q_\alpha \quad (5.11)$$

e ancora

$$E_{k,\alpha} = \frac{M_Y}{M_\alpha + M_Y} Q_\alpha \quad \text{ed} \quad E_{k,Y} = \frac{M_\alpha}{M_Y} E_{k,\alpha} \quad (5.12)$$

Non potendo essere negativa l'energia cinetica della particella α emessa nel decadimento, ne deriva come prevedibile che questo, per aver luogo, deve necessariamente essere un processo esotermico, ovvero

$$\Delta M \geq 0 \quad \text{e} \quad Q_\alpha \geq 0 \quad (5.13)$$

Nel caso di nuclei pesanti, con $A \gg 1$, la gran parte dell'energia liberata dal decadimento diventa energia cinetica della particella α . Dalla seconda delle [5.12](#) si ha infatti in questo caso

$$E_{k,Y} = \frac{M_\alpha}{M_Y} E_{k,\alpha} \ll E_{k,\alpha} \quad (5.14)$$

Ponendo $(M_\alpha/M_Y) \simeq 4/(A-4)$ si ha

$$E_{k,\alpha} \approx \frac{A-4}{A} Q_\alpha \quad , \quad E_{k,Y} \approx \frac{4}{A} Q_\alpha \quad (5.15)$$

che permettono una rapida stima dell'energia rilasciata nel decadimento, nota che sia Q_α . Nel seguito si ometterà per semplicità il pedice α .

Trattandosi di un decadimento in due corpi osservato nel sistema del centro di massa del nucleo genitore, l'energia cinetica espressa dalla prima delle [5.12](#) e il modulo della velocità della particella α emessa nel decadimento, dovrebbero assumere entrambi un unico valore.

Accurate misure in proposito hanno tuttavia evidenziato una struttura fine negli spettri energetici delle particelle α emesse da materiali radioattivi per diversi possibili Q -valori. Le particelle α più energetiche sono prodotte da sole, mentre quelle meno energetiche sono sempre accompagnate dalla concomitante emissione di fotoni. Questo concorre a suggerire la presenza nei nuclei di livelli energetici e di una sottostante struttura di stati discreti. In tal caso quindi un nucleo genitore, decadendo α , può trasformarsi nello stato fondamentale di un nucleo figlio emettendo una particella α di energia corrispondente all'intero Q -valore disponibile, o può prima decadere in uno stato eccitato ${}_{Z-2}^{A-4}Y^*$ del nucleo figlio emettendo una particella α di energia inferiore all'intero Q -valore. Il nucleo figlio eccitato risultante potrà

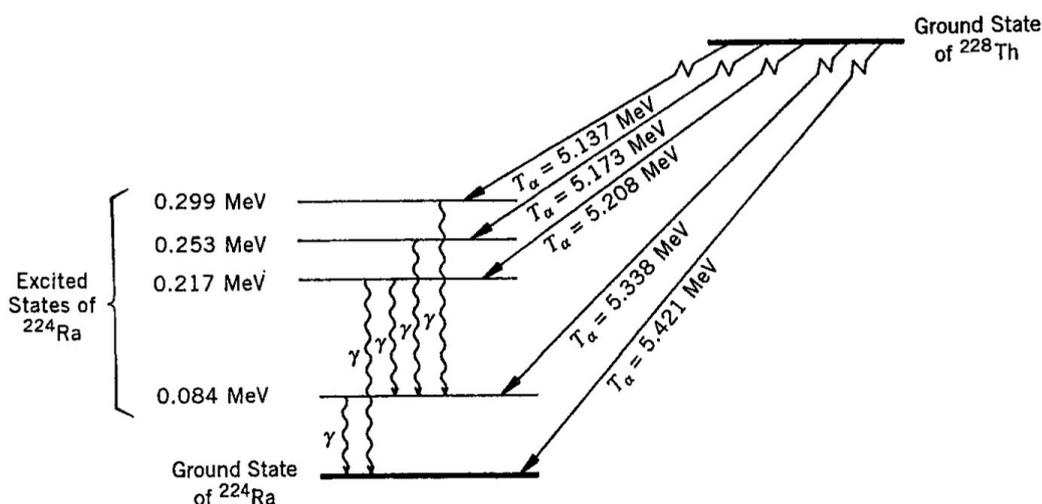
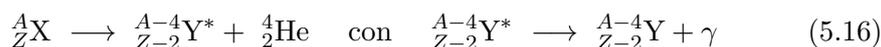


Figura 5.2: Struttura dello spettro di emissione α del torio ${}^{228}\text{Th}$.

quindi decadere al proprio livello fondamentale emettendo fotoni γ , come ad esempio nel caso del torio ${}^{228}\text{Th}$ che decade α nel radio ${}^{224}\text{Ra}$, illustrato nelle figure [5.2](#) e [5.3](#).



Questo tipo di processo avviene raramente nei nuclei pari-pari, dato il loro ridotto Q -valore. Nei nuclei pari-dispari e dispari-dispari invece, è meno probabile che il nucleone spaiato prenda parte al processo di formazione della particella α , per cui ha una maggior probabilità di trovarsi in un livello eccitato del nucleo figlio Y, dopo il decadimento α .

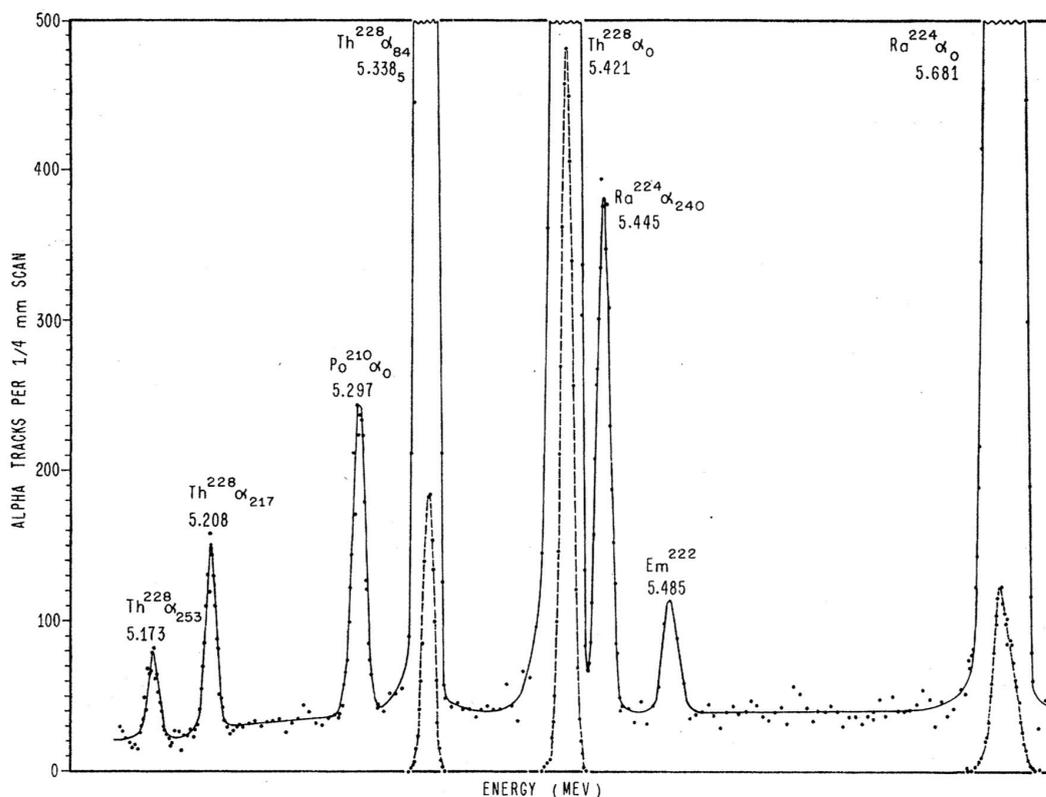


Figura 5.3: Spettro α del torio ^{228}Th [Asaro & al., Phys. Rev. 92 (1953) 1495]. L'area di ogni picco è proporzionale al rateo di decadimento per l'energia ad esso associata.

La struttura fine dello spettro può essere determinata dalla misura delle energie cinetiche delle diverse particelle α osservate in un particolare decadimento, confrontata con il corrispondente Q -valore disponibile.

$$Q_\alpha \approx E_{k,\alpha} + E_\gamma \quad (5.17)$$

La misura diretta delle energie dei fotoni γ associati conferma quindi l'esistenza nel nucleo di una struttura a stati energetici discreti.

Talvolta si osserva l'emissione di particelle α con energie maggiori di quelle corrispondenti alla transizione tra i due livelli fondamentali dei nuclei genitore e figlio, ed è dovuta a decadimenti che avvengono a partire da livelli eccitati del nucleo genitore.

L'analisi sistematica dei risultati sperimentali provenienti da decadimenti α mostra che la vita media $\tau_\alpha = 1/\lambda_\alpha$ dei nuclei α -instabili varia su un'intervallo amplissimo di valori, da un massimo di circa 10^{10} anni fino a circa 10^{-7} secondi, per oltre 24 ordini di grandezza; le corrispondenti energie E_α delle particelle emesse variano da alcuni MeV fino a circa 10 MeV. I nuclidi

a vita media più breve emettono particelle α più energetiche, e viceversa. Sempre dai dati sperimentali si deduce che la probabilità di decadimento α

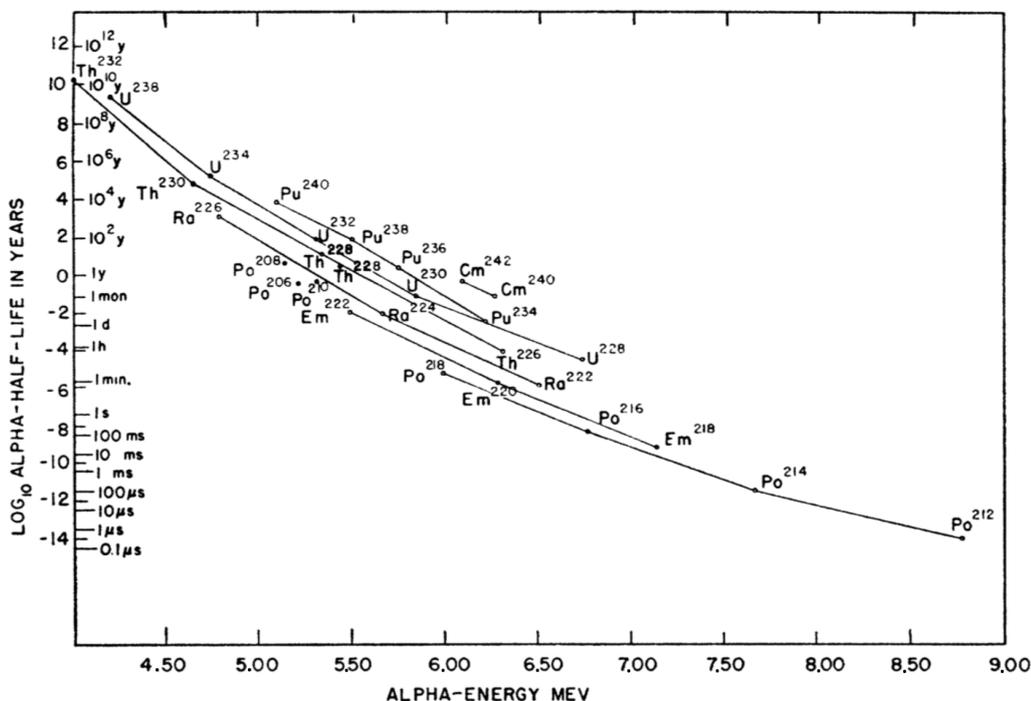


Figura 5.4: Vita media verso l'energia per α emesse da nuclei pari-pari [I.Permann, A.Ghiorso, G.T.Seaborg, Phys. Rev. 75 (1949) 1096].

del nucleo genitore è una funzione rapidamente crescente dell'energia $E_{k,\alpha}$, ovvero di Q_α , e dunque la riga più intensa dello spettro è quella dal livello fondamentale del nucleo genitore al livello fondamentale del nucleo figlio. Per riorganizzare la comprensione di questi dati sperimentali e prima della formulazione di una teoria da parte di Gamow et al., Geiger e Nuttall suggerirono, nel 1911^[1] una relazione empirica che collega la probabilità di decadimento λ_α e l'energia totale, ovvero il Q -valore a disposizione del decadimento, per ogni catena isotopica

$$\log \lambda_\alpha = A(Z) Q_\alpha^{-1/2} + B(Z) \quad (5.18)$$

con $A(Z)$ e $B(Z)$ coefficienti che vanno determinati tramite fit sui dati sperimentali.

Prendendo l'esponente ad ogni membro della [5.18](#) si può anche scrivere

$$\lambda_\alpha(Q_\alpha) \propto e^{D(Z) Q_\alpha^{-1/2}} \quad (5.19)$$

¹H.Geiger, J.M.Nuttall, "The ranges of the α particles from various radioactive substances and a relation between range and period of transformation" - Philos. Mag. 22 (1911) 613-621

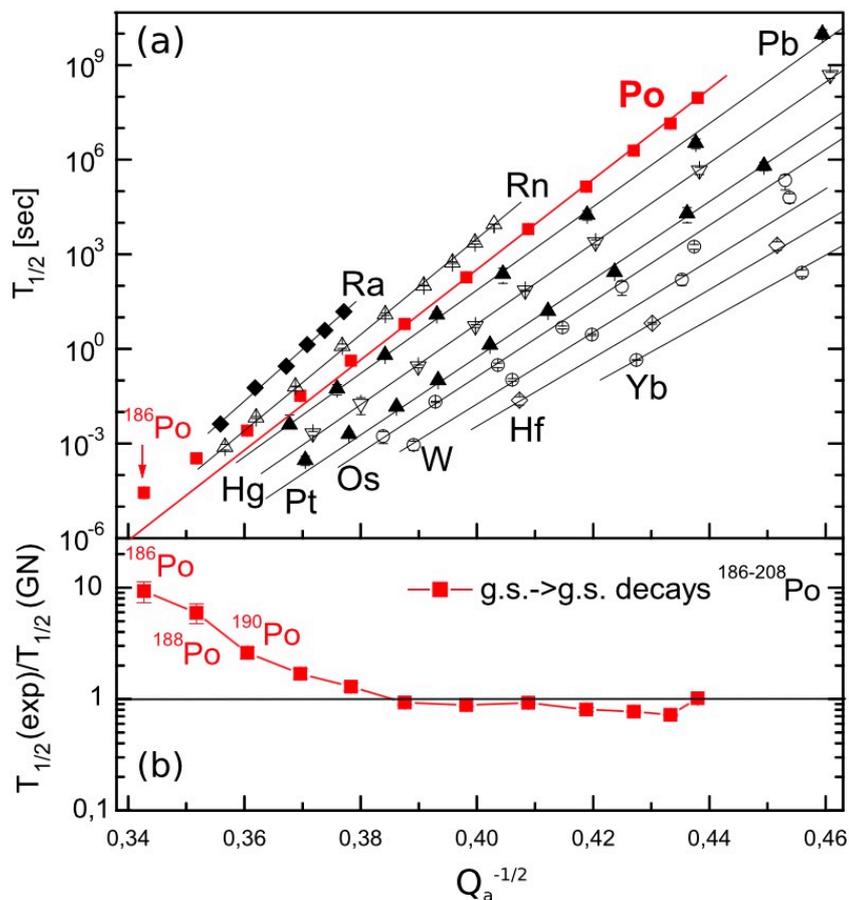


Figura 5.5: Dipendenza del tempo di dimezzamento $T_{1/2}$ dall'inverso della radice quadrata del Q -valore, per i decadimenti α di alcune catene isotopiche. Sono sovrapposte le previsioni secondo Geiger-Nuttal ed è in evidenza il comportamento del Po. (Andreyev et al., Phys. Lett. B 734 (2014) 203)

La relazione di Geiger e Nuttall descrive abbastanza bene i dati finché la dipendenza di $\log \lambda_\alpha$ dal numero di neutroni si mantiene lineare.

Un risultato che senz'altro una teoria del decadimento alfa deve riprodurre, e la teoria di Gamow et al. entro opportune approssimazioni lo fa, è riottenere la relazione di Geiger e Nuttall ².

In figura 5.5 è illustrato uno studio recente in cui, con la relazione di Geiger e Nuttall, si descrive la dipendenza da $Q_\alpha^{-1/2}$ dei tempi di dimezzamento ³ per decadimento α di un certo numero di catene isotopiche, evidenziando i problemi che insorgono nel caso degli isotopi leggeri del polonio "Po".

²Si veda l'Appendice C

³Il legame fra tempo di dimezzamento $T_{1/2}$ e vita media τ è dato nel paragrafo 4.1

5.2.1 Soglia di instabilità

Si vuole ora individuare per quali valori di A e Z il decadimento α sia energeticamente possibile, tenendo conto del fatto che in ogni decadimento una parte dell'energia di massa del genitore è convertita in energia cinetica dei prodotti del decadimento.

Dato che la massa di un nucleo equivale alla somma delle masse dei nucleoni costituenti meno l'energia totale di legame divisa per c^2 , e dato che nel decadimento α i nucleoni non cambiano natura, si ha che il decadimento può aver luogo soltanto se accompagnato da un aumento dell'energia di legame per nucleone nei prodotti finali, rispetto al nucleo genitore.

Analizzando l'andamento dell'energia media di legame per nucleone $\langle B \rangle \equiv |B/A|$ in funzione di A , come mostrata in figura 2.5, ed essendo il ^{56}Fe il nuclide più stabile, ciò è possibile soltanto nella regione dove $\partial\langle B \rangle/\partial A < 0$ e contemporaneamente $A > 60$.

Il Q -valore del decadimento α espresso dalla 5.8 può essere scritto in termini delle energie medie di legame per nucleone $\langle B \rangle_{X,Y,\alpha}$ dei nuclei coinvolti

$$\begin{aligned} Q &\equiv [M(A, Z) - M(A - 4, Z - 2) - M_\alpha] c^2 = \\ &= A(\langle B_Y \rangle - \langle B_X \rangle) - 4(\langle B_Y \rangle - \langle B_\alpha \rangle) > 0 \end{aligned} \quad (5.20)$$

Essendo $\langle B_\alpha \rangle \simeq 7.1$ MeV l'energia media di legame di un nucleone nella particella α , quindi minore di quelle per i nuclei pesanti coinvolti nel decadimento, ne segue che il secondo termine della 5.20 è positivo, da cui si ha che la soglia di instabilità deve essere decisamente superiore ad $A = 60$.

Utilizzando la formula di Weizsäcker 12.1.2 a meno del termine d'accoppiamento, ponendo $Z(Z - 1) \simeq Z^2$, e sviluppando in serie troncando al primo membro, il calcolo del Q -valore dà

$$\begin{aligned} Q &= 4\langle B \rangle_\alpha - [A\langle B \rangle_X - (A - 4)\langle B \rangle_Y] = B_\alpha - (B_X - B_Y) \simeq \\ &\simeq B_\alpha + 4b_V + 4 \left[\frac{2}{3}b_S + b_C Z \left(1 - \frac{Z}{3A} \right) \right] A^{-1/3} - 4b_{sim} \left(1 - \frac{2Z}{A} \right)^2 \end{aligned} \quad (5.21)$$

Sostituendo ora i valori dei parametri b_k come riportati in 12.1.2, si ottengono nel piano (Z, A) , le linee per

$$Q = \text{costante}$$

(figura 5.6) che individuano le *soglie di instabilità* del decadimento per emissione di particelle α con energia cinetica $E_k, \simeq Q$. Si noti che si ottiene:

$$\begin{aligned} Q = 0 \text{ MeV} &\rightarrow A \approx 140 \\ Q = 4 \text{ MeV} &\rightarrow A \approx 200 \\ Q = 8 \text{ MeV} &\rightarrow A \approx 240 \end{aligned}$$

Il decadimento α per nuclei con $140 < A < 200$ è sì possibile, ma date le lunghissime vite medie che lo caratterizzano, risulta praticamente inosservabile; si può quindi affermare che i nuclei con $A < 200$ sono essenzialmente stabili rispetto all'emissione α .

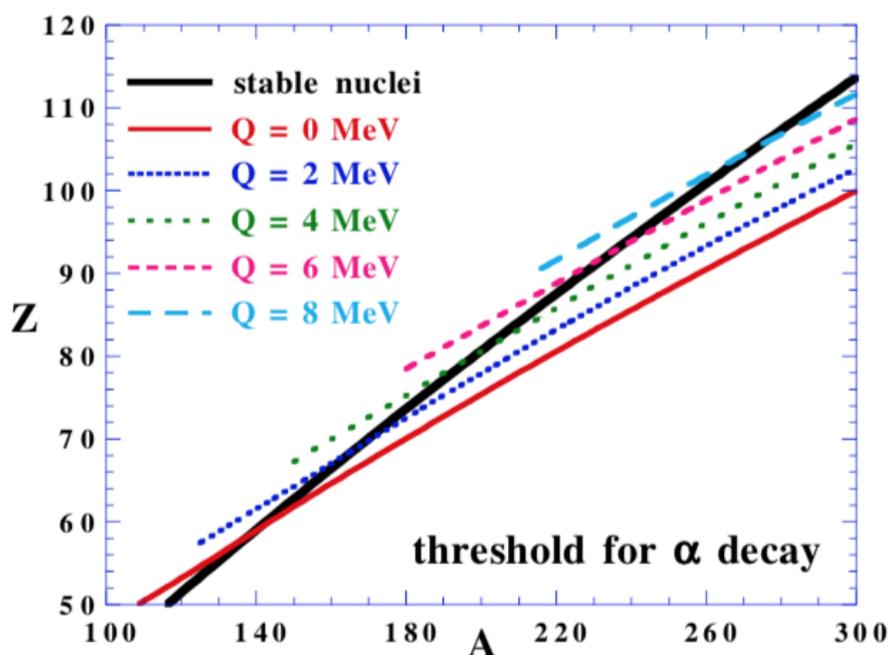


Figura 5.6: Linee di instabilità per il decadimento α .

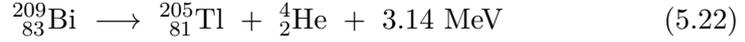
5.2.2 Teoria del decadimento α

La teoria proposta nel 1928 da Gamow, e indipendentemente da Gurney e Condon per spiegare il decadimento α , pur fornendo una descrizione quantitativa e predittiva del fenomeno è però basata su un approccio che si avvale di assunzioni e descrizioni fisiche approssimate. Se ne riportano qui le linee generali, mettendo in evidenza i risultati e la capacità di riprodurre la legge di Geiger-Nuttal, ma lasciando il calcolo di un caso semplificato all'Appendice [C](#).

Le particelle α emesse dai nuclei non esistono come tali nei nuclei prima del decadimento, ma si formano durante questo processo. Gamow formulò però la sua teoria ammettendo l'ipotesi base che almeno a sufficiente distanza dal centro di massa del sistema, il nucleo genitore possa essere descritto come un sistema costituito da "particella α + nucleo figlio", in cui si assume quindi che la particella α possieda una propria identità strutturale e si muova all'interno di una buca di potenziale.

L'energia potenziale del sistema nella sua interezza può allora essere rappresentata come l'energia del sistema "particella α + nucleo figlio" considerati come due sottosistemi nucleari separati.

Ci si riferisca ad esempio al decadimento



energeticamente possibile ma che non viene in pratica osservato, data la sua lunghissima vita media pari a 1.9×10^{19} anni. In figura 5.7 è mostrata

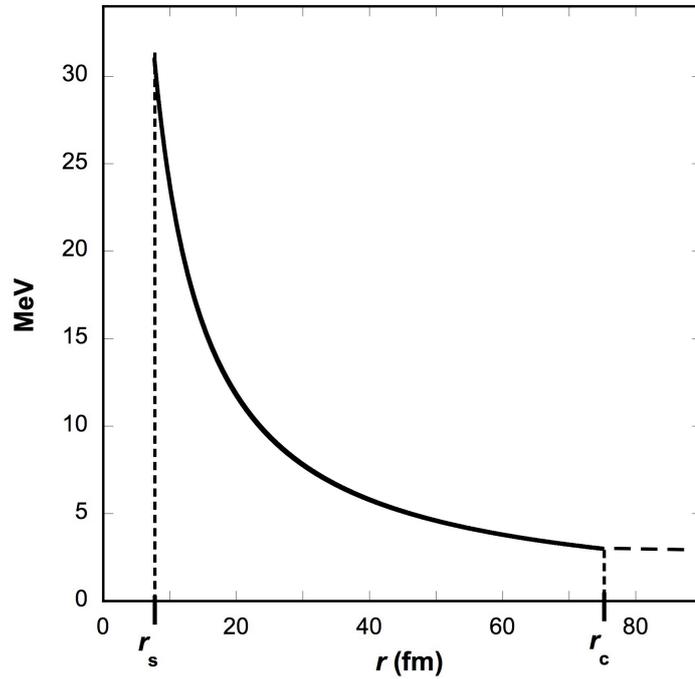


Figura 5.7: Energia potenziale elettrostatica di una particella α rispetto a un nucleo di ${}^{205}_{81}\text{Tl}$.

l'energia potenziale elettrostatica $V(r) \propto 2Ze^2/r$ della particella α a una distanza r da un nucleo di tallio. È indicata anche la distanza r_s alla quale l'interazione nucleare comincia a diventare predominante. Immaginando i due nuclei come due sfere rigide di raggi dati dalla formula $R_A = R_0 A^{1/3}$, si può stimare r_s come

$$r_s \simeq R_0 [(A)^{1/3} + (4)^{1/3}] \sim 8.23 \text{ fm} \quad (5.23)$$

È circa a questa distanza, nella regione in prossimità della superficie del nucleo di bismuto (Bi), che si può considerare la particella α come ormai formata.

In figura 5.7 è indicata anche la distanza $r_c \simeq 75$ fm, che classicamente coincide con quella di massimo avvicinamento possibile al nucleo di tallio da parte di una particella α di energia cinetica $E_k = Q_\alpha$, ovvero pari al Q -valore del decadimento analizzato, per cui

$$r_c = \frac{2Z_{Tl} e^2}{4\pi\epsilon_0 Q_\alpha} = \frac{Z_{Tl} e^2}{2\pi\epsilon_0 Q_\alpha} \quad (5.24)$$

Il parametro r_c viene anche detto *raggio esterno della barriera*.

Per quanto concerne il potenziale totale sentito dalla particella α , all'esterno del nucleo si può assumere che coincida con quello coulombiano repulsivo che tende a 0 per $r \rightarrow \infty$.

All'interno del nucleo, per distanze inferiori ad r_s , la particella sentirà il potenziale attrattivo delle forze nucleari ma fino a un valore di $r \approx \delta < r_s$, al di sotto del quale perde significato l'ipotesi di immaginare la particella α come una struttura dotata di una propria individualità entro il nucleo genitore.

Il potenziale globale potrà quindi essere descritto da un andamento come quello in figura 5.8, dove appare in grigio la zona in cui non ha più senso descrivere il fenomeno in termini di potenziale. Si modella quindi il processo di decadimento immaginando che la particella α si trovi entro la buca di potenziale descritta e che per uscirne deva, avendo come energia a disposizione i 3.14 MeV del Q -valore, affrontare e "superare" la notevole barriera di potenziale coulombiano presente che alla distanza $r = r_s$ vale, per il bismuto, circa 28.4 MeV.

Ciò è impossibile dal punto di vista classico, ma possibile ricorrendo all'effetto tunnel quantistico. Si immagina quindi che la particella α si muova all'interno della buca di potenziale descritta e che per la gran parte del tempo venga riflessa dalle sue pareti che solo talvolta riesce ad attraversare per effetto tunnel.

La probabilità del decadimento può quindi essere espressa come il prodotto di due fattori in prima approssimazione indipendenti:

- la *frequenza* con la quale si può avere una particella α con la propria individualità all'interno del nucleo;
- la *probabilità* che la particella α superi la barriera di potenziale.

Si è in grado di dire qualcosa sul secondo fattore, la probabilità di superamento della barriera, il cui calcolo è svolto in modo approssimato nell'Appendice C per l'esempio del decadimento α del bismuto qui considerato. Tale fattore è responsabile di quanto descritto dalla relazione di Geiger e Nuttal.

Dal calcolo si ottiene infatti, per la vita media e la probabilità di decadimento associata:

$$\tau_\alpha = \tau_0 e^G \quad \text{e,} \quad \lambda_\alpha = \frac{1}{\tau_0} e^{-G} = \lambda_0 e^{-G} \quad (5.25)$$

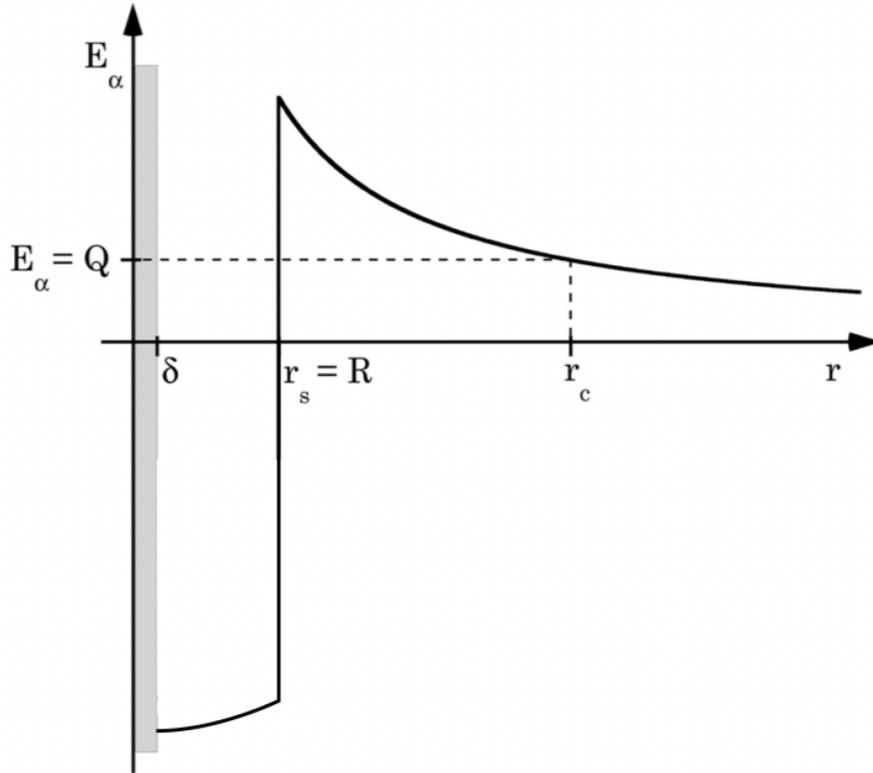


Figura 5.8: Approssimazione schematica dell'andamento del potenziale sentito da una particella α in prossimità di un nucleo.

dove G , detto fattore di Gamow vale

$$G = \int_R^{R'} \frac{[2m_\alpha (V(r) - E_0)]^{1/2}}{\hbar} dr \quad (5.26)$$

con R il raggio del nucleo genitore, R' la distanza alla quale la particella α sfugge, m_α la sua massa, $V(r) = 2(Z-2)e^2/4\pi\epsilon_0 r$ il potenziale coulombiano ed E_0 l'energia liberata durante il decadimento.

Per energie non troppo alte G diventa

$$G \simeq \frac{Ze^2}{2\epsilon_0 \hbar c \beta_\alpha} \sim (E_{k,\alpha})^{-1/2} \quad \text{con,} \quad \beta_\alpha = \frac{v_\alpha}{c} \quad (5.27)$$

essendo v_α la velocità della particella α fuori dalla barriera di potenziale, e τ_0 una funzione lentamente variabile, approssimabile ad una costante indipendente dal particolare nucleo considerato.

La grande estensione di possibili vite medie per decadimenti α è quindi spiegata dalla presenza nell'esponente del fattore di Gamow che fa sì che piccole variazioni nell'energia delle particelle α emesse determinino grandi effetti

sulle probabilità d'emissione e quindi sulle vite medie.

Assumendo ragionevolmente $\tau_0 = 7.0 \cdot 10^{-23}$ s, si possono ad esempio calcolare i valori di τ_α riportati in tabella per alcune sequenze isotopiche, dove sono confrontati con i valori sperimentali corrispondenti.

	Q_α (MeV)	r_s (fm)	r_c (fm)	G	τ_{exp} (s)	τ_{th} (s)
${}^{238}_{92}\text{U} \rightarrow {}^{234}_{90}\text{Th}$	4.27	8.52	60.7	0.53	2.0×10^{17}	3.3×10^{17}
						(${}^{234}_{90}\text{Th} \rightarrow {}^{234}_{91}\text{Pa} \rightarrow {}^{234}_{92}\text{U}$)
${}^{234}_{92}\text{U} \rightarrow {}^{230}_{90}\text{Th}$	4.86	8.49	53.3	0.51	1.1×10^{13}	1.1×10^{13}
${}^{230}_{90}\text{U} \rightarrow {}^{226}_{88}\text{Ra}$	4.77	8.45	53.1	0.51	3.5×10^{12}	3.9×10^{12}
${}^{226}_{88}\text{Ra} \rightarrow {}^{222}_{86}\text{Rn}$	4.87	8.41	50.9	0.50	7.4×10^{10}	7.4×10^{10}
${}^{222}_{86}\text{Rn} \rightarrow {}^{218}_{84}\text{Po}$	5.59	8.37	43.3	0.46	4.8×10^5	4.2×10^5
${}^{218}_{84}\text{Po} \rightarrow {}^{214}_{82}\text{Pb}$	6.11	8.33	38.7	0.43	2.6×10^2	1.6×10^2
						(${}^{214}_{82}\text{Pb} \rightarrow {}^{214}_{83}\text{Bi} \rightarrow {}^{214}_{84}\text{Po}$)
${}^{214}_{84}\text{Po} \rightarrow {}^{210}_{82}\text{Pb}$	7.84	8.28	30.1	0.36	2.3×10^{-4}	1.1×10^{-4}
						(${}^{210}_{82}\text{Pb} \rightarrow {}^{210}_{83}\text{Bi} \rightarrow {}^{210}_{84}\text{Po}$)
${}^{210}_{84}\text{Po} \rightarrow {}^{206}_{82}\text{Th}$	5.41	8.24	43.7	0.47	1.7×10^7	5.8×10^5

È straordinario l'accordo fra i valori previsti da questa teoria e i risultati sperimentali, ricordando che coprono scale temporali che vanno dall'età della Terra, circa 1.45×10^{17} s, fino a tempi dell'ordine di 10^{-4} s.

La discrepanza maggiore si ha nel caso del ${}^{210}_{84}\text{Po}$, che avendo un numero di neutroni magico (126) corrisponde a una shell chiusa.

Da quanto riportato in tabella si nota anche che un nucleo figlio di un decadimento α può essere β -instabile.

5.3 Approccio perturbativo ai decadimenti

Il decadimento α è dovuto all'effetto tunnel attraverso la barriera coulombiana del nucleo e alle forze nucleari che permettono l'aggregazione stabile, entro la materia nucleare e per un sufficiente lasso di tempo, dei nucleoni che costituiscono una particella α . Gli altri tipi di decadimenti nucleari possono invece essere visti come l'effetto di perturbazioni agenti sugli stati in cui si trovano le strutture che poi decadono, e se tali perturbazioni sono abbastanza piccole rispetto alle energie che caratterizzano gli stati di partenza, allora se ne può dare una trattazione abbastanza generale.

La soluzione dell'equazione di Schrödinger produce, per un sistema fisico sottoposto a potenziali indipendenti dal tempo, livelli energetici corrispondenti a *stati stazionari*.

Inoltre un sistema fisico quantistico in uno stato stazionario, permane indefinitamente in quello stato e non effettua transizioni (decadimenti) verso altri stati, a meno che non venga opportunamente perturbato.

La possibilità che un sistema fisico quantistico sia trovato talvolta in uno stato e talvolta in un altro è descrivibile costruendo un'opportuna miscela di due o più stati, come ad esempio con la funzione d'onda $\psi = c_1\psi_1 + c_2\psi_2$, dalla quale discendono la probabilità $|c_1|^2$ che il sistema sia trovato nello stato 1 e la probabilità $|c_2|^2$ che sia trovato nello stato 2. Per potenziali indipendenti dal tempo anche c_1 e c_2 risultano indipendenti dal tempo, ma ciò non corrisponde ai risultati sperimentali che vengono dallo studio dei decadimenti, per i quali la probabilità di trovare un sistema in uno specifico stato dipende dal tempo.

Per affrontare il problema inerente ai decadimenti si adotta l'approccio secondo cui il potenziale agente ha una forma del tipo $\Phi + \Phi'$, dove Φ è il potenziale nucleare responsabile degli stati stazionari, mentre Φ' è un potenziale additivo e molto debole (perturbativo) che può determinare transizioni fra gli stati.

Trascurando in prima istanza Φ' , si risolve l'equazione di Schrödinger per il potenziale Φ ottenendo le funzioni d'onda *statiche* del nucleo. Si usano quindi quelle funzioni d'onda per calcolare le probabilità di transizione fra *stati stazionari* sotto l'influenza della perturbazione Φ' .

Questa probabilità di transizione corrisponde alla costante λ di decadimento data dalla cosiddetta *seconda regola d'oro* di Fermi⁴

$$\lambda = \frac{2\pi}{\hbar} |\mathcal{M}'_{fi}|^2 \rho(E_f) \quad (5.28)$$

⁴Per la sua derivazione si veda ad esempio E. Gozzi, "Notes on Quantum Mechanics with Examples of Solved Problems" - Cap. 12)

con l'elemento di matrice dell'operatore di transizione \mathcal{M}' espresso da

$$\mathcal{M}'_{fi} = \langle \psi_f | \Phi' | \psi_i \rangle = \int \psi_f^* \Phi' \psi_i dV \quad (5.29)$$

dove l'integrale va esteso a tutto lo spazio.

Note le funzioni d'onda degli stati finale ψ_f e iniziale ψ_i si può dunque calcolare \mathcal{M}'_{fi} , da cui la probabilità di transizione λ , confrontabile con i risultati sperimentali non appena si conosca la densità degli stati finali accessibili dal sistema fisico, $\rho(E_f) = dn_f/dE_f$.

La probabilità di transizione cresce quindi al crescere del numero di stati finali accessibili col decadimento.

Si vedrà nel paragrafo ?? come Fermi abbia brillantemente utilizzato questo approccio per formulare la sua teoria sul decadimento β .

La densità degli stati finali dipende da due contributi, lo stato finale raggiunto dal nucleo dopo il decadimento e la "radiazione" emessa durante il decadimento. Si consideri dapprima lo stato finale del nucleo.

La soluzione dell'equazione di Schrödinger per il potenziale Φ indipendente dal tempo fornisce gli stati stazionari del nucleo $\psi_a(\vec{r})$.

La funzione d'onda dipendente dal tempo per lo stato in questione è

$$\psi_a(\vec{r}, t) = \psi_a(\vec{r}) e^{-iE_a t/\hbar} \quad (5.30)$$

dove E_a rappresenta l'energia dello stato. La probabilità di trovare il sistema in questo stato è $|\psi_a(\vec{r}, t)|^2$, indipendente dal tempo, per uno stato stazionario. Per essere ora consistenti con la legge del decadimento radioattivo, la probabilità di trovare il sistema in decadimento sempre nello stesso stato dovrebbe diminuire col tempo come $e^{-\lambda_a t} = e^{-t/\tau_a}$

$$|\psi_a(\vec{r}, t)|^2 = |\psi_a(\vec{r}, t=0)|^2 e^{-\lambda_a t} = |\psi_a(\vec{r}, t=0)|^2 e^{-t/\tau_a} \quad (5.31)$$

dove $\tau_a = 1/\lambda_a$ è la vita media dello stato caratterizzato dalla costante di decadimento λ_a . Con ciò la [5.30](#) diventa

$$\psi_a(\vec{r}, t) = \psi_a(\vec{r}) e^{-iE_a t/\hbar} e^{-\lambda_a t/2} = \psi_a(\vec{r}) e^{-iE_a t/\hbar} e^{-t/2\tau_a} \quad (5.32)$$

Il prezzo che si paga introducendo il termine esponenziale reale in $\psi_a(\vec{r}, t)$ è la perdita della possibilità di determinare con esattezza l'energia dello stato, ovvero non si ha più uno stato stazionario.

Ricordando la relazione d'indeterminazione energia-tempo, se uno stato visse per sempre, $\Delta t = \infty$ e l'energia ad esso associata potrebbe essere determinata con esattezza, poichè $\Delta E = 0$. Se invece lo stato vive per un tempo τ , non si può determinare l'energia ad esso associata se non con un'incertezza $\Delta E \cong \hbar/\tau$.

Il problema può essere affrontato in modo rigoroso ottenendo la distribuzione dei livelli energetici dalla trasformata di Fourier di $e^{-t/2\tau_a}$ [5](#). Risulta in tal caso che la probabilità di osservare il sistema in un intorno energetico compreso fra E ed $E + dE$, in prossimità del valore energetico E_a , è data da

$$P(E)dE \propto \frac{dE}{(E - E_a)^2 + \Gamma_a^2/4} \quad (5.33)$$

dove $\Gamma_a = \hbar/\tau_a$ è detta *larghezza* dello stato a . In pratica ciò si risolve nel

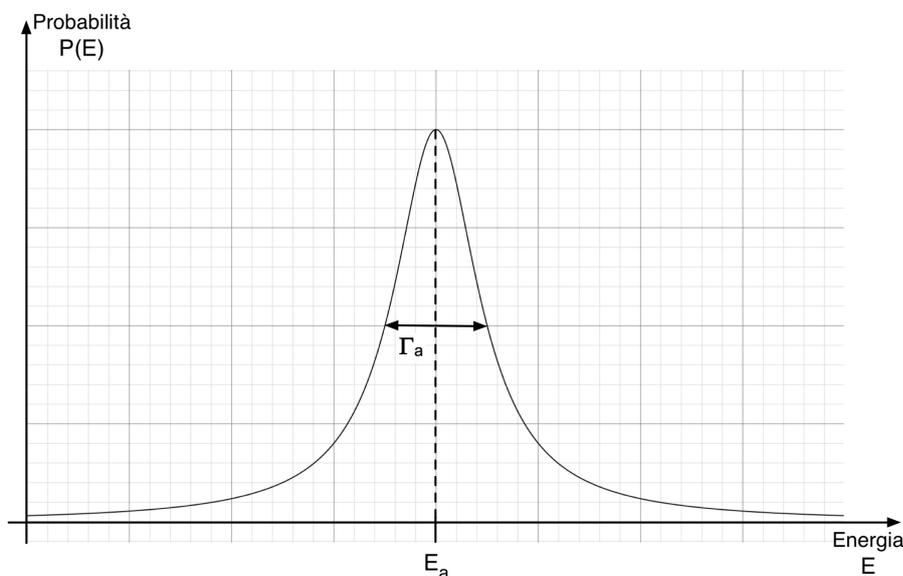


Figura 5.9: Densità di probabilità $P(E)$.

fatto che una qualunque misura dell'energia di un tale stato non è assolutamente detto che fornisca il valore E_a , anche se esso rappresenta il valor medio di più misure effettuate. La larghezza Γ_a quantifica l'impossibilità di determinare con precisione l'energia dello stato a , e ciò è intrinseco nella natura di tale fenomeno, non frutto di limitazioni tecniche nell'effettuazione della misura stessa. Si osservi che geometricamente Γ_a corrisponde alla larghezza a metà altezza della curva che rappresenta $P(E)$, come in figura [5.9](#). $P(E)$ è proporzionale a quella che vien detta detta funzione di distribuzione *Lorentziana* o di Cauchi, o ancora di Breit-Wigner, e si noti che ha la stessa forma analitica della funzione che descrive i fenomeni di risonanza.

Parlare di transizioni fra diversi stati per un sistema, anche se questi non sono caratterizzati da valori esatti e univocamente definiti di energia, è comunque possibile purchè le larghezze di tali stati siano piccole a confronto delle differenze fra i valori medi di energia che caratterizzano ognuno degli

⁵Si veda in Appendice ??

stati stessi.

Gli stati di interesse nucleare sono caratterizzati da vite medie τ tipicamente dell'ordine o superiori a 10^{-12} s, corrispondenti a larghezze $\Gamma < 10^{-10}$ MeV. Gli stati nucleari a breve vita media che vengono popolati durante gli ordinari processi di decadimento, e anche in molte reazioni nucleari, hanno separazioni energetiche dell'ordine di 10^{-3} MeV o superiori. È dunque molto improbabile che determinando l'energia di uno stato nucleare finale raggiunto dopo un processo di decadimento tramite ad esempio la misura dell'energia delle radiazioni emesse, la sovrapposizione energetica fra le distribuzioni di due diversi stati finali a e b possa generare confusione nel riconoscere lo stato finale effettivamente raggiunto come risultato del decadimento.

È in tal caso ragionevole parlare di stati discreti *pseudo-stazionari* e con-

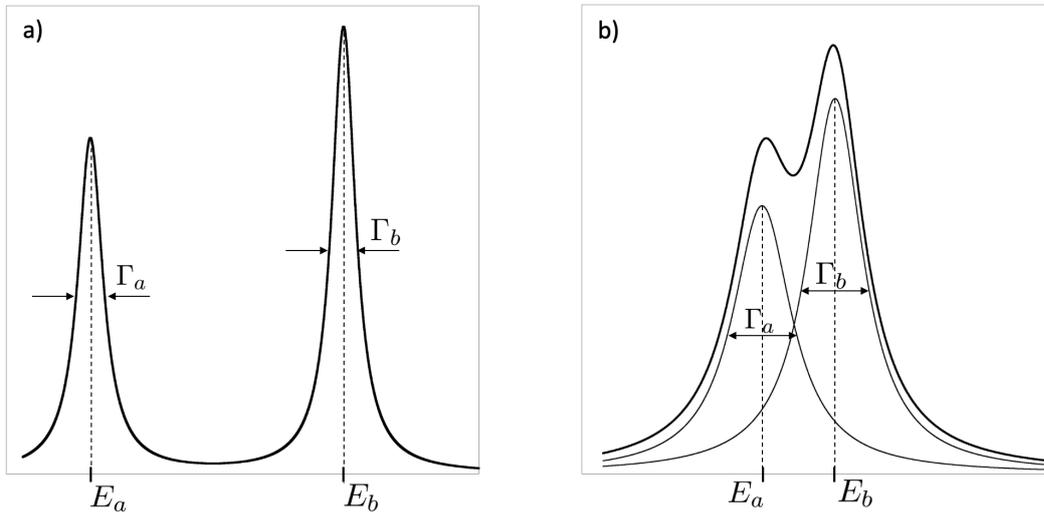


Figura 5.10: Se le larghezze di due stati instabili sono piccole rispetto alla loro separazione energetica, come in a), i due stati sono ben riconoscibili; se invece i due stati si sovrappongono e si mescolano come in b), allora non posseggono funzioni d'onda ben distinte l'una dall'altra.

cludere che essi non contribuiscono alla densità degli stati finali in quanto uno solo di essi può essere raggiunto in un ben determinato processo di decadimento. In tal caso le "radiazioni" emesse sono le sole a contribuire alla densità $\rho(E_f)$ degli stati.

Senza entrare nello specifico del tipo di decadimento, in generale si vede che considerando soltanto la probabilità di formazione di uno stato nucleare di energia E_f , vanno prese in considerazione tutte le possibili radiazioni di energia $E_i - E_f$.

Tale radiazione può essere emessa in qualsiasi direzione e in qualsiasi stato di polarizzazione, e se consiste di particelle dotate di spin, allora questo può

avere qualsiasi possibile orientazione.

Questo modo di contare gli stati finali accessibili permette di ottenere la densità degli stati.

Quando si affronta l'equazione differenziale per la descrizione del decadimento radioattivo di una sostanza, si suppone implicitamente che la probabilità di decadimento λ sia contemporaneamente piccola e indipendente dal tempo. Se Φ' è indipendente dal tempo, allora il valore di λ calcolato tramite la regola d'oro di Fermi [5.28](#) è anche indipendente dal tempo.

Con queste condizioni l'effetto di Φ' sugli stati stazionari a e b di Φ dá la funzione d'onda perturbata

$$\psi_a \longrightarrow \psi_a + \frac{\Phi'_{ba}}{E_b - E_a} \psi_b \quad (5.34)$$

e il sistema inizialmente nello stato a ha una probabilità proporzionale a $|\Phi'_{ba}|^2$ di trovarsi poi nello stato b . Si considera questo come un *decadimento* dallo stato a allo stato b .

La connessione fra l'effettiva probabilità di decadimento per un sistema costituito da un grande numero di nuclei e quanto sopra descritto per la probabilità (microscopica) di decadimento di un singolo nucleo, implica che ogni nucleo del sistema macroscopico decada emettendo radiazioni in modo assolutamente indipendente da tutti gli altri, compresi quelli a lui spazialmente più vicini. Quest'ipotesi è fondamentale per poter confrontare le costanti di decadimento misurate con quelle calcolate.

Parlando di particelle, solo una piccola parte di esse è stabile: l'elettrone, il protone, i neutrini e il fotone. Le particelle che decadono per effetto delle interazioni deboli, come si vedrà, sopravvivono abbastanza da poter percorrere, dopo essere state prodotte e con le energie cinetiche tipiche che le caratterizzano, tragitti sufficientemente lunghi (da significative frazioni del millimetro sino ad alcuni metri) da permetterne la misura del cosiddetto *tempo di volo*, o il tracciamento; le risonanze adroniche che invece decadono per effetto delle interazioni forti, hanno vite medie così brevi che anche se prodotte con notevoli energie cinetiche, non sono in grado di percorrere tragitti sufficienti a permetterne il tracciamento prima che decadano.

I concetti introdotti trovano ampio utilizzo in svariati ambiti della fisica e nel seguito, oltre che per i già citati fenomeni di decadimento, li si ritroverà in particolare a proposito della descrizione di sezioni d'urto e dell'individuazione di particelle fra i prodotti di reazioni.

5.4 Radioattività β

I meccanismi che coinvolgono elettroni e nucleo di uno stesso atomo sono svariati e qui si accenna dapprima alla *conversione interna*, per poi soffermarsi più ampiamente sul *decadimento β* .

5.4.1 Conversione interna

In un atomo la sovrapposizione spaziale tra la funzione d'onda di un suo elettrone, particolarmente uno di quelli delle shell più interne, e quella del nucleo non è e mai nulla, c'è quindi una probabilità finita che un elettrone si trovi talvolta dentro il nucleo del proprio atomo. Quando questo si verifica l'elettrone ha la possibilità di accoppiarsi elettromagneticamente ad uno stato energetico eccitato del nucleo acquisendone direttamente l'energia associata, ovvero senza la preventiva produzione di un raggio γ . In tal caso l'elettrone viene emesso dall'atomo, non dal nucleo, con un'energia cinetica $E_{k,e}$ pari all'energia di transizione E^* dello stato eccitato del nucleo, equivalente alla differenza, moltiplicata per c^2 , fra la massa del nucleo eccitato e dello stesso non eccitato, meno l'energia atomica B_e di legame dell'elettrone

$$E_{k,e} = E^* - B_e \quad (5.35)$$

Il processo di conversione interna non determina quindi una variazione del numero atomico dell'atomo coinvolto, ma soltanto una sua "ionizzazione". La gran parte degli elettroni emessi per conversione interna provengono dal-

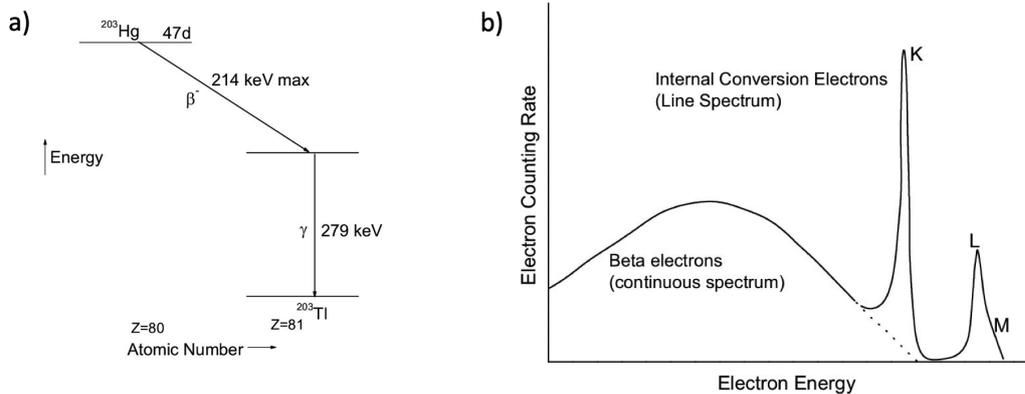


Figura 5.11: In a) lo schema di decadimento β del mercurio ^{203}Hg . In b) lo spettro d'emissione elettronica del ^{203}Hg , dove sono evidenti, oltre alla parte continua tipica dello spettro d'emissione β , anche i picchi dell'emissione atomica per conversione interna dalle shell K, L ed M.

le shell K, le più vicine ai nuclei. Può essere che l'energia d'eccitazione di uno stato nucleare non sia sufficiente ad espellere un elettrone atomico dalla

shell K, ma lo sia per elettroni delle shell L o M di quel nucleo.

Dopo l'emissione dell'elettrone per conversione interna avviene tipicamente che un elettrone di una shell meno legata dello stesso atomo cada a riempire la posizione lasciata libera nella shell più interna, con la concomitante emissione di un raggio X caratteristico del salto energetico effettuato.

In base a quanto descritto si desume che lo spettro d'emissione di elettroni per conversione interna deve essere "discreto" e accompagnato dall'emissione ritardata di raggi X.

5.4.2 Decadimento β

Un nucleo con sovrabbondanza o viceversa con scarsità di neutroni, in cui cioè il rapporto N/Z è maggiore o rispettivamente minore che non per i nuclei stabili, può trasformarsi in un nucleo più stabile emettendo un elettrone o rispettivamente un positrone. Questo processo è chiamato *decadimento β* e viene indicato come in [5.5b](#) e in [5.5c](#), distinguendo in β^- , il primo ad essere osservato sperimentalmente da Rutherford nel 1900, e β^+ a seconda che si tratti dell'emissione di elettroni o positroni. Per la conservazione della carica elettrica in questi casi il numero di protoni del nucleo figlio è o maggiore o rispettivamente minore di un'unità rispetto al nucleo genitore, senza peraltro che ciò conduca a una variazione del numero complessivo di nucleoni, fra genitore e figlio.

In pratica ciò significa che all'interno del nucleo genitore si è avuta o la trasformazione di un neutrone in un protone, nel caso del decadimento β^- , o la trasformazione di un protone in un neutrone, nel caso del decadimento β^+ . Ricordando che i valori delle masse del protone, del neutrone e dell'elettrone (uguale a quella del positrone) sono rispettivamente $938.272 \text{ MeV}/c^2$, $939.565 \text{ MeV}/c^2$ e $0.511 \text{ MeV}/c^2$, si deduce che il decadimento β^- è energeticamente permesso anche per neutroni liberi che hanno una vita media $\tau_n = 881.5 \text{ s}$, mentre invece non lo è il decadimento β^+ per protoni liberi, che infatti risultano stabili con un limite inferiore per la vita media di $2.2 \cdot 10^{29}$ anni. La possibilità di decadimenti β^- e soprattutto β^+ , nei nuclei dipende dalle energie di legame relative degli isobari con diversi valori di Z ed N .

Un nucleo con un numero di neutroni inferiore rispetto a un corrispondente isobaro stabile, ovvero con un eccesso di protoni, può ridurre di un'unità la propria carica anche assorbendo un elettrone da un orbitale atomico del proprio atomo, tipicamente da un orbitale K. Questo processo è appunto detto *cattura K*.

In seguito a questa cattura, un elettrone da un orbitale più esterno casca nell'orbitale dell'elettrone catturato dal nucleo, con la conseguente emissione di uno o più raggi-X. Anche in questo caso il numero di nucleoni del nucleo resta comunque invariato.

Nelle misure sui decadimenti β le uniche particelle che venivano osservate come prodotti di decadimento erano elettroni o positroni assieme al corrispondente nucleo figlio; ciò aveva condotto inizialmente a pensare che si trattasse di un processo di disintegrazione in due corpi, come il decadimento α . In tal caso, applicando qui la corretta forma relativistica della conservazione dell'energia nel sistema del centro di massa del nucleo X genitore, per l'energia totale E_e dell'elettrone si dovrebbe avere, come mostrato nella relazione [5.47](#) del paragrafo [5.6](#)

$$E_e = \frac{M_X^2 c^2 + m_e^2 c^2 - M_Y^2 c^2}{2M_X}$$

e di conseguenza, per l'energia cinetica $E_{k,e}$ dell'elettrone

$$E_{k,e} = \frac{M_X^2 c^2 + m_e^2 c^2 - M_Y^2 c^2}{2M_X} - m_e c^2$$

Ci si attendeva, in base a quest'ipotesi e come nel caso del decadimento α , che il prodotto piú leggero del decadimento, l'elettrone o il positrone, raccolta la gran parte dell'energia a disposizione del decadimento la mostrasse in uno spettro discreto con un unico valore, un picco ben definito centrato attorno ad $E_{k,e}$.

Gli spettri misurati di emissione β hanno invece un andamento continuo, a partire da un valore minimo, compatibile con zero, fino ad annullarsi in corrispondenza ad un valore massimo che entro le precisioni sperimentali, corrisponde ad $E_{max} \cong E_{k,e}$. Quando gli spettri β furono osservati per le prime volte ci fu anche la tentazione di mettere in discussione la validità di un principio che fino ad allora era apparso fermo e incrollabile, ovvero la conservazione dell'energia per un sistema fisico isolato⁶, e un nucleo durante il tempo necessario al suo decadimento β , può senz'altro essere considerato come un sistema fisico perfettamente isolato.

Se inoltre il decadimento β fosse proprio in due soli corpi nello stato finale, ciò implicherebbe che neppure il momento angolare totale del nucleo genitore sarebbe conservato nel decadimento. Siccome infatti il numero di nucleoni, fermioni con spin semi-intero pari ad $\hbar/2$, resta invariato fra nucleo genitore e figlio, indipendentemente da qualsiasi possibile variazione di momento angolare orbitale che deve oltretutto necessariamente essere pari ad un multiplo intero di \hbar , il fatto che nello stato finale ci sia un elettrone, che è anche un fermione con spin pari ad $\hbar/2$, implica che il momento angolare non si conserverebbe se il decadimento β avvenisse secondo le

$$\begin{aligned} \frac{A}{Z}X &\longrightarrow \frac{A}{Z+1}Y + e^- & , & & \frac{A}{Z}X &\longrightarrow \frac{A}{Z-1}Y + e^+ \\ & & & & \frac{A}{Z}X + e_K^- &\longrightarrow \frac{A}{Z-1}Y \end{aligned} \quad (5.36)$$

⁶Niels Bohr fu per un pó uno dei piú ferventi sostenitori di quest'ipotesi!

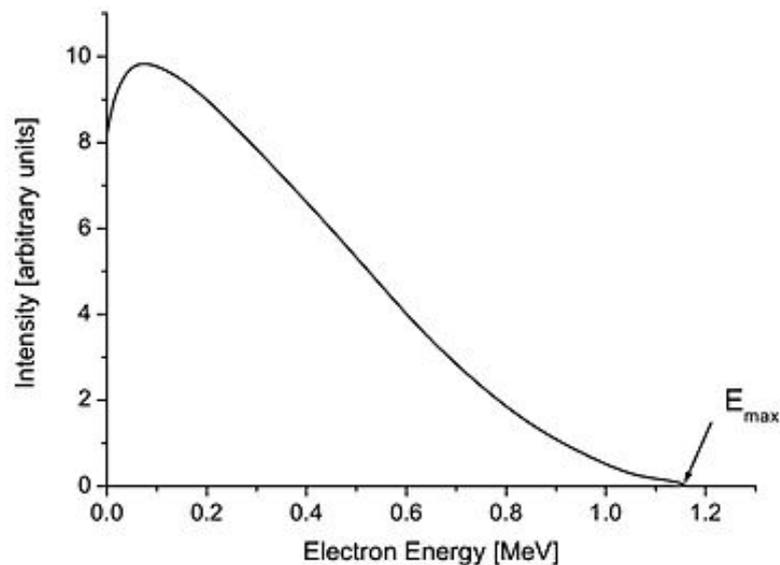


Figura 5.12: Spettro continuo dell'energia degli e^- emessi nel decadimento β^- del bismuto ($^{210}_{83}\text{Bi}$).

Ma tutto questo, in conseguenza di quanto affermato da un noto teorema di Emmy Noether⁷ sul legame esistente fra simmetrie di un sistema fisico e quantità conservate, avrebbe anche implicato che l'universo non è isotropo, e che inoltre ci devono essere un sistema di coordinate assoluto e una scala temporale assoluta, con le ovvie conseguenze

A togliere le castagne dal fuoco che avrebbe potuto bruciare gran parte della fisica esistente venne Wolfgang Pauli, che nel 1930 propose l'esistenza di un'ulteriore particella, di "molto difficile rivelazione"⁸, che nel corso del decadimento β venisse emessa assieme all'elettrone/positrone e al nucleo figlio. Come è mostrato in Appendice^{???}, un decadimento in almeno tre corpi dá ragione dell'andamento continuo degli spettri energetici e non solo.

La conservazione della carica elettrica richiede che la particella proposta da Pauli sia neutra. Siccome inoltre le energie cinetiche massime degli elettroni/positroni emessi nei decadimenti β corrispondono praticamente all'energia che avrebbero se il decadimento fosse in due soli corpi, se ne deduce che la massa di tale particella è molto piccola, sostanzialmente compatibile con

⁷Vedi corso di Introduzione alla Fisica Teorica.

⁸Per avere una prima conferma sperimentale diretta dell'esistenza del neutrino fu infatti necessario attendere ben 26 anni, quando nel 1956 Cowan e Reines riuscirono a rivelare inequivocabilmente antineutrini elettronici provenienti da un reattore nucleare, come descritto nel paragrafo ??.

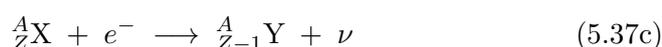
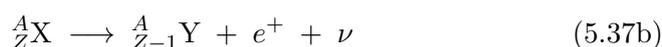
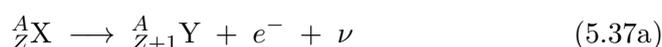
zero.

Uno dei compiti di questa particella era anche di garantire la conservazione del momento angolare nel decadimento β , e da ciò consegue che deve essere un fermione con momento angolare di spin pari ad $\hbar/2$.

Le caratteristiche dedotte per questa particella, a meno della massa, la fanno in un certo qual modo assomigliare a un neutrone, ed è per questo che E. Fermi la chiamò *neutrino*, indicata dalla lettera ν . In capitoli successivi si riprenderà approfondendolo, il filo cronologico dalla formulazione dell'ipotesi dell'esistenza del neutrino, introducendo altre sue interessanti e importanti proprietà, e analizzandone soprattutto la connessione con quanto concerne l'interazione *debole*.

Qui di seguito si vedranno più specificamente alcuni fatti direttamente connessi con la fenomenologia del decadimento β nucleare.

Grazie all'introduzione del neutrino le [5.36](#) si possono intanto più correttamente scrivere come



che però, come si vedrà nel paragrafo ??, non è ancora la forma definitivamente corretta.

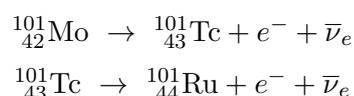
Sperimentalmente si trova che in una sequenza isobarica il nucleo con massa inferiore è stabile rispetto al decadimento β .

Considerando i nuclei con numero di massa A dispari si vedano come esempio gli isobari con $A = 101$. In tal caso l'isobaro di massa minima è il rutenio ${}^{101}_{44}\text{Ru}$, un nuclide pari-dispari che per quanto visto nei paragrafi [2.2](#) e [2.3.8](#), è in corrispondenza al minimo della parabola che descrive la sequenza isobarica. Isobari con più neutroni, quali ${}^{101}_{42}\text{Mo}$ e ${}^{101}_{43}\text{Tc}$, decadono convertendo un neutrone del nucleo in un protone secondo la



Il numero atomico di ogni nucleo figlio è quindi superiore di un'unità a quello del nucleo genitore. Nel resto di questo paragrafo si userà la simbologia completa e corretta per indicare i neutrini (e gli antineutrini) che sono parte dei decadimenti considerati, anche se il senso esatto di ciò apparirà chiaro nel paragrafo ??.

Si ha dunque



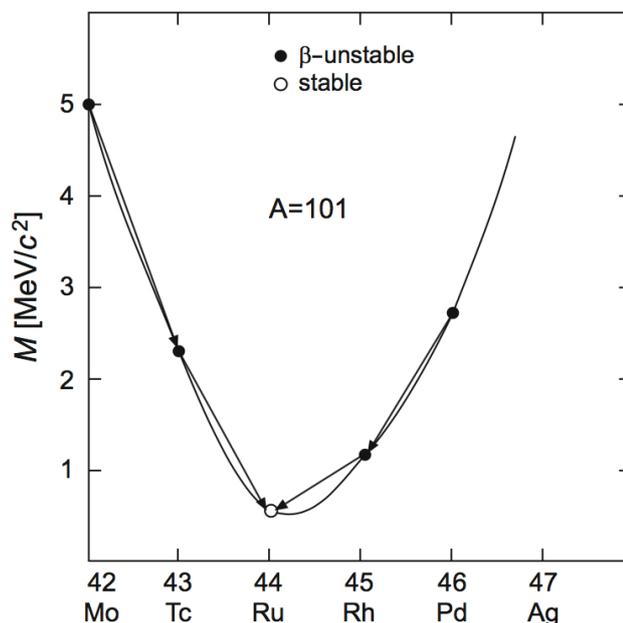
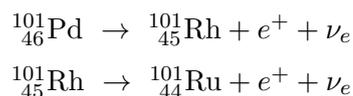


Figura 5.13: Sequenza isobarica del rutenio $^{101}_{44}\text{Ru}$

Gli isobari con un eccesso di protoni rispetto al $^{101}_{44}\text{Ru}$ decadono invece β^+ convertendo un protone interno al nucleo secondo la

$$p \rightarrow n + e^+ + \nu_e \quad (5.39)$$

In tal caso l'isobaro $^{101}_{44}\text{Ru}$ è prodotto dalla sequenza



Si ricordi che il principio di conservazione dell'energia vieta la [5.39](#) al di fuori dei nuclei, mentre invece la [5.38](#) è permessa. Il fatto che la [5.39](#) possa aver luogo all'interno di un nucleo implica che sia energeticamente permessa, ovvero che l'incremento in energia di legame del nucleo figlio derivante dal decadimento sia sufficiente, cioè $\geq (m_n + m_e + m_{\bar{\nu}_e} - m_p) c^2$.

Si considerino ora i nuclei con numero di massa A pari. Sempre per quanto visto nei paragrafi [2.2](#) e [2.3.8](#), in questo caso le sequenze isobariche si dispongono secondo due diversi andamenti parabolici, uno per i nuclei dispari-dispari e uno, separato del doppio dell'energia di accoppiamento $2|B_{ac}(A, Z)|$ nella formula di Weizsäcker, per i nuclei pari-pari.

Capita spesso che soprattutto per valori di $A > 70$ vi sia più di un isobaro β -stabile. Si considerino come esempio gli isobari con $A = 106$.

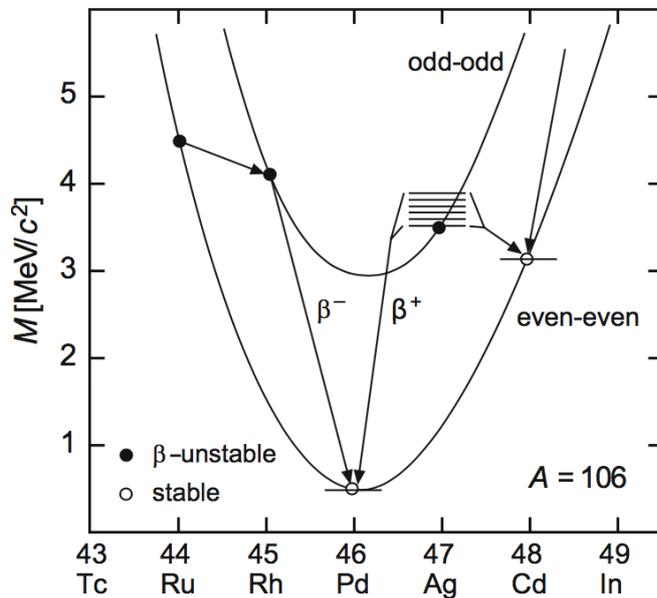
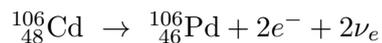


Figura 5.14: Sequenze isobariche del Palladio $^{106}_{46}\text{Pd}$

Gli isobari pari-pari $^{106}_{46}\text{Pd}$ e $^{106}_{48}\text{Cd}$ sono sulla parabola inferiore e $^{106}_{46}\text{Pd}$, il più stabile dei due, si trova in corrispondenza al minimo della parabola pari-pari. Il $^{106}_{48}\text{Cd}$ è β -stabile in quanto i due isobari dispari-dispari a lui più prossimi sono situati a livelli energetici superiori, come mostrato in figura 5.14. Il decadimento del $^{106}_{48}\text{Cd}$ in $^{106}_{46}\text{Pd}$ sarebbe possibile soltanto attraverso un cosiddetto *doppio decadimento β* ⁹



La probabilità di un simile processo è però così piccola che il $^{106}_{48}\text{Cd}$ può essere considerato praticamente stabile.

I nuclei dispari-dispari hanno sempre almeno un nucleo pari-pari loro prossimo più fortemente legato nella sequenza isobarica, e di conseguenza sono instabili. Le sole eccezioni a questa regola sono i nuclei leggeri ^2_1H , ^6_3Li , $^{10}_5\text{B}$ e $^{14}_7\text{N}$ che sono β -stabili in quanto l'aumento dell'energia di asimmetria nella formula di Weizsäcker supera in valore assoluto la diminuzione nell'energia d'accoppiamento.

Vi sono anche nuclei che possono decadere sia β^- che β^+ , come il potassio $^{40}_{19}\text{K}$ e il $^{64}_{29}\text{Cu}$.

Per quanto concerne la cattura elettronica o *cattura K* essa, come per la conversione interna, è dovuta alla probabilità non trascurabile che la funzione d'onda di un tale elettrone si sovrapponga spazialmente e in modo

⁹Del doppio decadimento β si tratterà nel [paragrafo ...](#)

consistente, alla funzione d'onda del nucleo, permettendo che un protone di questo e l'elettrone si combinino per formare un neutrone e un neutrino secondo la



Questa reazione si presenta prevalentemente in nuclei pesanti per i quali il raggio nucleare è maggiore e l'estensione radiale degli orbitali atomici è minore. Solitamente gli elettroni catturati provengono dall'orbitale più interno, K appunto, la cui funzione d'onda ha la massima sovrapposizione spaziale con la zona occupata dal nucleo. Similmente al processo di conversione interna, la cattura di un elettrone dall'orbitale K ingenera la successiva cascata, nella vacanza da lui lasciata, di un altro elettrone dell'atomo proveniente da orbitali più esterni, quindi a energie più elevate, con la conseguente emissione di caratteristici raggi-X.

Questo processo è energeticamente in competizione col decadimento β^+ , come si può vedere ad esempio nel caso del $^{40}_{19}\text{K}$, di cui in figura 5.15 è riportato lo schema dei livelli. Il $^{40}_{19}\text{K}$ è un isotopo naturale con abbondanza

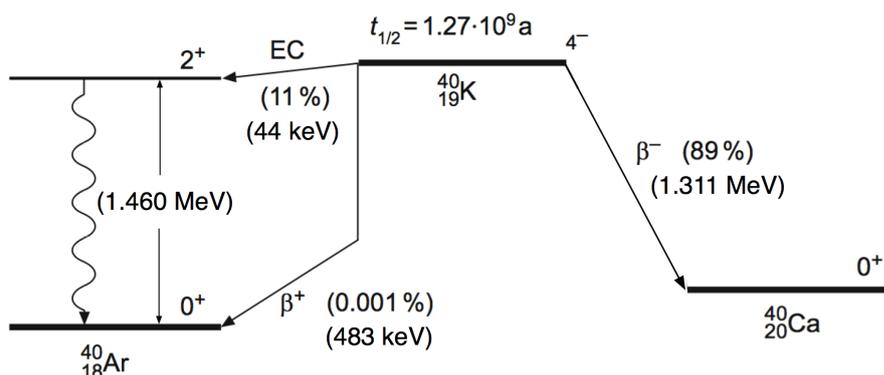


Figura 5.15: Decadimenti β e cattura K del $^{40}_{19}\text{K}$

dello 0.0117 % che può decadere β^- verso il livello fondamentale del $^{40}_{20}\text{Ca}$, con probabilità dell'89.25 % e un Q-valore di 1.311 MeV. Ma esso può anche, con probabilità del 10.55 %, dar luogo a una cattura K con successiva emissione di fotoni da 1.460 MeV verso il livello fondamentale di $^{40}_{18}\text{Ar}$. La residua probabilità di decadimento β^+ , sempre verso $^{40}_{18}\text{Ar}$, è pari a circa 0.001 % e l'energia di 483 keV a disposizione di positrone e neutrino tiene conto della frazione, pari a 1.022 MeV, necessaria a creare la coppia e^+e^- .

Per quanto concerne le vite medie caratteristiche dei decadimenti dei nuclei β -instabili, $\tau_\beta = 1/\lambda_\beta$, i loro valori spaziano fra circa 10^{16} anni e circa 10^{-3} secondi, con la massima energia d'emissione E_0 variabile da alcune frazioni di MeV fino a circa 7 MeV.

La costante di decadimento β va circa come la quinta potenza dell'energia

rilasciata (legge di Sargent)

$$\lambda_\beta = \frac{1}{\tau_\beta} \propto E^5 \quad (5.41)$$

e dipende sia dalle caratteristiche del nucleo genitore che da quelle del nucleo figlio.

Non vi sono casi di due isobari contigui che siano β -stabili, anche se talvolta uno dei due ha vita media così lunga da poter essere a tutti gli effetti considerato stabile. Un ben noto esempio è il ^{40}K che decadendo sia β^- che β^+ , si trasforma in altri isobari per i quali entra in competizione anche la cattura K. I prodotti stabili del decadimento del ^{40}K sono ^{40}Ar e ^{40}Ca , rappresentando un caso di due nuclei stabili con uguale numero di massa A , come si vede in figura [5.15](#).

La scelta del ^{40}K come esempio non è casuale, infatti esso contribuisce considerevolmente all'esposizione radioattiva di tutte le strutture biologiche: il potassio è un elemento essenziale nella trasmissione dei segnali nervosi e la sua concentrazione nel corpo umano è tale da far sì che esso costituisca circa il 16% della radiazione naturale cui siamo mediamente esposti.

I nuclidi β -instabili con emissione di positroni hanno tutti $Z < 80$.

5.4.3 Regole di Sargent

Con l'intento di cercare delle regolarità che permettessero di capire il meccanismo alla base dei decadimenti β , nel 1933 B.W. Sargent pubblicò un lavoro in cui mostrava che graficando il logaritmo della costante di decadimento λ_β verso il logaritmo della massima energia E_{max} degli elettroni emessi da nuclei β -emettitori, la gran parte dei punti trovati cadeva in prossimità di due curve quasi rettilinee, come mostrato in figura [5.16](#).

Il diagramma risultante, detto di Sargent, costituisce una regola empirica del tipo di quella di Geiger-Nuttal per il decadimento α .

In questo caso però le costanti di disintegrazione non cambiano molto velocemente con l'energia e le due curve non corrispondono ognuna a una diversa serie radioattiva. Per un definito valore di E_{max} la curva superiore fornisce un valore di λ_β circa 100 volte superiore a quello corrispondentemente fornito dalla curva inferiore per cui si può dire che fissata un'energia, un decadimento β prossimo alla curva inferiore è circa 100 volte meno probabile di quello corrispondente sulla curva superiore. Ciò ha portato a dire *transizioni permesse* quelle rappresentate dalla curva superiore e *transizioni proibite* quelle rappresentate dalla curva inferiore. Chiaramente i termini "permesse" e "proibite" vanno intesi come diversi valori di probabilità di decadimento spontaneo.

La descrizione della globalità dei dati sperimentali richiede di considerare separatamente curve di Sargent per nuclidi con numeri atomici piccoli, intermedi o grandi. In tutti i casi si ottengono più curve, una delle quali viene

identificata come rappresentante le transizioni permesse e le altre come rappresentanti diversi livelli di transizioni proibite. Una teoria del decadimento

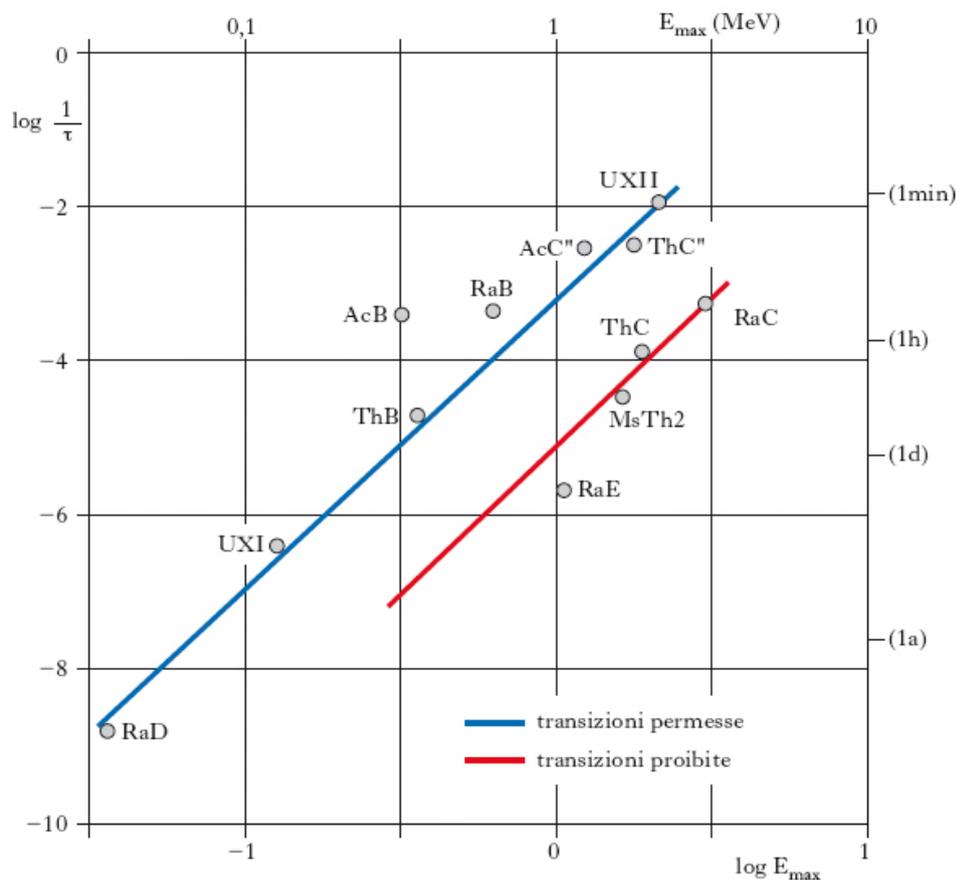


Figura 5.16: Tipico diagramma di Sargent.

β deve naturalmente essere in grado di riprodurre sia queste regolarità nei dati sperimentali che le caratteristiche degli spettri d'emissione β .

5.4.4 Teoria di Fermi dell'interazione debole

Le vite medie misurate τ_β associate ai decadimenti β sono molto maggiori dei tempi caratteristici coinvolti nelle interazioni nucleari ed elettromagnetiche: infatti la scala temporale tipica dei processi governati dall'interazione forte è dell'ordine dei 10^{-23} s o inferiore, mentre quella dei processi governati dall'interazione elettromagnetica è come si vedrà nel prossimo paragrafo [5.5](#), dell'ordine dei 10^{-16} s. Da ciò si desume che nonostante i decadimenti β siano chiaramente un fenomeno nucleare, essi non coinvolgono però né la forza nucleare né quella elettromagnetica, e data la piccolezza delle probabilità

$\lambda_\beta = 1/\tau_\beta$ di decadimento ad essi associate, l'interazione che li governa deve essere *debole*.

Questa conclusione condusse Fermi a postulare l'esistenza di una nuova forza che fosse responsabile dei decadimenti β . Essa è stata chiamata *forza debole* ed è a breve raggio d'azione, dato che è efficace soltanto all'interno dell'ambiente nucleare. La bassissima intensità di questa forza è quindi responsabile delle lunghe vite medie osservate nei decadimenti β . In termini di intensità relative, assunta come pari ad 1 quella della forza forte, si ha rispettivamente 10^{-2} per l'elettromagnetica, 10^{-5} per la debole e 10^{-39} per la gravitazionale.

Così come nel caso dell'interazione elettromagnetica, il ridotto valore dell'intensità d'accoppiamento della forza debole permette dunque di affrontare con tecniche perturbative la formulazione di una teoria del decadimento β . Si è visto che all'interno dei nuclei non vi possono essere, stabilmente presenti, elettroni (dimensioni nucleari, modello Rutherford, ecc. ecc.), e conseguentemente si deduce che gli elettroni emessi durante il decadimento β non possono provenire dal nucleo ma devono essere stati prodotti nel momento del decadimento. Questa sequenza è abbastanza analoga a quanto avviene nelle transizioni atomiche, in cui i fotoni non pre-esistono all'interno degli atomi ma sono prodotti al momento delle transizioni. Così come la transizione in un atomo può essere capita come indotta, ad esempio, da un'interazione di dipolo, e quindi calcolata utilizzando la teoria delle perturbazioni, similmente il decadimento β può essere capito come dovuto alla debole forza rappresentata dall'Hamiltoniano di interazione debole.

Il calcolo della probabilità λ_β di transizione per unità di tempo, e della forma dello spettro energetico delle particelle emesse nel processo, può quindi essere affrontato come fatto da Fermi¹⁰, con tecniche perturbative e utilizzando la Regola d'Oro n. 2.

I risultati ottenuti da Fermi sono poi stati superati da sviluppi successivi e infine dalla *teoria elettrodebole* di S. Glashow, A. Salam e S. Weinberg. È nondimeno istruttivo e utile ripercorrere, come in Appendice [D](#), il calcolo fatto sulla base della Teoria di Fermi dell'interazione debole, che è sostanzialmente una teoria di campo in cui l'Hamiltoniano d'interazione è un operatore agente sui campi fermionici tramite assorbimento o emissione di fermioni.

¹⁰E. Fermi, Tentativo di una teoria dei raggi β , Nuovo Cimento 11 (1934) 1-19.

de l'uso della teoria dei campi quantizzati della radiazione elettromagnetica, di cui si utilizzeranno qui alcuni risultati rimandando a corsi successivi per la loro deduzione.

Si può descrivere il fenomeno ricorrendo allo sviluppo in serie di una sovrapposizione di diversi termini multipolari, ognuno con la propria caratteristica distribuzione angolare. La radiazione elettrica di dipolo, quadrupolo, ottupolo, ecc. è indicata con E1, E2, E3, ecc.; similmente la corrispondente radiazione multipolare magnetica è indicata con M1, M2, M3, ecc.

La conservazione del momento angolare e della parità, caratteristiche dell'interazione elettromagnetica, determinano quali multipolarità siano permesse nella transizione: un fotone di multipolarità $E\ell$ ha momento angolare ℓ e parità $(-1)^\ell$, un fotone di multipolarità $M\ell$ ha momento angolare ℓ e parità $(-1)^{\ell+1}$. In tabella 5.1 sono riportate alcune regole di selezione per transizioni elettromagnetiche con le quali si può costruire un insieme di transizioni permesse quali ad esempio quelle in tabella 5.2. In una transizione $J_i \rightarrow J_f$

Tabella 5.1: Regole di selezione per decadimenti γ

Multipolarità	Elettrica			Magnetica		
	$E\ell$	$ \Delta J $	ΔP	$M\ell$	$ \Delta J $	ΔP
Dipolo	E1	1	-	M1	1	+
Quadrupolo	E2	2	+	M2	2	-
Ottupolo	E3	3	-	M3	3	+

Tabella 5.2: Esempi di transizioni nucleari elettromagnetiche

$J_i^{P_i}$	$J_f^{P_f}$	ΔP	L	Transizioni permesse
0^+	0^+	No	-	Nessuna
$(1/2)^+$	$(1/2)^-$	Sì	1	E1
1^+	0^+	No	1	M1
2^+	0^+	No	2	E2
$(3/2)^-$	$(1/2)^+$	Sì	1, 2	E1, M2
2^+	1^+	No	1, 2, 3	M1, E2, M3
$(3/2)^-$	$(5/2)^+$	Sì	1, 2, 3, 4	E1, M2, E3, M4

la conservazione del momento angolare implica che sia soddisfatta la disuguaglianza triangolare $|J_i - J_f| \leq \ell \leq J_i + J_f$.

La vita media per emissione γ di uno stato eccitato dipende fortemente dalla multipolarità da cui avviene l'emissione ed è tanto più breve quanto

più basso è il livello di multipolarità. Una transizione magnetica $M\ell$ ha approssimativamente la stessa probabilità di una transizione elettrica $E(\ell + 1)$. Una transizione $3^+ \rightarrow 1^+$, ad esempio, è in linea di principio una miscela di E2, M3 ed E4, ma risulta facilmente dominata dal contributo E2. Una transizione $3^+ \rightarrow 2^+$ consiste usualmente in una miscela di M1 ed E2 ed E4, anche se sono possibili transizioni M3, E4 ed M5.

In una serie di stati eccitati 0^+ , 2^+ , 4^+ , il decadimento più probabile consiste in una cascata di transizioni E2 del tipo $4^+ \rightarrow 2^+ \rightarrow 0^+$, e non in una singola transizione E4 del tipo $4^+ \rightarrow 0^+$.

La vita media di uno stato eccitato e la distribuzione angolare della radiazione elettromagnetica emessa costituiscono delle "firme" della multipolarità delle transizioni, che a loro volta rivelano spin e parità dei livelli eccitati del nucleo.

La probabilità di decadimento dipende fortemente anche dall'energia: per radiazione di multipolarità ℓ , essa è infatti proporzionale ad $E_\gamma^{2\ell+1}$.

L'energia d'eccitazione di un nucleo può talvolta essere anche trasferita a un elettrone di un orbitale atomico tramite un processo detto *conversione interna*, in cui si immagina coinvolto un fotone *virtuale*, che non abbia dunque le restrizioni sui possibili stati di polarizzazione di un fotone reale; esso diviene un processo rilevante in transizioni per le quali risulta soppressa l'emissione γ , come nel caso di alta multipolarità o bassa energia d'eccitazione, e il nucleo coinvolto è pesante, per cui cresce la probabilità di una sovrapposizione spaziale non trascurabile fra le funzioni d'onda del nucleo e degli elettroni atomici.

La transizione $0^+ \rightarrow 0^+$ non può aver luogo tramite l'emissione di un fotone, se quindi un nucleo è in uno stato eccitato 0^+ , e anche tutti i suoi livelli eccitati più bassi sono del tipo 0^+ , come per ^{16}O o ^{40}Ca , allora il suo decadimento dovrà procedere in modo diverso. Ciò può ad esempio avvenire per conversione interna, con l'emissione di due fotoni o se energeticamente permesso, con l'emissione di una coppia e^+e^- . La conservazione della parità vieta la conversione fra due livelli con $J = 0$ e parità opposte.

La vita media di uno stato nucleare eccitato varia tipicamente fra 10^{-9} e 10^{-15} s, che corrispondono a stati con larghezze inferiori a 1 eV.

Gli stati che possono decadere soltanto attraverso transizioni a bassa energia e alta multipolarità hanno vite medie considerevolmente più lunghe. Essi sono detti *isomeri* e vengono indicati con una m in apice al simbolo dell'elemento. Un esempio estremo di isomero è il secondo stato eccitato di ^{110}Ag , con energia d'eccitazione di 117.7 keV e $J^P = 6^+$. Esso si diseccita attraverso una transizione M4 nel primo stato eccitato (1.3 keV; 2^-), in quanto un decadimento diretto verso lo stato fondamentale 1^+ è ancor più improbabile, e la vita media τ di $^{110}\text{Ag}^m$ è pari a 339 giorni.

Si ricordi che un nucleo in uno stato eccitato ${}^A_Z\text{X}^*$ può decadere allo sta-

to fondamentale A_ZX anche senza emettere radiazione γ , cedendo l'energia d'eccitazione a un elettrone atomico tramite il processo di conversione interna. In tal caso la vita media di quello stato eccitato è inferiore a quanto previsto dal solo processo di decadimento radiativo, dato che le probabilità di decadimento si sommano

$$\lambda_{tot} = \lambda_\gamma + \lambda_c \quad (5.42)$$

essendo λ_c la probabilità di decadimento per conversione interna.

5.6 Cinematica relativistica del decadimento in due corpi

I decadimenti nucleari finora studiati coinvolgono spesso strutture *figlie* emesse da un nucleo *genitore* con energie simili o superiori agli equivalenti energetici delle masse delle particelle figlie stesse. Questi casi vanno quindi trattati secondo il corretto approccio relativistico, come del resto sarà necessario con i decadimenti di singole particelle.

Riferendosi ai concetti riportati in Appendice [F](#), si analizza ora il decadimento di una struttura o particella *genitore* in due strutture o particelle *figlie*, ovvero il decadimento in due corpi, che è anche la forma più semplice di reazione.

Si consideri il decadimento di una particella di massa M inizialmente a riposo rispetto a un osservatore inerziale solidale col sistema del laboratorio (SL), che in questo caso coincide con quello del centro di massa (CM), e siano m_1 ed m_2 le masse delle particelle figlie. Il quadri-impulso della particella genitore è quindi $P = (Mc, 0, 0, 0)$, e indicati con $p_1 = (E_1/c, \vec{p}_1)$ e $p_2 = (E_2/c, \vec{p}_2)$ i quadri-impulsi delle particelle figlie, la conservazione del quadri-impulso richiede che sia

$$P = p_1 + p_2 \quad \text{da cui,} \quad \vec{p}_2 = -\vec{p}_1 \quad (5.43)$$

Per cui nel sistema (CM) le due particelle figlie sono emesse lungo la stessa direzione, in versi opposti con impulsi di uguale modulo. Si può dunque omettere il pedice nell'impulso e la conservazione dell'energia assume la forma

$$E_1 + E_2 = \sqrt{m_1^2 c^4 + |\vec{p}|^2 c^2} + \sqrt{m_2^2 c^4 + |\vec{p}|^2 c^2} = Mc^2 \quad (5.44)$$

Raccogliendo e quadrando una prima volta si ottiene:

$$\begin{aligned} Mc^2 - \sqrt{m_1^2 c^4 + |\vec{p}|^2 c^2} &= \sqrt{m_2^2 c^4 + |\vec{p}|^2 c^2} \quad \implies \\ M^2 c^4 + (m_1 c^2 - m_2 c^2)(m_1 c^2 + m_2 c^2) &= 2Mc^2 \sqrt{m_1^2 c^4 + |\vec{p}|^2 c^2} \end{aligned}$$

quadrando nuovamente ed estraendo $|\vec{p}|^2$ si ha

$$\begin{aligned} M^4 c^2 + (m_1 - m_2)^2 (m_1 + m_2)^2 c^2 + 2M^2 c^2 (m_1 - m_2)(m_1 + m_2) &= \\ = 4M^2 (m_1^2 c^2 + |\vec{p}|^2) \quad \implies \\ |\vec{p}|^2 &= \frac{M^4 c^2 + (m_1 - m_2)^2 (m_1 + m_2)^2 c^2 - 2M^2 m_1^2 c^2 - 2M^2 m_2^2 c^2}{4M^2} = \\ &= \frac{M^4 c^2 + (m_1 - m_2)^2 (m_1 + m_2)^2 c^2 - M^2 (m_1 + m_2)^2 c^2 - M^2 (m_1 - m_2)^2 c^2}{4M^2} \end{aligned}$$

da cui infine:

$$|\vec{p}| = \frac{\sqrt{[M^2c - (m_1 - m_2)^2c][M^2c - (m_1 + m_2)^2c]}}{2M} \quad (5.45)$$

valida soltanto se

$$M \geq m_1 + m_2 \quad (5.46)$$

che implica la possibilità per una particella di decadere soltanto se la sua massa supera la somma delle masse dei prodotti del decadimento.

Se dunque la massa di una particella supera la somma delle masse di altre due particelle, allora essa sarà instabile e potrà di conseguenza decadere in quelle due particelle figlie, a meno che il decadimento non sia interdetto dal rispetto di qualche altra legge di conservazione quale quella della carica, del momento angolare, ecc. Quella ora espressa è quindi una condizione necessaria, ma non sufficiente, all'avvenire di un particolare decadimento.

Va anche osservato che sia gli impulsi che le energie delle particelle figlie sono fissati dalle loro masse unitamente alla massa della particella genitore. Ciò invece non vale nel caso di decadimento in più di due particelle figlie: in tal caso l'impulso di una particella figlia può assumere qualsiasi valore compreso fra 0 e un certo valore massimo determinato dalle masse delle particelle coinvolte.

Tornando al decadimento in due corpi, le energie delle particelle figlie si ottengono dalla [5.44](#). Quadrando per E_1 ed E_2

$$E_1^2 = m_1^2c^4 + p^2c^2 \quad , \quad E_2^2 = m_2^2c^4 + p^2c^2$$

$$\text{da cui: } E_1^2 - m_1^2c^4 = p^2c^2 = E_2^2 - m_2^2c^4 \quad \implies \quad E_2^2 = E_1^2 - m_1^2c^4 + m_2^2c^4$$

$$\text{quindi: } E_2 = \sqrt{E_1^2 - m_1^2c^4 + m_2^2c^4}$$

Inoltre dalla [5.44](#)

$$E_1 + E_2 = Mc^2 \quad \implies \quad E_2 = Mc^2 - E_1$$

$$\text{da cui: } Mc^2 - E_1 = \sqrt{E_1^2 - m_1^2c^4 + m_2^2c^4 + m_2^2c^4}$$

$$\text{e quadrando: } M^2c^4 - 2E_1Mc^2 = m_2^2c^4 - m_1^2c^4$$

da cui infine:

$$\begin{cases} E_1 = \frac{M^2c^2 + m_1^2c^2 - m_2^2c^2}{2M} \\ E_2 = \frac{M^2c^2 + m_2^2c^2 - m_1^2c^2}{2M} \end{cases} \quad \text{e similmente,} \quad (5.47)$$

Si noti anche che non c'è una direzione preferita per l'emissione della particella figlia, e il decadimento è quindi *isotropo*. Se però si sceglie la direzione di uno qualsiasi dei due prodotti del decadimento, ad esempio tramite il

posizionamento di un rivelatore, allora la direzione d'emissione dell'altro risulta fissata dalla conservazione dell'impulso e come detto i prodotti del decadimento si muovono *back-to-back* nel sistema di riferimento del centro di massa del genitore.

Nel caso in cui le due particelle figlie abbiano masse identiche, $m_1 = m_2 = m$, come ad esempio nel decadimento $K^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^-$, le formule [5.47](#) si semplificano con le energie delle due particelle figlie date da $E_1 = E_2 = Mc^2/2$, e l'impulso espresso da $|\vec{p}| = c\sqrt{M^2 - 4m^2}/2$.

È interessante anche il caso di decadimento in due corpi di una particella genitore *in volo*, ovvero descritta da un osservatore non a riposo con il sistema del suo centro di massa, ma in moto rettilineo uniforme rispetto ad esso. L'importanza di questo caso è chiara non appena si pensi che è spesso il solo modo di misurare la massa di particelle-genitore neutre, cioè di carica elettrica nulla.

Si scrivano i quadri-impulsi della particella genitore e delle due particelle figlie

$$P = (E/c, 0, 0, p) \quad (5.48)$$

$$p_1 = (E_1/c, \vec{p}_{1\perp}, p_{1z}) \quad , \quad p_2 = (E_2/c, \vec{p}_{2\perp}, p_{2z})$$

nell'ipotesi di aver scelto l'asse z parallelo alla direzione di volo, e quindi alla velocità, della particella madre. La conservazione dell'impulso richiede allora che i vettori bidimensionali degli impulsi trasversi delle due particelle abbiano lo stesso modulo, la stessa direzione e versi opposti:

$$\vec{p}_{1\perp} = -\vec{p}_{2\perp} \equiv \vec{p}_\perp \quad (5.49)$$

Le energie e le componenti lungo z degli impulsi delle particelle sono collegate ai valori nel sistema del CM da un *Lorentz boost* con velocità pari a quella della particella madre (vedi Appendice [F](#)). Indicando con un apice $'$ le variabili cinematiche nel CM, le trasformazioni di Lorentz per le particelle figlie sono

$$\begin{cases} E_1 = \gamma(E'_1 + vp'_{1z}) \\ p_{1z} = \gamma\left(p'_{1z} + \frac{\beta E'_1}{c}\right) \\ \vec{p}_{1\perp} = \vec{p}'_{1\perp} \end{cases} \quad \begin{cases} E_2 = \gamma(E'_2 + vp'_{2z}) \\ p_{2z} = \gamma\left(p'_{2z} + \frac{\beta E'_2}{c}\right) \\ \vec{p}_{2\perp} = \vec{p}'_{2\perp} \end{cases} \quad (5.50)$$

e ricordando le [F.13](#) dell'Appendice [F](#) si ha

$$\beta = \frac{c p}{E} \quad \text{e} \quad \gamma = \frac{E}{Mc^2} \quad (5.51)$$

Il problema è così risolto.

Si possono ora in primo luogo calcolare gli angoli che gli impulsi delle due particelle figlie fanno con l'asse z e l'uno rispetto all'altro, in funzione dell'impulso \vec{p} della particella genitore. A tale scopo è interessante affrontare il problema senza l'uso diretto delle trasformazioni di Lorentz, partendo dalla conservazione energia-impulso

$$E = E_1 + E_2 = \sqrt{m_1^2 c^4 + p_1^2 c^2} + \sqrt{m_2^2 c^4 + p_2^2 c^2} \quad (5.52)$$

$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 \quad (5.53)$$

Sostituendo nella [5.52](#) p_2^2 con $(\vec{p} - \vec{p}_1)^2$, si ottiene un'equazione che contiene l'impulso incognito p_1 e l'angolo ϑ_1 fra \vec{p}_1 e l'asse z . Risolvere per p_1 è una procedura lunga, anche se diretta, che fornisce

$$p_1 = \frac{(M^2 + m_1^2 - m_2^2) c^2 p \cos\vartheta_1 \pm 2E \sqrt{M^2 p'^2 - m_1^2 p^2 \sin^2\vartheta_1}}{2(M^2 + p^2 \sin^2\vartheta_1)} \quad (5.54)$$

L'esistenza di valori reali per p_1 richiede che $(M^2 p'^2 - m_1^2 p^2 \sin^2\vartheta_1) \geq 0$ e questa condizione è soddisfatta per ogni angolo ϑ_1 se $(Mp'/m_1 p) > 1$. In questo caso bisogna anche scartare la soluzione che prevede il segno " - " in quanto condurrebbe a valori negativi e privi di significato fisico per p_1 , con $\vartheta_1 > \pi/2$. Se d'altronde $(Mp'/m_1 p) < 1$, allora i valori possibili per ϑ_1 sono superiormente limitati in quanto $\sin\vartheta_{1max} = (Mp'/m_1 p)$. In questo caso entrambi i segni danno risultati possibili: per ogni valore $\vartheta_1 < \vartheta_{1max}$ si hanno due possibili valori di p_1 e quindi corrispondentemente anche due possibili valori di p_2 .

Per il decadimento in due corpi si può anche dedurre la correlazione tra l'angolo ϑ_1 che la particella figlia 1 fa nel sistema SL con la direzione della velocità della particella genitore, e l'angolo corrispondente ϑ_1^* nel sistema CM, ottenendo

$$\text{tg}\vartheta_1 = \frac{\text{sen}\vartheta_1^*}{\gamma(v/v_1^* + \cos\vartheta_1^*)} \quad (5.55)$$

con v modulo della velocità in SL della particella genitore, e v_1^* modulo in CM della velocità della particella figlia.

Il passo successivo consiste nel considerare la trattazione della dinamica relativistica del decadimento in tre corpi, schematicamente presentato nell'Appendice [G](#). I risultati che ne conseguono si dimostrano utili ad esempio anche quando si vogliono assegnare i corretti numeri quantici di spin, parità, isospin ai mesoni.

5.7 Fissione nucleare

La fissione nei nuclei pesanti fu scoperta sperimentalmente da O. Hahn e F. Strassman nel 1938 quando constatarono che bombardando uranio con neutroni si ottenevano come prodotti nuclei di masse approssimativamente simili alla metà di quella dell'uranio bombardato; il fenomeno fu subito dopo giustificato teoricamente da L. Meitner e O. Frish¹¹.

Oltre alla fissione indotta si ha anche fissione spontanea quando, senza intervento dall'esterno, un nucleo genitore si spezza spontaneamente in due nuclei figli approssimativamente della medesima massa. Calcoli basati sulla formula semiempirica di Weizsäcker prevedono come si vedrà che il massimo guadagno in energia si ha quando i due frammenti hanno esattamente la stessa massa, ma sperimentalmente si trova che questa configurazione risulta poco probabile. In figura 5.18 si vede ad esempio la distribuzione in massa dei frammenti di fissione del ^{254}Fm .

Distribuzioni di questo tipo sono caratteristiche, oltre che delle fissioni spontanee, anche dei casi di fissioni indotte dall'urto di neutroni termici, mentre invece le fissioni indotte da urti di particelle molto energetiche conducono a distribuzioni di prodotti con masse che sono fra loro molto più simili. La

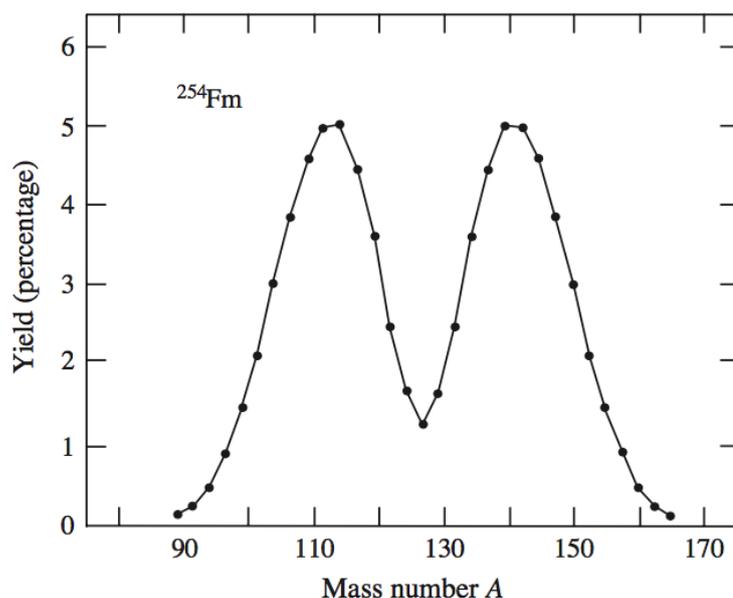


Figura 5.18: Distribuzione in massa dei frammenti di fissione spontanea del Fermio ^{254}Fm .

distribuzione in massa dei frammenti di fissione non ha inoltre sempre un

¹¹O.R. Frisch, "Physical Evidence for the Division of Heavy Nuclei under Neutron Bombardment" - Supp. to Nature of February 18 (1939) 276

andamento "liscio" come quello mostrato in figura 5.18 e per alcuni nuclei fissionabili evidenza delle irregolarità marcate che sono dovute alla intima struttura a *shell* dei nuclei stessi, come ad esempio mostrato in figura 5.19. Un esempio che mostra la natura decisamente asimmetrica dei frammenti è

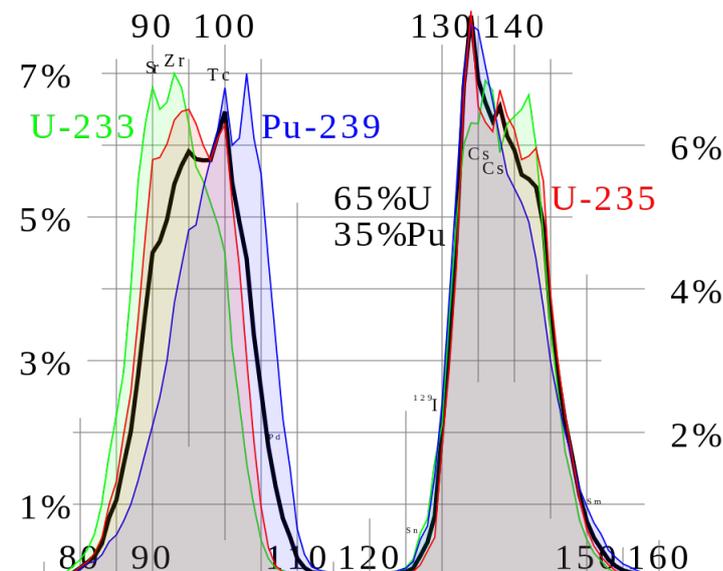


Figura 5.19: Distribuzione in massa dei frammenti di fissione di ^{233}U , ^{235}U e ^{239}Pu ; in nero una tipica miscela utilizzata nei reattori nucleari di potenza.

la fissione spontanea dell'uranio $^{238}_{92}\text{U}$,



processo a vita media molto lunga che rilascia un'energia di circa 154 MeV sotto forma di energia cinetica dei prodotti di fissione.

Come visto dalla tabella dei nuclidi, i nuclei pesanti sono ricchi in neutroni e questo dá conseguentemente luogo a prodotti di fissione anch'essi ricchi in neutroni, assieme ad alcuni neutroni liberi. I prodotti di fissione sono solitamente fuori dalla linea di stabilità per decadimento β e quindi danno tipicamente luogo a successive fasi di decadimento. Il $^{145}_{57}\text{La}$ decade con tre stadi successivi nell'isotopo β -stabile $^{145}_{60}\text{Nd}$, liberando un'energia di 8.5 MeV sotto forma di energia cinetica degli elettroni e dei neutrini emessi.

Nonostante si trovi che la probabilità di fissione spontanea aumenta al crescere di A , essa resta comunque un processo piuttosto raro: il rateo di fissione spontanea per $^{238}_{92}\text{U}$ è ad esempio di soli $3 \times 10^{-24} \text{ s}^{-1}$, mentre il rateo di decadimento α per lo stesso isotopo è pari a $5 \times 10^{-18} \text{ s}^{-1}$, ovvero circa 1.7×10^6 volte più intenso. Nel caso del $^{254}_{100}\text{Fm}$ mostrato in figura 5.18, anche se più pesante, il rateo di decadimento α è circa 1.7×10^3 volte superiore a quello di fissione. La fissione diviene il processo di decadimento

dominante soltanto per gli elementi più pesanti, con $A \geq 270$.

Un'interpretazione oltre che qualitativa anche quantitativa del processo di fissione può essere ottenuta basandosi sul modello, formulato nel 1939 con ragionamenti classici da N. Bohr e J.A. Wheeler¹², secondo il quale un nucleo è immaginato come costituito da una *goccia di liquido* di nucleoni, incompressibile, detto anche *liquido di Fermi*. Si tratta ovviamente di un liquido "speciale": per una goccia di liquido usuale, ad esempio, le condizioni di equilibrio sono determinate dall'azione repulsiva delle forze coulombiane e da quella attrattiva delle forze di tensione superficiale; nel liquido di Fermi queste ultime danno luogo al termine di energia di superficie nell'equazione semiempirica di Weizsäcker che avendo lo stesso segno di quello coulombiano contribuisce invece a ridurre e non ad aumentare il legame nucleare.

Si studi quindi, sulla base del modello a goccia, il problema della fissione di un nucleo genitore con numero di massa A ed energia di legame $B(A, Z)$, in due frammenti con numeri di massa simili, ξA e $(1 - \xi)A$ rispettivamente, con $0 < \xi < 1$. Si supponga inoltre che anche i protoni si distribuiscano sui due frammenti in modo proporzionale alla massa. Dette $B_1(\xi A, \xi Z)$ e $B_2[(1 - \xi)A, (1 - \xi)Z]$ le energie di legame dei due frammenti, e $B_{12}(A, Z; \xi)$ la loro somma

$$B_{12}(A, Z; \xi) = B_1(\xi A, \xi Z) + B_2[(1 - \xi)A, (1 - \xi)Z] \quad (5.57)$$

si ha che la frammentazione spontanea del nucleo ${}^A_Z X$ nei due frammenti ${}^{\xi A}_{\xi Z} X$ e ${}^{(1-\xi)A}_{(1-\xi)Z} X$ è energeticamente permessa se

$$Q = \Delta B(A, Z; \xi) = B(A, Z) - B_{12}(A, Z; \xi) > 0 \quad (5.58)$$

Quella individuata è soltanto una condizione necessaria e Q rappresenta il grado di *esotermicità* del processo, quando questo può aver luogo.

Nella formula semiempirica di Weizsäcker per l'energia di legame vi sono tre termini "classici" dipendenti esplicitamente dalla forma del nucleo, che qui si immagina appunto come una goccia di liquido incompressibile: l'energia di volume $B_V(A) = b_V A$, l'energia di superficie $B_S(A) = b_S A^{2/3}$, e l'energia coulombiana $B_C(A) = b_C Z(Z - 1)A^{-1/3} \simeq b_C Z^2 A^{-1/3}$. Tenendo conto di questi si può quindi studiare la stabilità di una goccia di tale liquido in funzione di una perturbazione esterna. La [5.58](#) diventa

$$Q = \Delta B(A, Z; \xi) = b_S A^{2/3} [1 - \xi^{2/3} - (1 - \xi)^{2/3}] + \\ + b_C Z^2 A^{-1/3} [1 - \xi^{5/3} - (1 - \xi)^{5/3}] > 0 \quad (5.59)$$

Si trova che Q assume valore massimo per $\xi = 1/2$ e calcolandolo ad esempio per il caso di ${}^{238}_{92}\text{U}$, ricordando dalla [12.1.2](#) che $b_S = +17.23$ MeV e

¹²N. Bohr - J.A. Wheeler, "The Mechanism of Nuclear Fission" - Phys. Rev. 56(1939) 426

$b_C = +0.697$ MeV, si ottiene $Q \simeq 180$ MeV. Nonostante l'ampia esotermicità del processo la probabilità di fissione spontanea per ${}^{238}_{92}\text{U}$ è bassissima, con una vita media superiore a 10^6 anni, e ciò in quanto il sistema deve superare un'elevata barriera di potenziale affinché la fissione possa aver luogo. Per ottenere una seppur grossolana valutazione dell'entità della barriera,

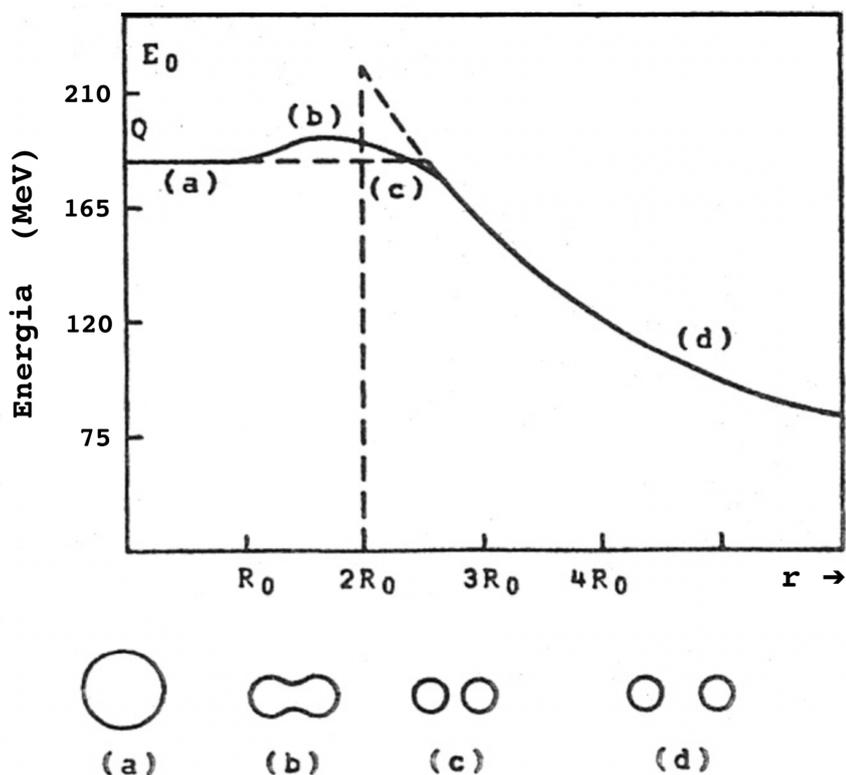


Figura 5.20: Barriera di potenziale per la fissione di ${}^{238}_{92}\text{U}$.

mostrata in figura 5.20, si può ragionare nel modo seguente: si immagini il processo di fusione, inverso alla fissione e si riporti in grafico l'energia di interazione E_{int} fra i due frammenti sferici in funzione della distanza r fra i loro centri. Il valore massimo di E_{int} si ha quando le due sfere che rappresentano i frammenti sono con le superfici a contatto e vale

$$E_{int}^0 = \frac{e^2 (Z/2)^2}{2r_0 (A/2)^{1/3}} \quad (5.60)$$

con r_0 espresso dalla 2.50. Per ${}^{238}_{92}\text{U}$ si ha ad esempio $E_{int}^0 \simeq 249$ MeV. Il valore limite dell'energia per $r \rightarrow 0$ coincide ovviamente con Q , dato dalla 5.59. L'altezza della barriera risulta quindi pari a $\Delta E_{bf} = E_{int}^0 - Q$ e la condizione di instabilità per il sistema è espressa da

$$\Delta E_{bf} = E_{int}^0 - Q \leq 0 \quad (5.61)$$

che per quanto visto, assumendo $\xi = 1/2$, equivale a

$$(Z^2/A) \gtrsim 59 \quad (5.62)$$

Quanto ottenuto e mostrato in tratteggio in figura, costituisce chiaramente un limite massimo per la barriera e di conseguenza la [5.62](#) fornisce una valutazione ottimistica della stabilità. La scissione non è infatti ancora avvenuta quando la distanza fra i centri dei due frammenti coincide con $r = 2r_0(A/2)^{1/3}$, e di conseguenza l'energia potenziale non può essere calcolata né con la [5.60](#) che considera frammenti separati, né con la [5.59](#) che considera nucleo sferico. L'approccio corretto richiederebbe una complicata equazione delle masse valida per nuclei molto deformati.

Una valutazione più realistica della barriera di potenziale e quindi dei limiti di stabilità del nucleo per fissione spontanea, si può ottenere immaginando di deformare leggermente il nucleo sferico genitore come riportato in Appendice [E](#).

Si ottiene in tal caso che un nucleo è stabile rispetto a piccole deformazioni se

$$(Z^2/A) \lesssim 49.4 \quad (5.63)$$

La condizione espressa che è soddisfatta per nuclei con $Z \leq 116$ e $A \leq 270$, assicura l'esistenza della barriera di potenziale ed è chiaramente più realistica della [5.62](#). Per nuclei con $Z^2 > 49.4 A$ la fissione spontanea diventa quindi sempre più probabile per cui se ne può prevedere un alto rateo.

Si può concretizzare ora la condizione necessaria alla fissione espressa dalla [5.58](#), nel caso di un nucleo genitore sferico A_ZX che si scinde in due nuclei figli ${}^{A/2}_{Z/2}X$ uguali e sferici, ovviamente con Z pari e A pari. Anche in questo caso le energie di volume si cancellano, per la supposta incomprimibilità della materia nucleonica, e assumendo sempre $Z(Z-1) \simeq Z^2$, si ha

$$\begin{aligned} Q &= \Delta B \left(A, Z; \xi = \frac{1}{2} \right) = \simeq b_S A^{2/3} (1 - 2^{1/3}) + b_C \frac{Z^2}{A^{1/3}} (1 - 2^{-2/3}) \\ &\simeq 0.26 A^{2/3} \left(\frac{Z^2}{A} - 17.2 \right) \text{ MeV} \end{aligned} \quad (5.64)$$

La condizione $\Delta B(A, Z; \xi = 1/2) > 0$, per cui i due frammenti di fissione danno luogo a una configurazione energeticamente più stabile rispetto al nucleo genitore, è dunque soddisfatta per $Z^2 > 17.2 A$. Mettendo assieme quanto ottenuto si individua una regione della tabella dei nuclidi, definita dalla relazione $17.2 A \lesssim Z^2 \lesssim 49.4 A$, in cui benchè la configurazione sferica del nucleo genitore risulti stabile per piccole perturbazioni, comunque la sua fissione in due frammenti uguali è energeticamente favorevole.

Una deformazione di ampiezza sufficiente può dunque condurre il nucleo

al limite della scissione e la sua forma è in tal caso compatibile con una configurazione di equilibrio instabile per spostarlo dalla quale anche di una quantità infinitesima, è sufficiente un lavoro infinitesimo d'ordine superiore. L'energia minima E_0 necessaria per portare un nucleo dalla configurazione iniziale "a" a quella finale "f", illustrate in figura [5.21](#), è detta *energia critica*

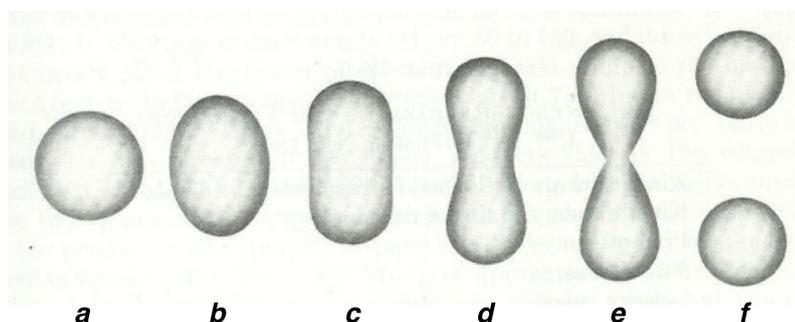


Figura 5.21: Illustrazione schematica della sequenza delle deformazioni nucleari nel processo di fissione.

di fissione, e può essere espressa come

$$E_0 = B_S(A) \beta_0(\zeta) \quad \text{con,} \quad \zeta = \left(\frac{Z^2}{A} \right) \left(\frac{A}{Z^2} \right)_0 \quad (5.65)$$

dove la funzione $\beta_0(\zeta)$ si determina valutando le oscillazioni della goccia di liquido nucleonico tramite il "raggio" $R(\vartheta)$ del nucleo deformato, espresso come opportuno sviluppo in serie di polinomi di Legendre, con ϑ variabile angolare sul piano di simmetria del nucleo. La fissione così descritta si dice *simmetrica* se tutti i coefficienti dispari dello sviluppo sono nulli.

Considerando fissione simmetrica e limitandosi al quarto termine dello sviluppo, l'energia critica di fissione risulta essere il massimo valore assumibile dall'energia di deformazione, espressa dalla [E.6](#)

$$[\Delta B^*(A, Z)]_{max} = E_0 \quad (5.66)$$

per cui esiste una deformazione critica della "goccia" che massimizza $\Delta B^*(A, Z)$ e si trova essere in corrispondenza di

$$\beta_0(\zeta) = 0.726(1 - \zeta)^3 - 0.330(1 - \zeta)^4 \quad (5.67)$$

Nel caso si voglia indurre la fissione di un nucleo il neutrone rappresenta il proiettile ideale, in quanto la barriera coulombiana del nucleo bersaglio non interviene nel processo del suo assorbimento, in seguito al quale si forma un sistema nucleare metastabile eccitato che può liberarsi dell'eccesso di energia espellendo il neutrone, spezzandosi in due o più frammenti, o trasformandosi nell'isotopo stabile del nucleo bersaglio. La fissione nucleare è dunque un

processo in competizione con la diffusione elastica e anelastica di neutroni e con il processo di cattura radiativa.

È interessante osservare che sperimentalmente si ottiene la fissione di ${}^{235}_{92}\text{U}$ bombardandolo con neutroni termici



che risultano però inefficaci per indurre fissione in ${}^{238}_{92}\text{U}$, che richiede invece neutroni molto più energetici.

Si valuti dunque quale energia cinetica devono avere i neutroni per provocare fissione in un nucleo.

La soglia di fissione E_n^0 si ha quando l'energia d'eccitazione E^* del sistema metastabile coincide con l'energia critica di fissione E_0 , cioè

$$E^* = \epsilon_c + s_n = E_0 \quad (5.69)$$

Data la grande massa dei nuclei bersaglio, rispetto a quella del neutrone, si ha $E_n^0 \simeq \epsilon_c$ e di conseguenza dalla [5.69](#) si ottiene

$$E_n^0 = E_0(A+1, Z) - s_n(A+1, Z) \quad (5.70)$$

avendo esplicitamente indicato la dipendenza da A e Z delle energie critica di fissione e di legame del neutrone nel sistema metastabile $(n, {}^A_ZX)$.

A_ZX	$({}^{A+1}_Z X)^*$	$E_0(A+1, Z)$ (MeV)	$s_n(A+1, Z)$ (MeV)	$E_n^{(0)}$ (MeV)
${}^{238}_{92}\text{U}$	$({}^{239}_{92}\text{U})^*$	5.7	4.8	0.9
${}^{235}_{92}\text{U}$	$({}^{236}_{92}\text{U})^*$	5.2	6.5	-1.3
${}^{234}_{92}\text{U}$	$({}^{235}_{92}\text{U})^*$	5.0	5.3	-0.3
${}^{232}_{90}\text{Th}$	$({}^{233}_{90}\text{Th})^*$	6.9	5.0	1.9

In tabella sono riportati i valori di E_n^0 per alcuni nuclei pesanti calcolati con la [5.70](#); i valori di E_0 sono stati calcolati tramite la [5.65](#) e la [5.67](#). Valori negativi di E_n^0 indicano che i relativi nuclei non hanno soglia di fissione e possono quindi essere fissionati anche dalla cattura di neutroni termici, la cui energia cinetica è quindi irrilevante ai fini del processo.

Si osservi che nella condizione $17.2 A \lesssim Z^2 \lesssim 49.4 A$, il nucleo genitore potrebbe fissionare anche per *effetto tunnel* attraverso la barriera, ma la probabilità, come discusso parlando del decadimento α , è estremamente

bassa data la grande massa e la complessità strutturale del frammento; conseguentemente risulta molto lunga la vita media di questo processo, e quindi bassissimo il suo rateo.

Il fatto che generalmente i frammenti di fissione di un nucleo si distribuiscono asimmetricamente attorno a due diversi valori di massa, porta alla riduzione della barriera coulombiana rispetto al caso della fissione in frammenti uguali, ma non si sono ancora individuati motivi fondamentali che lo spieghino.

La teoria della fissione di Bohr e Wheeler, pur costituendo un approccio classico, riesce a fornire una buona comprensione di molte caratteristiche della fissione, sia di quella indotta che di quella spontanea.

Va anche osservato che nonostante il cruciale ruolo che la fissione nucleare e le sue applicazioni hanno avuto e hanno sulla società, il suo contributo alla conoscenza fondamentale del nucleo atomico non è particolarmente rilevante.

C'è un altro meccanismo che porta nuclei ad emettere frammenti di masse superiori a quelle delle particelle α , ma nel contempo inferiori a quelle dei frammenti di fissione, si tratta della cosiddetta *multiframmentazione*, di cui si tratterà brevemente nel Capitolo [10](#), parlando di termodinamica nucleare.

La grande quantità d'energia liberabile tramite reazioni di fissione ha suggerito e portato allo sviluppo sia di tecnologie per la produzione d'energia elettrica (reattori nucleari) che per la realizzazione di ordigni esplosivi (bombe atomiche).

Capitolo 6

Processi d'urto

Gli esperimenti che coinvolgono processi d'urto sono strumenti fondamentali d'indagine nella fisica nucleare e delle particelle.

In un tipico esperimento d'urto si individuano un oggetto da studiare che funge solitamente da *bersaglio* e dei *proiettili*, sotto forma di fascio incidente. L'individuazione di proiettile e bersaglio non è però sempre univoca, a volte appartengono entrambi a fasci collidenti l'uno contro l'altro e in certi casi si creano fasci di *bersagli* che vengono accelerati contro *proiettili*.

Prendendo come esempio una reazione (2 corpi) in (2 corpi) essa viene genericamente indicata con

$$a + b \longrightarrow c + d \quad (6.1)$$

dove convenzionalmente a e b rappresentano rispettivamente proiettile e bersaglio, mentre c e d vengono detti prodotti di reazione; quanto precede la freccia viene anche indicato come *canale d'ingresso* della reazione, e quanto la segue viene di conseguenza indicato come *canale d'uscita* della reazione. Nel caso di una reazione anelastica il numero dei prodotti di reazione può essere maggiore di due.

Opportuni sistemi di rivelazione permettono di misurare la quantità dei prodotti di reazione, le loro energie, impulsi, masse, spin, e quindi gli angoli relativi delle direzioni d'emissione rispetto a quella del fascio incidente.

Oggi si è in grado di produrre un'ampia varietà di fasci di particelle¹ e ioni, con energie cinetiche variabili da un minimo di circa 10^{-3} eV per neutroni freddi, sino a 2.6×10^{12} eV/N per ioni Pb, e 6.5×10^{12} eV per protoni, entrambi accelerati presso l'anello LHC al CERN.

Si possono anche produrre e utilizzare fasci secondari di particelle o ioni frutto dell'interazione primaria, eventualmente ad alte energie, di altre particelle o ioni; questi fasci secondari possono essere costituiti da particelle a breve vita media quali muoni μ , mesoni π o K, iperoni ($\Sigma^\pm, \Xi^-, \Omega^-$), o da nuclei radioattivi.

¹Si veda l'App. I sugli acceleratori.

I bersagli utilizzati possono essere sotto forma solida, liquida, gassosa o come detto, costituire a loro volta fasci di particelle accelerate, come negli anelli ad accumulazione.

Conviene distinguere i processi d'urto in processi elastici e processi anelastici. Un tipico processo elastico, per il quale i prodotti di reazione coincidono con

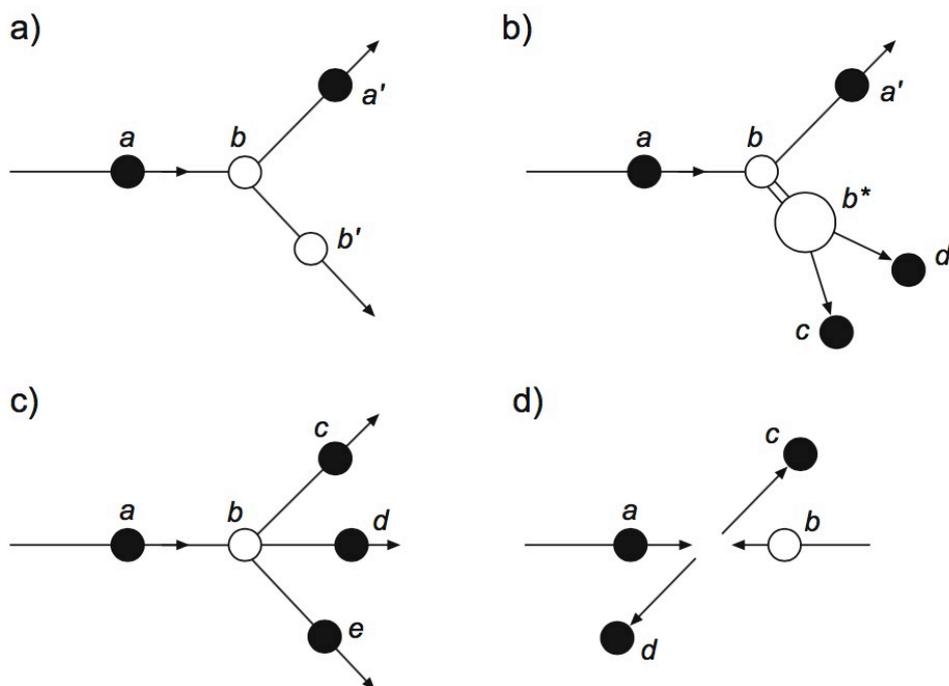


Figura 6.1: Schematizzazione dei processi d'urto: a) diffusione elastica; b) diffusione anelastica con produzione di uno stato eccitato che poi decade in due particelle; c) produzione anelastica di nuove particelle; d) reazioni tra fasci collidenti.

i due soggetti inizialmente coinvolti nell'urto, è indicato con

$$a + b \longrightarrow a' + b' \quad (6.2)$$

In questo caso sia proiettile che bersaglio restano nel proprio stato fondamentale anche dopo l'urto, col bersaglio che assorbe semplicemente l'impulso di rinculo modificando di conseguenza la propria energia cinetica; l'energia cinetica totale naturalmente si conserva, data la supposta elasticità dell'urto. Gli apici segnalano quindi la sola diversità che caratterizza i soggetti del canale d'uscita da quelli del canale d'ingresso, ovvero i parametri cinematici (impulso ed energia cinetica). Gli angoli d'emissione e le energie cinetiche delle due particelle nel canale d'uscita di una reazione elastica sono univocamente correlati.

Similmente a quanto si ha in ottica, il legame fra intensità di particelle diffuse, energia del fascio incidente e angoli di diffusione, fornisce informazioni sulla distribuzione spaziale del bersaglio.

Quanto più piccola è la dimensione dell'estensione spaziale del bersaglio, tanto maggiori sono le energie cinetiche richieste alle particelle del fascio incidente, per ottenerne una buona risoluzione spaziale. Se infatti $\lambda = \lambda/2\pi$ è la lunghezza d'onda di de Broglie di una particella con impulso p , si ha

$$\lambda = \frac{\hbar}{p} = \frac{\hbar c}{\sqrt{2mc^2 E_k + E_k^2}} \approx \begin{cases} \frac{\hbar}{\sqrt{2mE_k}} & \text{per } E_k \ll mc^2 \\ \frac{\hbar c}{E_k} \approx \frac{\hbar c}{E} & \text{per } E_k \gg mc^2 \end{cases} \quad (6.3)$$

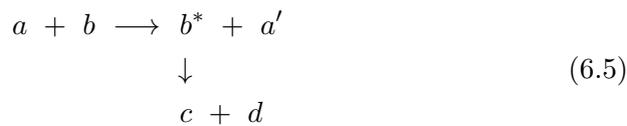
Per ottenere una ragionevole risoluzione spaziale di strutture fisiche con dimensioni lineari Δx servono lunghezze d'onda dello stesso ordine di grandezza: $\lambda \approx \Delta x$. Tenendo conto del principio di indeterminazione si ha, per gli impulsi corrispondenti delle particelle dei fasci incidenti

$$p \gtrsim \frac{\hbar}{\Delta x}, \quad pc \gtrsim \frac{\hbar c}{\Delta x} \approx \frac{200 \text{ MeV} \cdot \text{fm}}{\Delta x} \quad (6.4)$$

Si deduce da ciò che per risolvere spazialmente le tipiche dimensioni nucleari, che sono di alcune unità di fm, servono fasci di particelle con impulsi di alcune decine di MeV/c.

I singoli nucleoni, come si vedrà, hanno dimensioni lineari dell'ordine di 0.8 fm, e per risolverli spazialmente servono quindi fasci di particelle con impulsi maggiori a 100 MeV/c. Volendo invece risolvere spazialmente i quark, costituenti dei nucleoni, servono fasci di particelle con impulsi di molti GeV/c. In figura [6.2](#) è illustrata la corrispondenza fra energia cinetica, impulso e lunghezza d'onda di de Broglie per alcune particelle: γ , e , μ , p , α .

Come esempio di un processo anelastico si veda



in cui una parte dell'energia cinetica trasferita dal proiettile a al bersaglio b eccita quest'ultimo portandolo allo stato b^* , come schematizzato al punto b) di figura [6.1](#).

Successivamente lo stato eccitato tornerà allo stato fondamentale emettendo particelle leggere quali fotoni γ o pioni π , e/o decadendo in due o più frammenti e/o particelle.

Talvolta le misure sperimentali su reazioni nucleari non permettono di rivelare tutti i prodotti di reazione e spesso si rivela soltanto il prodotto a' ; in tal caso la misura eseguita si dice *inclusiva*. Quando invece si rivelano tutti i prodotti di reazione si parla di misura *esclusiva*.

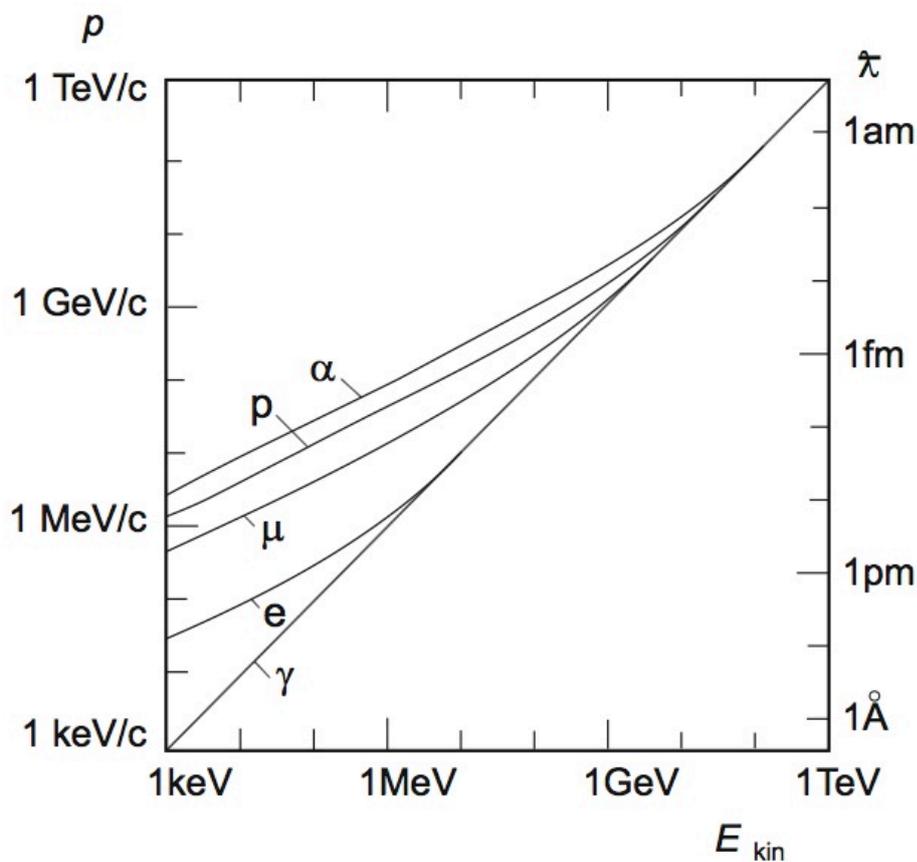


Figura 6.2: Corrispondenza fra energia cinetica, impulso e lunghezza d'onda ridotta di de Broglie per un certo numero di particelle.

Il verificarsi di reazioni nucleari avviene sempre nel rispetto di un certo insieme di leggi di conservazione, oltre a quelle ben note dell'impulso totale, del momento angolare totale e dell'energia totale. In particolare ve ne sono che implicano la conservazione di numeri quantici legati ai caratteri leptonic o barionico dei soggetti coinvolti nei canali d'ingresso e di uscita delle reazioni.

Nel rispetto di tali leggi può avvenire che nel corso della reazione particelle del fascio presenti nel canale d'ingresso non si ritrovino nel canale d'uscita e che l'equivalente energetico della loro massa, e/o parte della loro energia cinetica, si trasformino in altre particelle e/o eccitazione dei prodotti presenti nel canale d'uscita della reazione.

6.1 Sezioni d'urto: introduzione operativa

La misura dei tassi di reazione in esperimenti d'urto, detti anche di diffusione o di scattering, così come degli spettri energetici e delle distribuzioni angolari dei prodotti di reazione, forniscono informazioni sulle caratteristiche dinamiche delle interazioni fra proiettili e bersagli, quindi sulla forma del potenziale d'interazione e sull'intensità della forza d'accoppiamento.

Si introduce ora uno strumento concettuale utile nella descrizione delle interazioni fra particelle, o fra nuclei, o fra particelle e nuclei: la *sezione d'urto*. Si immaginerà di descrivere una situazione idealizzata, senza peraltro che ciò costituisca un limite alla generalità di quanto verrà dedotto.

Si pensi di preparare un esperimento in cui si invia un fascio collimato di proiettili a (particelle o nuclei), monocinetici di velocità \vec{v}_a contro un bersaglio costituito da oggetti b tutti fra loro uguali e distribuiti in posizioni fisse entro il volume del bersaglio. Si suppone che sia proiettili che "bersagli" siano "puntiformi", e ci si riferirà ad essi semplicemente come "particelle", specificando se proiettile o bersaglio.

Si discute il problema immaginando che il bersaglio sia a riposo nel sistema di riferimento del laboratorio (SL).

Si suppone altresì che la "densità istantanea" n_a di particelle proiettile nel fascio incidente sia costante nel tempo e in ogni parte del fascio stesso, e che sia costante anche la densità n_b nel bersaglio delle particelle b che lo costituiscono. Quindi le particelle di fascio e bersaglio sono omogeneamente distribuite in essi.

Si dirà che una particella a del fascio ha interagito con una particella b del bersaglio, indicando formalmente il processo con " $a+b$ ", se lo stato dinamico della particella proiettile a , dopo che questa ha inciso sul bersaglio, è diverso da quanto non fosse prima dell'interazione. Per semplificare il ragionamento sempre senza inficiarne la generalità, si può immaginare che la massa di ogni particella bersaglio b sia molto grande, al limite infinita, così da poterne trascurare il rinculo successivo all'interazione su essa delle particelle a del fascio incidente.

Si suppone anche che ogni particella del fascio possa interagire al più con una sola particella bersaglio.

Ci si pone quindi il problema di determinare, conoscendo il numero dN_a/dt di particelle proiettile che incidono sul bersaglio nell'unità di tempo, il numero dN/dt di quelle che attraversando il bersaglio interagiscono con esso, ovvero con una delle particelle b che lo costituiscono.

dN/dt è detto anche "tasso di interazioni" o "tasso di reazioni" e indicando con dN'_a/dt il numero di particelle del fascio che emergono ogni secondo dal bersaglio senza aver interagito con esso si ha

$$\frac{dN}{dt} = \frac{dN_a}{dt} - \frac{dN'_a}{dt} = \frac{d}{dt} (N_a - N'_a) \quad (6.6)$$

Si supponga ancora che il bersaglio si presenti macroscopicamente come una lastra di spessore costante Δz e che tutte le particelle del fascio incidano ortogonalmente su una faccia planare della lastra bersaglio, provenendo lungo traiettorie parallele che individuano un volume di forma sostanzialmente cilindrica di cui A rappresenta l'area della sezione retta, di forma non necessariamente circolare.

In queste ipotesi il numero dN_a/dt di particelle proiettile incidenti nell'unità di tempo, ovvero il flusso Φ_a di particelle incidenti, sarà dato da

$$\frac{dN_a}{dt} = \Phi_a = n_a v_a A \quad (6.7)$$

Quanto detto delinea una geometria dell'urto illustrata in figura 6.3, in cui l'asse di simmetria, indicato con z , è parallelo ed equiverso alla velocità \vec{v}_a di ogni particella incidente, ed è quindi ortogonale alla faccia planare che il bersaglio macroscopico offre al fascio stesso.

Per proseguire bisogna tener conto di cosa significhi l'interagire fra una

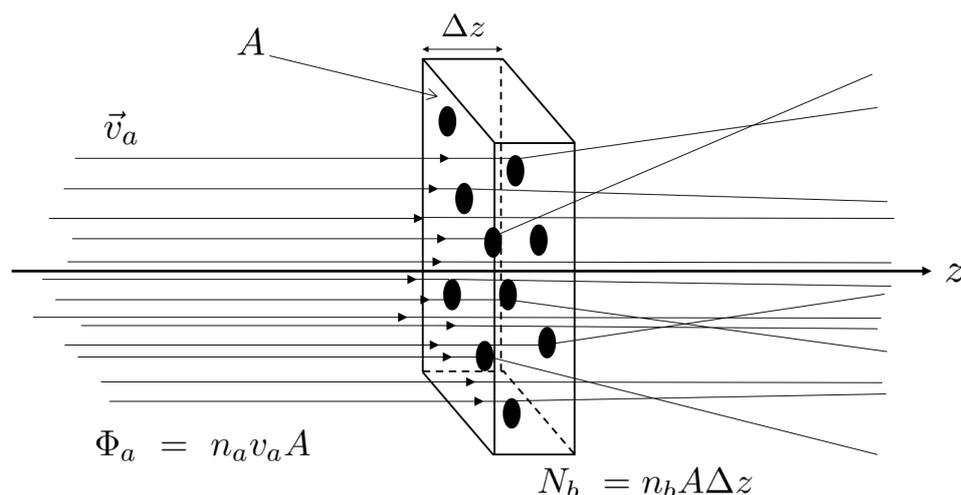


Figura 6.3: Sezione d'urto geometrica di reazione.

particella del fascio e una del bersaglio e di conseguenza di come lo si possa descrivere, introducendo qualcosa che rappresenti la "probabilità d'interazione".

Si è detto che si considera effetto dell'interazione il cambiamento delle proprietà dinamiche per una particella incidente, questo cambiamento determina quindi una diffusione della particella incidente rispetto alla sua traiettoria iniziale di avvicinamento.

Le particelle bersaglio verranno anche dette "centri diffusori" e si ricordi che si sta ipotizzando che l'interazione avvenga al più con una di esse.

Il numero N_b di centri diffusori omogeneamente distribuiti nella parte di

volume $V = A \times \Delta z$ del bersaglio intersecata dal fascio, e con cui ogni particella incidente può potenzialmente interagire, è dato da

$$N_b = n_b A \Delta z \quad (6.8)$$

Si schematizza l'interazione fra una particella del fascio e un centro diffusore come qualcosa di temporalmente "istantaneo" che si produce sulla particella proiettile nell'istante in cui questa, transitando presso il centro diffusore, si trova in corrispondenza della coordinata z individuata dall'intersezione fra l'asse z e il piano orogonale ad esso e passante per il centro diffusore interessato.

Si associa quindi al centro diffusore un'area circolare σ_b , centrata su di esso e individuata nel piano indicato. Si dirà quindi che la particella incidente, transitando presso il centro diffusore ha interagito con esso se la sua traiettoria di avvicinamento interseca σ_b . Ovviamente ciò avviene con tanta maggior probabilità quanto maggiore è il valore di σ_b .

La quantità σ_b così introdotta viene detta *sezione d'urto geometrica* per l'interazione fra la particella proiettile a e quella bersaglio b e la sua entità è chiaramente funzione anche del tipo di interazione che si considera.

Si torni quindi al problema originale, ovvero determinare il numero dN/dt di particelle incidenti che attraversando il bersaglio nell'unità di tempo interagiscono con esso.

Tale numero dipende ovviamente dal numero dN_a/dt di particelle incidenti sul bersaglio nell'unità di tempo, e non dipende dalla probabilità di ognuna di esse di attraversare l'area σ_b associata a uno specifico dei centri diffusori del bersaglio.

Dato che si è indicata con A l'area della sezione retta del fascio incidente e quindi della porzione di bersaglio interessata, la probabilità dell'interazione fra una particella proiettile e un qualunque centro diffusore sarà il rapporto fra la somma delle aree σ_b associate a tutti i centri diffusori omogeneamente distribuiti nella parte di volume bersaglio intersecata dal fascio, e A stesso, naturalmente nell'ipotesi che non vi siano sezioni d'urto di centri diffusori che ne oscurano anche solo parzialmente delle altre, lungo la direzione dell'asse z , quindi

$$\frac{dN}{dt} = \frac{dN_a}{dt} \frac{\sigma_b N_b}{A} = \frac{dN_a}{dt} \sigma_b n_b \Delta z \quad (6.9)$$

che esplicitando dN_a/dt diventa

$$\frac{dN}{dt} = n_a v_a N_b \sigma_b = n_a v_a n_b \Delta z A \sigma_b \quad (6.10)$$

da cui si ottiene, per la sezione d'urto geometrica σ_b

$$\sigma_b = \frac{dN}{dt} \frac{1}{n_a v_a n_b \Delta z A} = \frac{dN}{dt} \frac{1}{\Phi_a n_b \Delta z} = \frac{dN}{dt} \frac{1}{\Phi_a \delta_s} \quad (6.11)$$

dove $\delta_s = n_b \Delta z$ è detta densità areale dei centri diffusori b e ha le dimensioni dell'inverso di un'area.

Ricordando che la probabilità che qualcosa abbia luogo si esprime anche come rapporto tra casi favorevoli e casi possibili si ha, in base alla [6.9](#) e individuando con dN i casi favorevoli di diffusione dovuta a interazione fra particelle incidenti e bersaglio in un certo intervallo dt di tempo, e con dN_a i casi possibili nello stesso intervallo di tempo

$$\sigma_b = \frac{dN}{dN_a} \frac{1}{n_b \Delta z} = \frac{dN}{dN_a} \frac{1}{\delta_s} \quad (6.12)$$

La dimensione fisica della sezione d'urto è dunque quella di un'area, tipicamente indipendente dalla geometria del modo in cui è eseguita la misura. Sperimentalmente, per garantire quanto più possibile il rispetto della condizione che non vi siano sezioni d'urto associate a centri diffusori nell'ombra di quelle associate ad altri centri diffusori dello stesso bersaglio, e per evitare urti multipli delle particelle incidenti con diversi centri diffusori, si cerca di realizzare bersagli il più sottili possibile.

Negli esperimenti di fisica nucleare e sub-nucleare i valori misurati delle sezioni d'urto sono dell'ordine di 10^{-28} m^2 , ovvero 1 barn, o di suoi sottomultipli.

Quanto delineato per la sezione d'urto geometrica di reazione intesa come area associata alle particelle bersaglio, efficace a determinare l'interazione, anche se molto schematico rappresenta però una buona approssimazione dell'effettiva sezione d'urto di reazione. Un esempio è il caso dell'urto fra protoni ad alte energie, dove l'estensione spaziale delle particelle è confrontabile con l'estensione del loro raggio d'interazione forte.

Si trova che la probabilità che due particelle o nuclei interagiscano dipende in realtà da svariati e anche molto complessi fattori, il più delle volte fra loro indipendenti, che non traspiono chiaramente dal semplice approccio geometrico visto.

Spesso si osserva una forte dipendenza dall'energia in gioco, come ad esempio nel caso della cattura di neutroni termici da parte dell'uranio, processo per il quale la sezione d'urto varia di alcuni ordini di grandezza in un ristretto intervallo di valori d'energia.

Anche il tipo di interazione ha un ruolo importante: se ad esempio si considera il tasso d'interazione di particelle sostanzialmente puntiformi quali sono i *neutrini*, che interagiscono solo *debolmente* con il resto della materia² lo si trova estremamente minore rispetto a quello degli *elettroni*, a loro volta assumibili a particelle puntiformi che però sentono anche l'interazione elettromagnetica.

²L'ordine di grandezza delle tipiche sezioni d'urto per l'interazione fra neutrini e materia è di 10^{-48} m^2 , ovvero 10^{-20} barn.

Sezione d'urto d'interazione

La sezione d'urto d'interazione efficace non dipende principalmente dalla geometria del processo d'urto coinvolto, ma piuttosto dalla forma, dall'intensità e dal raggio d'azione del potenziale d'interazione in gioco.

Essa può essere determinata dalla misura del tasso di reazione se sono noti il flusso delle particelle incidenti e la densità areale dei centri di diffusione, come espresso dalla [6.11](#).

In modo analogo a quanto fatto con la sezione d'urto geometrica si definisce una *sezione d'urto totale* di reazione σ_{Tot} come

$$\sigma_{Tot} = \frac{\text{numero di eventi di diffusione per unità di tempo}}{\text{part. inc. per unità di tempo} \times \text{centri diffusori per unità d'area}} \quad (6.13)$$

Proseguendo con l'analogia per un certo canale d'ingresso si possono anche introdurre una sezione d'urto σ_{el} per le reazioni *elastiche* e una σ_{anel} per quelle *anelastiche*, fra loro legate dalla relazione

$$\sigma_{Tot} = \sigma_{el} + \sigma_{anel} \quad (6.14)$$

Lunghezza di attenuazione

Si consideri ora il problema che sorge quando si ha la necessità di valutare l'intensità residua di un fascio incidente su un bersaglio spesso. Si supponga di avere un fascio di intensità iniziale I_0 incidente su un bersaglio spesso di densità $\rho \text{ kg} \times \text{m}^{-3}$. Sia z la lunghezza del percorso compiuto dalle particelle del fascio penetrate nel bersaglio e si voglia determinare l'intensità residua $I(z)$ del fascio in funzione di z . Si consideri un generico spessore infinitesimo di bersaglio compreso fra z e $z + dz$ e sia dR_i il numero totale di interazioni per unità di tempo fra particelle del fascio e centri diffusori del bersaglio nello spessore dz . La corrispondente variazione dell'intensità del fascio sarà dunque $dI(z) = -dR_i$.

Detta come in precedenza A l'area della sezione del bersaglio ortogonale alla direzione z , il flusso di particelle incidenti del fascio attraverso essa è dato da

$$\varphi_b(z) = \frac{I(z)}{A}$$

Ricordando il significato di sezione d'urto totale σ_{Tot} si ha quindi

$$dI(z) = -dR_i = -\sigma_{Tot} \varphi_b(z) dN_b = -\sigma_{Tot} \frac{I(z)}{A} n_b A dz$$

da cui

$$\frac{dI(z)}{I(z)} = -n_b \sigma_{Tot} dz$$

e infine

$$I(z) = I_0 e^{-n_b z \sigma_{Tot}} \quad (6.15)$$

Si definisce quindi la cosiddetta "lunghezza di attenuazione" L_{att} come la distanza z percorsa dal fascio nel bersaglio, dopo la quale l'intensità del fascio stesso si è ridotta di un fattore $1/e$,

$$L_{att} = \frac{1}{n_b \sigma_{Tot}} \quad (6.16)$$

Luminosità

Un'altra grandezza utile è la "luminosità" \mathcal{L} , definita come il numero di urti potenziali nell'unità di tempo fra le particelle di un fascio incidente e i centri diffusori di un bersaglio, ovvero la quantità $\Phi_a \delta_s$. Dalla [6.11](#) si ha

$$\mathcal{L} = \Phi_a \delta_s = \frac{1}{\sigma_b} \frac{dN}{dt} \quad (6.17)$$

per cui la luminosità ha le dimensioni dell'inverso di un'area per l'inverso di un tempo: $[\mathcal{L}] = [m]^{-2} [s]^{-1}$.

Nel caso si tratti non di un fascio collidente contro un bersaglio fisso ma dell'interazione di due fasci, costituiti da successivi pacchetti di particelle³ equispaziati e portati a collidere l'uno contro l'altro in un anello di accumulazione la cui circonferenza sia lunga C , si definisce la luminosità secondo il seguente ragionamento: si supponga vi siano k pacchetti di particelle, circolanti ognuno con velocità di modulo v , e si indichino rispettivamente con N_a ed N_b i numeri di particelle presenti nei pacchetti circolanti in un verso e nel verso opposto. Opportuni campi magnetici li portano a collidere in un particolare punto della traiettoria circolare un numero pari a $(k v)/C$ volte al secondo. La luminosità risulta quindi essere

$$\mathcal{L} = \frac{(N_a N_b k v)/C}{A} \quad (6.18)$$

dove A rappresenta l'area della sezione retta del volume d'intersezione dei fasci in corrispondenza della zona in cui avviene l'urto.

Naturalmente la luminosità aumenta al migliorare della focalizzazione dei fasci entro un'area A che in questo caso appunto diminuisce in corrispondenza della zona d'interazione.

Si definisce anche la *luminosità integrata* come

$$\mathcal{L}_{int} = \int \mathcal{L} dt \quad (6.19)$$

³Si veda il Cap. [1](#) sugli acceleratori.

Il numero $N(\Delta t)$ di interazioni osservabili in un certo intervallo di tempo Δt coincide quindi col prodotto fra la luminosità integrata nell'arco di tempo Δt e la relativa sezione d'urto totale σ_{Tot}

$$N(\Delta t) = \mathcal{L}_{int} \cdot \sigma_{Tot} \quad (6.20)$$

Sperimentalmente si osserva in pratica sempre soltanto una frazione dei prodotti di tutte le interazioni che hanno luogo fra particelle incidenti e bersagli, e ciò per svariati motivi, spesso anche legati a difficoltà tecniche nel riuscire ad osservare contemporaneamente i prodotti di reazione emessi in ogni possibile direzione, o ad esempio per motivi di indisponibilità finanziaria a poter disporre strumenti di rivelazione adeguati in modo tale da coprire contemporaneamente tutte le possibili direzioni d'emissione dei prodotti di reazione. La luminosità è nondimeno un parametro qualificante fondamentale delle macchine acceleratrici.

Sezione d'urto differenziale

Spesso è importante poter distinguere i prodotti di reazione in funzione della loro direzione d'emissione e questo richiede di tassellare l'intero angolo solido di possibile emissione ($\Omega = 4\pi$) in sottoinsiemi $\Delta\Omega$ di cui si conosca l'orientazione dell'asse.

Facendo come esempio riferimento allo schema in figura 6.4, dove si ipotizza un fascio incidente su un bersaglio fisso rispetto al laboratorio, si chiami $\Delta\Omega \simeq A_D/r^2$ l'angolo solido sotteso da un rivelatore di area attiva A_D , posto a distanza r dal punto d'interazione, con $r \gg \sqrt{A_D}$. Il tasso di

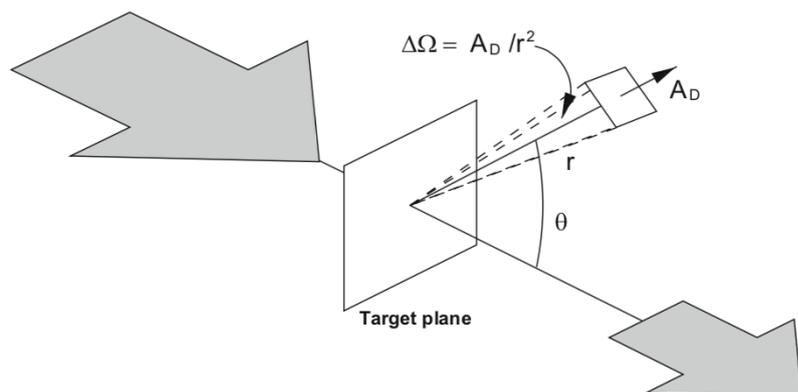


Figura 6.4: Sezione d'urto differenziale: solo le particelle diffuse entro l'angolo solido $\Delta\Omega$ sono poi raccolte dal rivelatore di area attiva A_D

reazioni visibili da questo rivelatore è allora proporzionale a quella che viene

chiamata *sezione d'urto differenziale*

$$\frac{d\sigma(E, \vartheta, \varphi)}{d\Omega} \quad \text{con, in coord. polari sferiche} \quad d\Omega = \text{sen}\vartheta \, d\vartheta d\varphi \quad (6.21)$$

in cui si è qui evidenziata anche la dipendenza dall'energia in gioco nel canale d'ingresso della reazione stessa, ed è dato da

$$\frac{dN(E, \vartheta, \varphi, \Delta\Omega)}{dt} = \mathcal{L} \frac{d\sigma(E, \vartheta, \varphi)}{d\Omega} \Delta\Omega \quad (6.22)$$

Nel caso in cui il rivelatore utilizzato sia in grado di misurare anche l'energia E' delle particelle diffuse, si può definire e misurare anche quella che viene chiamata *sezione d'urto doppiamente differenziale*, indicata con: $d^2\sigma(E, E', \vartheta, \varphi)/d\Omega dE'$.

La sezione d'urto totale σ_{Tot} si calcola quindi integrando la sezione d'urto doppiamente differenziale sull'intero angolo solido e su tutto lo spettro delle energie di diffusione

$$\sigma_{Tot}(E) = \int_0^{E'_{max}} \int_{4\pi} \frac{d^2\sigma(E, E', \vartheta, \varphi)}{d\Omega dE'} d\Omega dE' \quad (6.23)$$

La conoscenza della sezione d'urto differenziale di un processo che conduce un sistema dallo stato iniziale i allo stato finale f , permette di calcolare la probabilità di transizione nell'unità di tempo $dP_{i \rightarrow f}/dt$ associata ad ogni particella bersaglio

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{dP_{i \rightarrow f}}{dt} \frac{V}{v_a} \quad (6.24)$$

essendo, $V = A \times \Delta z$ il volume efficace del bersaglio e v_a il modulo della velocità di ogni particella incidente.

A seconda del problema studiato, lo stato finale f può essere caratterizzato da diverse variabili associate alla particella diffusa. Una quantità tipicamente considerata è l'impulso \vec{p} della particella diffusa nello stato finale. In tal caso la sezione d'urto totale σ_{Tot} del processo si ottiene integrando la sezione d'urto differenziale $d\sigma/d\vec{p}$ su tutti i possibili valori di \vec{p}

$$\sigma_{Tot} = \int_f \frac{d\sigma}{d\vec{p}} d\vec{p} \quad (6.25)$$

La quantità $d\vec{p}$ può poi essere esplicitata in diverse coordinate, a seconda della migliore geometria nella quale trattare il problema specifico

$$\begin{aligned} d\vec{p} &\equiv dp'_x dp'_y dp'_z && \text{cartesiane ortogonali} \\ &\equiv p'^2 dp' \text{sen}\vartheta' d\vartheta' d\varphi' && \text{sferiche} \\ &\equiv p'_\perp dp'_\perp dp'_\parallel d\varphi' && \text{cilindriche} \end{aligned} \quad (6.26)$$

dove con i simboli " \parallel ", " \perp " e " φ " si intendono rispettivamente le coordinate assiale, radiale e angolare, come anche trattato nell'Appendice [F.1](#).

Sezione d'urto invariante

Il sistema di riferimento naturale per un processo d'urto è quello del centro di massa delle particelle che interagiscono, e può non coincidere col sistema di riferimento in cui si effettua la misura.

Le caratteristiche di un processo non devono del resto dipendere dal particolare sistema di riferimento scelto per la misura, infatti la sezione d'urto è definita sostanzialmente come una superficie ortogonale alla direzione del moto delle particelle incidenti, ed è quindi un invariante relativistico.

Ricordando le leggi di trasformazione delle variabili dal sistema del laboratorio al sistema del centro di massa, come riportato in Appendice [F.1](#), si può esprimere la sezione d'urto differenziale in funzione di variabili invarianti.

Le componenti dell'impulso si trasformano come indicato dalla [F.23](#) e quindi $d\vec{p}$ non è un invariante, come non lo è $d\vec{p}_{\parallel}$, mentre invece lo sono $d\vec{p}_{\perp}$ e $d\sigma$.

Il rapporto $d\vec{p}_{\parallel}/E$ è invariante, essendo $(E/c) = (p_{\perp}^2 + p_{\parallel}^2 + m^2 c^2)^{1/2}$,

$$\begin{aligned} dp'_{\parallel} &= \gamma (dp_{\parallel} - \beta dE) = \gamma dp_{\parallel} \left(1 - \frac{\beta p_{\parallel}}{E}\right) = \\ &= \frac{\gamma E - \beta \gamma p_{\parallel}}{E} dp_{\parallel} = \frac{E'}{E} dp_{\parallel} \end{aligned} \quad (6.27)$$

Di conseguenza la *sezione d'urto invariante*

$$E \frac{d\sigma}{d\vec{p}} \quad (6.28)$$

è indipendente dal sistema di riferimento scelto per effettuare la misura.

6.2 Invarianti cinematici

Si introducono ora alcuni concetti fondamentali per il corretto approccio relativistico allo studio dei fenomeni d'urto.

I trivettori saranno indicati con la freccia, e il loro modulo ponendoli entro barre verticali, per distinguerli dai quadrivettori.

La massa m di un sistema fisico, quale un insieme di particelle, è spesso detta *massa invariante*, anche se l'aggettivo "invariante" è pleonastico dato che la massa, essendo una proprietà intrinseca del sistema fisico, è necessariamente invariante⁴.

La sua espressione matematica è semplice solo per particelle fra loro "non interagenti". In tal caso, per n particelle di energie E_i e impulsi \vec{p}_i , si ha

$$m = \frac{1}{c^2} \sqrt{E^2 - \vec{p}^2 c^2} = \frac{1}{c^2} \sqrt{\left(\sum_{i=1}^n E_i\right)^2 - \left(\sum_{i=1}^n \vec{p}_i c\right)^2} \quad (6.29)$$

Il quadrato della massa, solitamente indicato con s , è anch'esso una quantità invariante

$$m^2 = s = \frac{1}{c^4} (E^2 - \vec{p}^2 c^2) = \frac{1}{c^4} \left[\left(\sum_{i=1}^n E_i\right)^2 - \left(\sum_{i=1}^n \vec{p}_i c\right)^2 \right] \quad (6.30)$$

che risulta sempre positiva o nulla

$$s = m^2 \geq 0 \quad (6.31)$$

Ricordando ora che il sistema del centro di massa (CM) è definito come quello in cui risulta nullo l'impulso totale del sistema, si ottiene in esso

$$s = m^2 = \frac{1}{c^4} \left(\sum_{i=1}^n E_i^*\right)^2 \quad (6.32)$$

dove le E_i^* rappresentano le energie nel (CM); la massa di un sistema di particelle non interagenti coincide quindi, a meno del fattore $1/c^2$, con l'energia del sistema stesso nel (CM).

Si consideri ora il sistema fisico costituito da due particelle non interagenti, per cui sono definite le variabili cinematiche in figura [6.5](#). L'espressione per s vale qui

$$\begin{aligned} s &= \frac{1}{c^4} \left[(E_1 + E_2)^2 - (\vec{p}_1 + \vec{p}_2)^2 c^2 \right] = \\ &= \frac{1}{c^4} \left[(m_1^2 + m_2^2) c^4 + 2E_1 E_2 - 2\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2 c^2 \right] \end{aligned} \quad (6.33)$$

⁴Sul concetto di invarianza della massa si veda: L.B. Okun, "The concept of mass" - Physics Today, June (1989) 31.

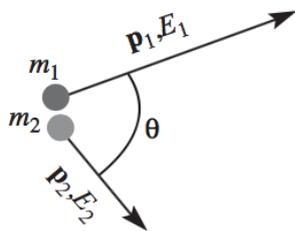


Figura 6.5: Sistema di due particelle non interagenti.

e ricordando che $\vec{\beta}_i = \vec{p}_i c / E_i$, si ha

$$s = \frac{1}{c^4} \left[(m_1 + m_2) c^4 + 2E_1 E_2 (1 - \vec{\beta}_1 \cdot \vec{\beta}_2) \right] \quad (6.34)$$

In questo caso e anche in generale, si ha quindi che la massa di un sistema non coincide con la somma delle masse dei costituenti, anche se questi non interagiscono fra loro.

Dalla [6.29](#) discende che le conservazioni di energia e impulso implicano che anche la massa di un sistema isolato sia conservata: in una reazione generica che si tratti di un urto o di un decadimento, la massa del sistema fisico iniziale coincide sempre con la massa del sistema fisico finale, e per la stessa ragione la somma delle masse dei corpi presenti nello stato iniziale è generalmente diversa dalla somma delle masse dei corpi presenti nello stato finale.

Si consideri ora un processo d'urto fra due particelle a e b nello stato iniziale

$$a + b \longrightarrow c + d + e + \dots \quad (6.35)$$

ricordando che stati eccitati di una particella vanno considerati come particelle diverse.

Tipicamente la durata dell'interazione, ovvero dell'urto, è così breve da poterla considerare come trascurabile e in tal caso l'urto è visto come "istantaneo", il che permette di assumere come "libere" sia le particelle dello stato iniziale che quelle dello stato finale.

Nel seguito si considereranno i due sistemi di riferimento del centro di massa (CM) e del laboratorio (SL) introdotti in precedenza, ricordando che il secondo coincide con quello in cui prima dell'urto, una delle due particelle o nuclei, detta *bersaglio*, è a riposo mentre l'altra, detta *proiettile*, si muove verso il bersaglio. Si indichi con a il proiettile e siano m_a , \vec{p}_a ed E_a rispettivamente la sua massa, il suo impulso e la sua energia; sia dunque b il bersaglio di massa m_b . L'espressione per s calcolata nel (SL) è

$$s = \frac{1}{c^4} \left[(E_a + m_b c^2)^2 - p_a^2 c^2 \right] = (m_a^2 + m_b^2) + \frac{2m_b E_a}{c^2} \quad (6.36)$$

Se dunque l'energia del proiettile è molto maggiore degli equivalenti energetici delle masse sia del proiettile stesso che del bersaglio, si può approssimare la [6.36](#) con

$$s \simeq \frac{2m_b E_a}{c^2}, \quad \text{per} \quad E_a \gg m_a c^2, m_b c^2 \quad (6.37)$$

Nelle figure [6.6](#) a) e b) sono illustrati gli stati iniziali del sistema fisico $a + b$ nel (SL) e rispettivamente nel (CM).

Nel caso in cui durante l'urto abbia luogo la produzione di particelle a

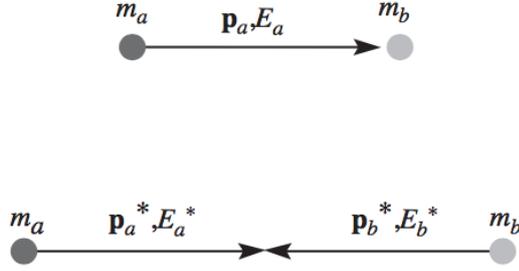


Figura 6.6: a) Sistema del Laboratorio (LS); b) sistema del centro di massa (CM).

spese di frazioni dell'energia disponibile nel canale d'ingresso, è importante conoscere o saper individuare le soglie oltre le quali ciò possa aver luogo. L'energia eventualmente a disposizione è l'energia totale nel (CM) che come si deduce da [6.37](#) cresce proporzionalmente alla radice quadrata dell'energia E_a dei proiettili nel (LS).

Se ci si pone nel (CM), in cui i due impulsi delle particelle incidenti sono uguali in modulo e opposti in verso, come mostrato in figura [6.6](#) b), e se le energie cinetiche sono tali che $E_a^* \gg m_a c^2$ ed $E_b^* \gg m_b c^2$, si trova che le energie sono espresse da valori che numericamente si discostano poco da quelli che esprimono i valori degli impulsi nelle stesse unità di misura a meno di c , ovvero si può scrivere: $E_a^* \approx |\vec{p}_a^*|$ ed $E_b^* \approx |\vec{p}_b^*|$; ciò implica però che in questi limiti sia anche $E_a^* \simeq E_b^* = E^*$ per cui si può porre

$$s = \left(\frac{E_a^* + E_b^*}{c^2} \right)^2 \approx \left(\frac{2E^*}{c^2} \right)^2 \quad (6.38)$$

essendo naturalmente $E^* \gg m_a c^2$ ed $E^* \gg m_b c^2$. L'energia totale a disposizione nel (CM) è quindi proporzionale all'energia cinetica delle particelle collidenti ed è anche tutta disponibile per la produzione di nuove particelle; nel (SL) invece solo una parte di tale energia è disponibile per la produzione di nuove particelle, dovendo conservarsi anche l'impulso totale. Si consideri ora un urto con due soli corpi nello stato finale

$$a + b \longrightarrow c + d \quad (6.39)$$

le cui variabili cinematiche per gli stati iniziale e finale sono mostrate in figura 6.7, sia per il sistema del laboratorio (LS) che per quello del centro di massa (CM).

Si osservi che nel (CM) i valori assoluti degli impulsi prima e dopo l'urto

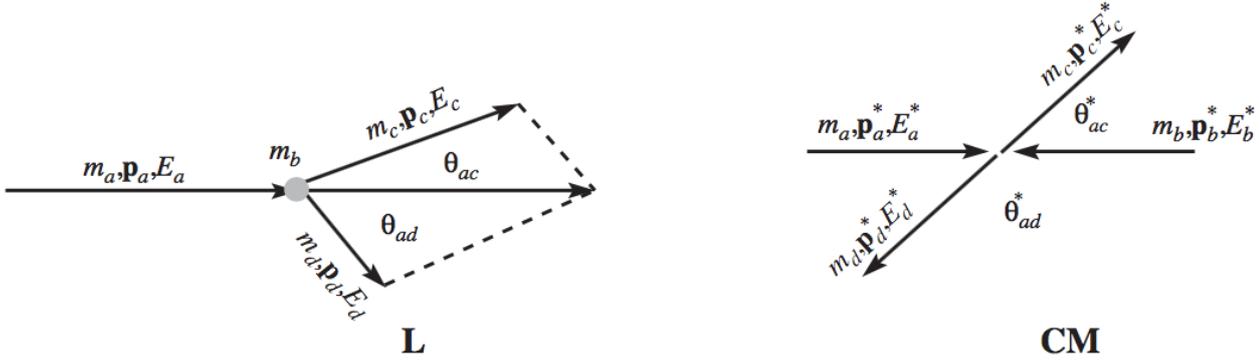


Figura 6.7: Variabili cinematiche nel caso di un urto $a + b \rightarrow c + d$, nel (LS) e nel (CM)

coincidono solo nel caso di urto perfettamente elastico.

Dato che s è un invariante deve coincidere in entrambi i sistemi di riferimento, e la sua conservazione implica inoltre che il suo valore prima dell'urto coincida col suo valore dopo l'urto. In qualunque sistema di riferimento ci si ponga si ha dunque

$$\begin{aligned} s &= \frac{1}{c^4} \left[(E_a + E_b)^2 - (\vec{p}_a + \vec{p}_b)^2 c^2 \right] = \\ &= \frac{1}{c^4} \left[(E_c + E_d)^2 - (\vec{p}_c + \vec{p}_d)^2 c^2 \right] \end{aligned} \quad (6.40)$$

il che è di estrema utilità nell'affrontare lo studio cinematico delle reazioni a due corpi.

Sempre nel caso di urti con due corpi sia nel canale d'ingresso che in quello d'uscita dalla reazione, si possono introdurre altre due utili e importanti variabili cinematiche, entrambi con le dimensioni del quadrato di una massa: una è il quadri-impulso trasferito dalla particella incidente a alla particella uscente c , indicato con t ; l'altra è il quadri-impulso trasferito dalla particella incidente a alla particella uscente d , indicato con u . Si ha dunque

$$t \equiv \frac{1}{c^4} \left[(E_c - E_a)^2 - (\vec{p}_c - \vec{p}_a)^2 c^2 \right] \quad (6.41)$$

da cui, tenendo conto della conservazione dell'energia e dell'impulso si ottiene,

$$t = \frac{1}{c^4} \left[(E_d - E_b)^2 - (\vec{p}_d - \vec{p}_b)^2 c^2 \right] \quad (6.42)$$

Similmente per u

$$\begin{aligned} u &\equiv \frac{1}{c^4} \left[(E_d - E_a)^2 - (\vec{p}_d - \vec{p}_a)^2 c^2 \right] \\ &= \frac{1}{c^4} \left[(E_c - E_b)^2 - (\vec{p}_c - \vec{p}_b)^2 c^2 \right] \end{aligned} \quad (6.43)$$

Le tre variabili s , t ed u ora introdotte sono dette *variabili di Mandelstam* e possono essere espresse in termini dei quadri-impulsi delle particelle coinvolte

$$\begin{aligned} s &\equiv \frac{1}{c^2} (p_a + p_b)^2 = \frac{1}{c^2} (p_c + p_d)^2 \\ t &\equiv \frac{1}{c^2} (p_a - p_c)^2 = \frac{1}{c^2} (p_b - p_d)^2 \\ u &\equiv \frac{1}{c^2} (p_a - p_d)^2 = \frac{1}{c^2} (p_b + p_c)^2 \end{aligned} \quad (6.44)$$

Esse non sono indipendenti, e si trova

$$s + t + u = m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 + m_d^2 \quad (6.45)$$

Inoltre vale

$$t \leq 0 \quad , \quad u \leq 0 \quad (6.46)$$

Nel caso in cui le velocità in gioco siano molto alte e si possano quindi trascurare in prima approssimazione i contributi delle masse ai quadri-impulsi, si ha

$$\begin{aligned} s &\equiv \frac{1}{c^2} (p_a + p_b)^2 \approx \frac{2p_a \cdot p_b}{c^2} \approx \frac{2p_c \cdot p_d}{c^2} \\ t &\equiv \frac{1}{c^2} (p_a - p_c)^2 \approx -\frac{2p_a \cdot p_c}{c^2} \approx -\frac{2p_b \cdot p_d}{c^2} \\ u &\equiv \frac{1}{c^2} (p_a - p_d)^2 \approx -\frac{2p_a \cdot p_d}{c^2} \approx -\frac{2p_b \cdot p_c}{c^2} \end{aligned} \quad (6.47)$$

Se contrariamente a quanto visto finora in questo paragrafo si considera un sistema di particelle fra loro interagenti, si constata immediatamente che la sua energia totale non coincide con la somma delle energie delle singole particelle ($E \neq \sum_{i=1}^n E_i$) in quanto il campo responsabile dell'interazione contiene esso stesso dell'energia. Similmente neppure l'impulso totale corrisponde alla somma degli impulsi di tutte le particelle ($\vec{P} \neq \sum_{i=1}^n \vec{p}$), dato che al campo è tipicamente associato anche dell'impulso.

Ciò può rendere complicati i calcoli; nel caso in cui il campo risulti indipendente dal moto della particella, come per la diffusione coulombiana, il problema può semplificarsi.

6.3 Cinematica per urti di particelle leggere su particelle massive

Si veda ora la trattazione cinematica relativistica che permette di descrivere le interazioni in cui si hanno particelle leggere che urtano bersagli massivi.

La componente zero del quadrivettore spazio-tempo è proporzionale al tempo, e quella del quadri-impulso è proporzionale all'energia

$$\begin{aligned} x &= (x_0, x_1, x_2, x_3) = (ct, \vec{x}) \\ p &= (p_0, p_1, p_2, p_3) = (E/c, \vec{p}) \end{aligned} \quad (6.48)$$

Il prodotto scalare Lorentz-invariante di due quadrivettori a e b è definito come

$$a \cdot b = a_0 b_0 - a_1 b_1 - a_2 b_2 - a_3 b_3 = a_0 b_0 - \vec{a} \cdot \vec{b} \quad (6.49)$$

Applicandolo al quadri-impulso si ha

$$p^2 = \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2 \quad (6.50)$$

Si noti che il quadrato del quadri-impulso coincide col quadrato della massa m a riposo moltiplicata per c^2 . Essendo un invariante deve infatti avere lo stesso valore rispetto a qualsiasi sistema di riferimento inerziale e scegliendo quello in cui la particella è a riposo, ne consegue $\vec{p} = 0$ ed $E = mc^2$, da cui

$$p^2 = m^2 c^2 \quad \text{ed} \quad m = \frac{\sqrt{p^2}}{c} \quad (6.51)$$

con m la *massa invariante*.

Dalle relazioni [6.50](#) e [6.51](#) si desume la relazione relativistica fra energia e impulso

$$E^2 - \vec{p}^2 c^2 = m^2 c^4 \quad (6.52)$$

e quindi

$$E \approx |\vec{p}| c \quad \text{se} \quad E \gg mc^2 \quad (6.53)$$

che nel caso di elettroni è soddisfatta già per energie di pochi MeV.

Si consideri come esempio la diffusione di un elettrone di massa m_e e quadri-impulso p da parte di una particella di massa M e quadri-impulso P , come schematizzato in figura [6.8](#). La conservazione di energia e impulso implica che la somma dei quadri-impulsi prima dell'urto deve uguagliare quella dopo l'urto

$$p + P = p' + P' \quad (6.54)$$

e quadrando

$$p^2 + 2pP + P^2 = p'^2 + 2p'P' + P'^2 \quad (6.55)$$

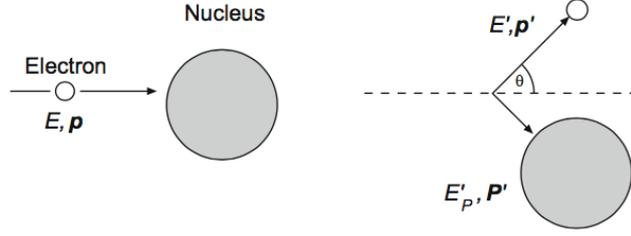


Figura 6.8: Interazione elastica fra un elettrone e un nucleo.

Nel caso di diffusione elastica le masse m_e ed M delle particelle collidenti restano invariate, e di conseguenza da

$$p^2 = p'^2 = m_e^2 c^2 \quad \text{e} \quad P^2 = P'^2 = M^2 c^2 \quad (6.56)$$

segue che

$$p \cdot P = p' \cdot P' \quad (6.57)$$

Tipicamente in questo tipo di interazioni si rivela soltanto l'elettrone diffuso e non la particella di rinculo. In tal caso si utilizza quindi la relazione

$$p \cdot P = p' \cdot (p + P - p') = p'p + p'P - m_e^2 c^2 \quad (6.58)$$

Ponendosi nel Sistema del Laboratorio (SL), in cui la particella di massa M e quadri-impulso P è a riposo prima dell'urto, si ha

$$\begin{aligned} p &= (E/c, \vec{p}) & p' &= (E'/c, \vec{p}') \\ P &= (Mc, \vec{0}) & P' &= (E'_P/c, \vec{P}') \end{aligned} \quad (6.59)$$

per cui, dalla [6.58](#) discende

$$E M c^2 = E' E - \vec{p} \cdot \vec{p}' c^2 + E' M c^2 - m_e^2 c^4 \quad (6.60)$$

Ad alte energie si può trascurare il termine $m_e^2 c^4$ e si ha anche, con buona approssimazione, $E \approx |\vec{p}| c$. Si ottiene in tal modo una relazione fra l'energia E' dell'elettrone diffuso, la sua energia E prima dell'urto e l'angolo ϑ di diffusione nel (SL)

$$E M c^2 \simeq E' E (1 - \cos\vartheta) + E' M c^2$$

ovvero

$$E' \simeq \frac{E}{1 + \frac{E}{M c^2} (1 - \cos\vartheta)} \quad (6.61)$$

L'energia di rinculo trasferita al bersaglio di massa M corrisponde alla differenza $E - E'$. Nel caso di diffusione elastica la relazione fra energia E' e

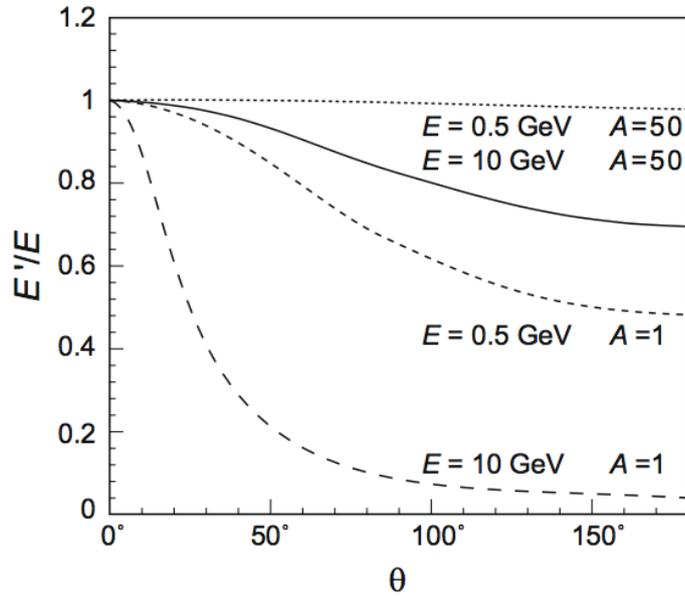


Figura 6.9: E'/E in funzione di ϑ per diffusione elastica di elettroni su nuclei con $A = 1$ e $A = 50$.

angolo ϑ di diffusione è quindi biunivoca, mentre ciò non vale nel caso di diffusione anelastica.

Dalla [6.61](#) si deduce che l'energia di rinculo del bersaglio cresce al crescere del rapporto fra la cosiddetta massa relativistica E/c^2 dell'elettrone e la massa M del bersaglio, in accordo con quanto si ottiene dall'approccio classico alla diffusione.

In figura [6.9](#) è riportato l'andamento di E'/E rispetto all'angolo ϑ di diffusione, per elettroni di energia relativamente bassa (0.5 GeV) e relativamente alta (10 GeV), incidenti su nuclei con $A = 1$ e $A = 50$. Per $E = 0.5$ GeV, nel caso di urto su nuclei con $A = 50$, si ha $(E - E')/E \simeq 0.02$.

6.4 La sezione d'urto di Rutherford: approccio classico

Nel classico esperimento di Rutherford, Geiger e Mardsen, i fasci incidenti erano costituiti da particelle α emesse da una sorgente radioattiva con energie cinetiche di alcuni MeV, che venivano fatte incidere su bersagli di atomi d'oro sotto forma di sottilissimi fogli; si trattava quindi di strutture non propriamente puntiformi e soggette entrambe sia all'interazione elettromagnetica che a quella nucleare. La relativamente bassa energia cinetica dei proiettili α non riesce però a portarli a una distanza dal nucleo sufficiente a sentire l'effetto di quest'ultima, dati anche i valori delle cariche elettriche di proiettili e bersagli.

In queste ipotesi è quindi ragionevole trattare in buona approssimazione il problema come se consistesse nell'urto di particelle puntiformi contro bersagli puntiformi, sotto l'effetto della sola interazione elettromagnetica.

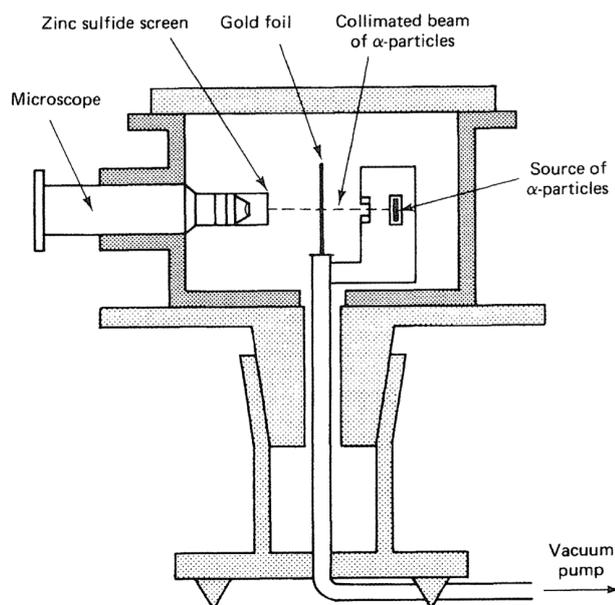


Figura 6.10: Schema dell'apparato utilizzato da H.W. Geiger e E. Mardsen per l'esperimento sulla diffusione delle particelle α da un bersaglio d'oro.

Nell'esperimento originale, dopo le deflessioni subite, le particelle α venivano osservate e contate tramite i lampi di fluorescenza che provocavano in un piccolo schermo di solfuro di zinco accoppiato a un microscopio, come in figura [6.10](#).

Qui, senza con ciò perdere in generalità nel risultato, faremo l'ulteriore ipotesi che la massa di ogni proiettile sia molto inferiore a quella di ogni bersaglio. Per proiettili di carica unitaria si può ad esempio ragionevolmente pensare a

elettroni o muoni, entrambi insensibili all'interazione forte. Supponendo di utilizzare elettroni con impulso pari a $p = 200 \text{ MeV}/c$, la lunghezza d'onda di De Broglie ad essi associata $\lambda = \hbar/p$, è di circa 10^{-15} m .

Trattiamo quindi ora in modo classico il problema della deflessione, per effetto dell'interazione puramente elettromagnetica, di particelle puntiformi di massa m e carica Z_1e , incidenti su un nucleo (centro diffusore) anch'esso puntiforme, di massa $M \gg m$ e carica totale Z_2e .

Consideriamo il nucleo inizialmente a riposo nell'origine O di un sistema di riferimento (x, y, z) solidale con l'osservatore, cioè il sistema del laboratorio (SL), e supponiamo monocinetico il fascio di particelle incidenti e collimate lungo la direzione dell'asse z , come mostrato in figura [6.11](#).

Il problema ha quindi una simmetria cilindrica in cui z è l'asse di simmetria. Si ipotizzi anche che la condizione $m \ll M$ sia tale da poter trascurare, dopo l'urto, il rinculo di M che quindi permarrà praticamente fermo in SL come se avesse massa ∞ . Nel caso della misura originale di Rutherford il rapporto fra le masse di proiettile e bersaglio è pari a circa 2×10^{-2} .

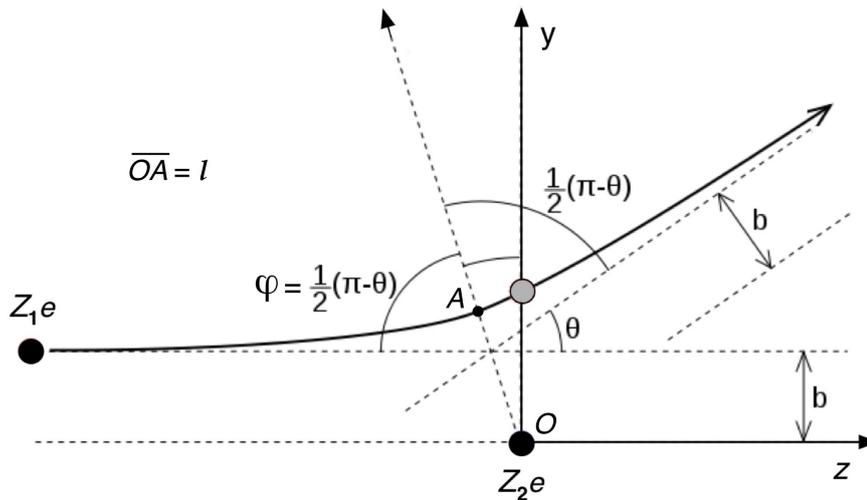


Figura 6.11: Diffusione alla Rutherford.

Sia $V = Z_2e/(4\pi\epsilon_0 r)$ il potenziale generato dal centro diffusore carico e si consideri la generica particella del fascio incidente che a distanza infinita dal centro diffusore, quindi quando non ne sente ancora l'influenza e si ha $\lim_{r \rightarrow \infty} V(r) = 0$, percorre una traiettoria di avvicinamento con velocità di modulo v lungo una retta parallela all'asse z e distante b da esso. La quantità b è detta *parametro d'urto* e consiste nella distanza alla quale la particella incidente sarebbe passata dal centro diffusore in assenza di interazione.

Da un punto di vista classico il problema consiste nel determinare l'angolo ϑ di deflessione sulla traiettoria della particella in funzione di b , ovvero $\vartheta(b)$.

Si procede determinando l'inverso, ovvero $b(\vartheta)$.

Il potenziale è di tipo centrale-kepleriano e sia $E_T = E_k + E_P$ l'energia totale a disposizione del sistema particella incidente e centro diffusore, essendo E_k l'energia cinetica ed E_P l'energia potenziale della particella incidente. La traiettoria assunta da questa è dunque una conica coincidente con un'ellisse se $E_T < 0$ e con un'iperbole se $E_T > 0$. Nel presente caso $E_T > 0$ dato che a distanza infinita, prima dell'urto, $V(r) = 0$ e $E_T = E_k = mv^2/2$; la traiettoria è quindi un'iperbole.

Si supponga, senza con ciò perdere in generalità nel risultato finale, che le forze siano repulsive, ovvero che le cariche di proiettile e bersaglio abbiano segno concorde, per cui il proiettile può ad esempio essere un positrone o un muone positivo.

Applicando le conservazioni di momento angolare ed energia si ha che a distanza ∞ il momento angolare e l'energia valgono rispettivamente, mbv ed $mv^2/2$, mentre nel punto A di massimo avvicinamento valgono $mv_A l$ ed $mv_A^2/2 + Z_1 Z_2 e^2 / (4\pi\epsilon_0 l)$. Quindi

$$b = \frac{lv_A}{v} \quad , \quad v^2 = v_A^2 + \frac{2Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0 ml} \quad (6.62)$$

Si ponga

$$l_0 = \frac{2Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0 mv^2} = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0 E_k} \quad (6.63)$$

che fissata $E_k = mv^2/2$, corrisponde al punto di massimo avvicinamento possibile A^* per un urto centrale, per il quale è cioè $b = 0$. In A^* è ovviamente $v_{A^*} = 0$. Si ha dunque

$$v^2 = v_A^2 + v^2 \frac{l_0}{l} \quad (6.64)$$

Nel caso d'urto centrale la particella di carica $Z_1 e$ si avvicina al diffusore lungo l'asse z fino alla distanza minima l_0 corrispondente al punto A^* e poi inverte il moto risultando diffusa a un angolo π . Dalle relazioni precedenti si ha

$$v_A^2 = \frac{b^2}{l^2} v^2 \quad , \quad v_A^2 = v^2 \left(1 - \frac{l_0}{l}\right) \quad , \quad b^2 = l^2 \left(1 - \frac{l_0}{l}\right) \quad (6.65)$$

e dalle proprietà geometriche dell'iperbole

$$l = b \cotg \frac{\varphi}{2} \quad (6.66)$$

che sostituito nella terza delle [6.65](#) dà

$$\cotg^2 \frac{\varphi}{2} - \frac{l_0}{b} \cotg \frac{\varphi}{2} - 1 = 0 \quad (6.67)$$

Moltiplicando la [6.67](#) per $\text{sen}^2 \frac{\varphi}{2}$ e ricordando che

$$\operatorname{sen}\varphi = 2 \operatorname{sen}\frac{\varphi}{2} \cos\frac{\varphi}{2}, \text{ e } \cos\varphi = \cos^2\frac{\varphi}{2} - \operatorname{sen}^2\frac{\varphi}{2}$$

si ha

$$l_0 = 2 b \operatorname{cotg}\varphi \quad (6.68)$$

Le relazioni fra gli angoli ϑ e φ desumibili dalla figura [6.11](#) danno

$$\vartheta + 2\varphi = \pi, \text{ da cui: } \operatorname{cotg}\varphi = \operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2} \quad (6.69)$$

e dalle [6.63](#) e [6.68](#) si ottiene

$$b(\vartheta) = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{8\pi\epsilon_0 E_k} \operatorname{cotg}\frac{\vartheta}{2} \quad (6.70)$$

che è la relazione cercata.

Si indichi con n_0 il numero di particelle del fascio incidente che a distanza praticamente infinita dal centro diffusore attraversano l'unità di superficie del piano (x, y) nell'unità di tempo, ottenendo $dN = 2\pi n_0 b db$ per le particelle che sempre nell'unità di tempo, attraversano l'anello circolare fra b e $b + db$. Supponendo ora che il numero di particelle si conservi, che cioè quelle incidenti siano anche tutte e sole quelle diffuse, e considerando quelle diffuse nell'angolo solido compreso fra ϑ e $\vartheta + d\vartheta$ si ha, differenziando la [6.70](#)

$$|db(\vartheta)| = \left| \frac{Z_1 Z_2 e^2}{8\pi\epsilon_0 E_k} d\left(\operatorname{cotg}\frac{\vartheta}{2}\right) \right| = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{8\pi\epsilon_0 E_k} \frac{d\vartheta}{2 \operatorname{sen}^2\vartheta/2} \quad (6.71)$$

dove si prende il valore assoluto per tener conto del fatto che ϑ diminuisce all'aumentare di b .

Sostituendo ora in dN

$$dN(\vartheta) = 2\pi n_0 \left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{8\pi\epsilon_0 E_k} \right)^2 \frac{\operatorname{cotg}\vartheta/2}{2 \operatorname{sen}^2\vartheta/2} d\vartheta \quad (6.72)$$

Essendo $d\Omega(\vartheta) = 2\pi \operatorname{sen}\vartheta d\vartheta$ l'angolo solido nella simmetria cilindrica del problema si ottiene, per la sezione d'urto di diffusione coulombiana o di Rutherford,

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma(\vartheta)}{d\Omega} &= \frac{1}{n_0} \frac{dN(\vartheta)}{d\Omega(\vartheta)} = \left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{8\pi\epsilon_0 E_k} \right)^2 \frac{\operatorname{cotg}\vartheta/2}{2 \operatorname{sen}\vartheta \operatorname{sen}^2\vartheta/2} = \\ &= \left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{8\pi\epsilon_0 E_k} \right)^2 \frac{\cos\vartheta/2}{2 \operatorname{sen}^3\vartheta/2 \cdot 2 \operatorname{sen}\vartheta/2 \cos\vartheta/2} = \\ &= \left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{16\pi\epsilon_0 E_k} \right)^2 \frac{1}{\operatorname{sen}^4\vartheta/2} \end{aligned} \quad (6.73)$$

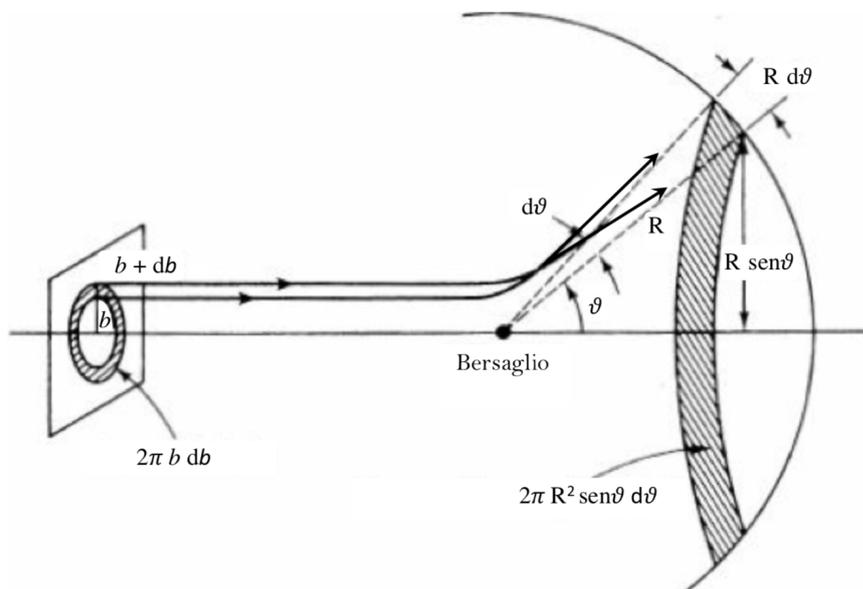


Figura 6.12: Geometria dell'interazione alla Rutherford.

Nell'approccio classico fin'ora seguito $d\sigma(\vartheta)/d\Omega$ rappresenta l'area attraversata a grande distanza dal centro diffusore dalle particelle poi diffuse entro l'angolo solido unitario centrato attorno all'angolo polare ϑ .

Si noti che $d\sigma(\vartheta)/d\Omega$ è indipendente dai segni delle cariche di proiettile e bersaglio e per piccoli angoli diverge come ϑ^{-4} . Ciò in quanto il potenziale coulombiano mantiene il proprio effetto anche a distanza ∞ e quindi anche particelle incidenti con grandi valori di b ne sentono l'effetto.

Il calcolo della sezione d'urto coulombiana totale, ottenuta integrando la $d\sigma(\vartheta)/d\Omega$ su tutto l'angolo solido dà, nelle ipotesi fin'ora fatte, un valore ∞ che non ha ovviamente senso fisico. Un approccio più realistico consiste nel tener conto che la forma di $V(r)$ non è effettivamente proporzionale ad $1/r$ per ogni distanza dal centro diffusore, infatti all'aumentare di b la reale costituzione dei bersagli fa sì che le particelle incidenti comincino a sentire sempre più efficacemente gli effetti delle altre parti costitutive i bersagli stessi, ovvero elettroni atomici e altre strutture cariche che schermano la carica Z_2e del diffusore.

Si veda ora come, sempre classicamente, si modifica il risultato se si tiene anche conto del fatto che la struttura geometrica del centro diffusore non è puntiforme ma occupa una zona estesa di spazio. Si supponga che tale zona abbia forma sferica di raggio r_0 . Per $b > r_0$ il teorema di Gauss assicura che il campo elettrico prodotto dalla carica Z_2e diffondente è lo stesso che si ha con la carica concentrata nel punto O . Se quindi $l_0 > r_0$, la traiettoria della particella incidente di carica Z_1e si svolge tutta esternamente alla regione

in cui è distribuita la carica bersaglio, e di conseguenza la relazione fra b e ϑ resta invariata, da cui l'uguaglianza anche della $d\sigma(\vartheta)/d\Omega$. Se invece $l_0 < r_0$, che implica energie cinetiche che soddisfino la condizione $E_k > E_{k,0} = Z_1 Z_2 e^2 / (4\pi\epsilon_0 r_0)$, si deduce che l'effetto della spazialità della carica diffondente si percepisce soltanto per angoli di diffusione maggiori di un valore limite ϑ_0 definito dalla condizione

$$r_0 = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{8\pi\epsilon_0 E_k} \cotg \frac{\vartheta_0}{2} \quad (6.74)$$

L'osservazione sperimentale delle deviazioni a grandi angoli nella sezione d'urto differenziale misurata, confrontata con quanto previsto per diffusione da bersagli puntiformi, permette di stimare r_0 . Una valutazione dei risultati non può naturalmente prescindere dal tener conto anche delle dimensioni finite del proiettile.

Si consideri la classica misura di Rutherford, con fasci di particelle α incidenti su un bersaglio di ^{197}Au ; l'energia delle particelle α da decadimento radioattivo utilizzate raggiungeva valori massimi di poco inferiori agli 8 MeV, insufficienti a far sì che anche nelle condizioni geometriche di massimo possibile avvicinamento l_0 al nucleo bersaglio, cioè con parametro d'urto $b = 0$, potesse essere $l_0 \simeq r_0$. Rutherford questo lo aveva intuito e pensava giustamente che l'effetto delle dimensioni nucleari si sarebbe dovuto manifestare, al crescere dell'energia cinetica delle α incidenti, con una deviazione della sezione d'urto da quella ottenuta considerando esclusivamente l'interazione coulombiana.

Al crescere dell'energia le particelle α avrebbero dovuto infatti spingersi così vicine al nucleo da sentire efficacemente gli effetti dell'interazione nucleare, oltre a quelli puramente coulombiani.

Una verifica sperimentale richiedeva ovviamente di poter disporre di acceleratori in grado di produrre particelle α di energie crescenti fino e oltre a quelle di soglia per l'effetto, come mostrato in figura [6.13](#).

6.4.1 I risultati dell'esperimento di Rutherford

Le misure condotte da Geiger e Mardsen sfruttando fasci di particelle α prodotti da sorgenti permisero di verificare inequivocabilmente tre aspetti fondamentali della formula di Rutherford: la dipendenza da Z^2 , quella da $E_{k,a}^{-2}$ e quella da $(\text{sen}\vartheta/2)^{-4}$. I dati da loro ottenuti, graficati nelle figure da [6.14](#) a [6.15](#), mostrano un eccellente accordo con le previsioni della formula. L'aspetto più notevole dell'esperimento di diffusione che condusse Rutherford a sviluppare la sua ipotesi di struttura atomica fu la frazione di particelle α diffuse ad angoli grandi, superiori a 90° . Considerando ad esempio un foglio d'oro dello spessore di 2.0×10^{-6} m su cui incidono α da 8 MeV, che è circa la massima ottenibile da sorgenti, si ha che tutte le particelle α incidenti con un parametro d'urto $b \leq 14$ fm e che vengono deviate oltre 90°

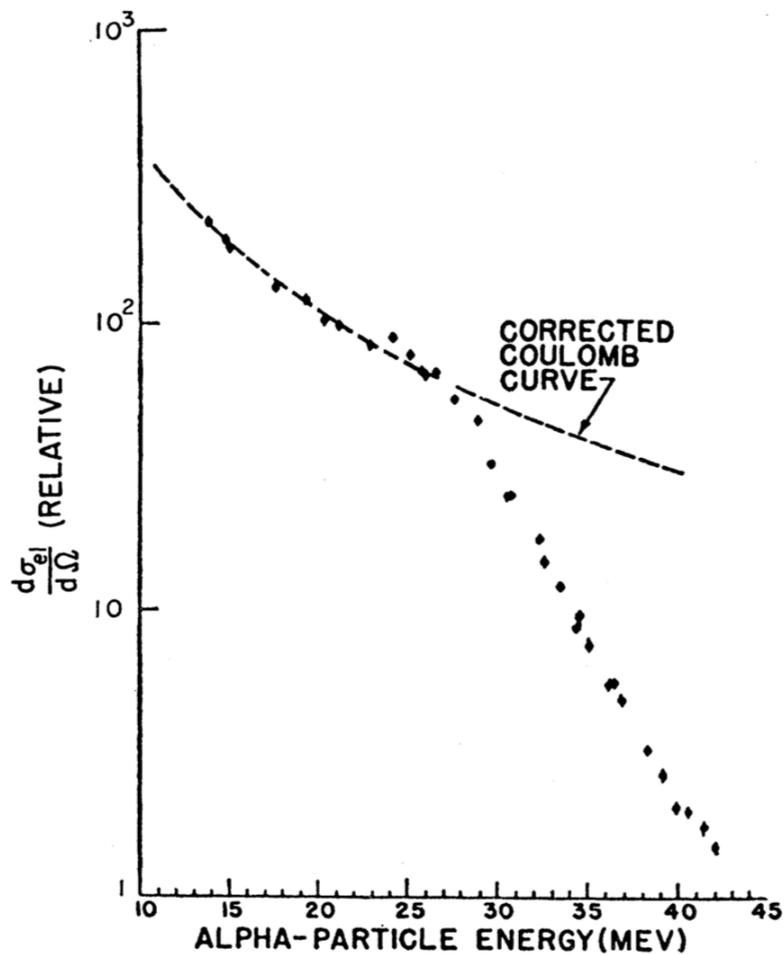


Figura 6.13: $d\sigma(\vartheta)/d\Omega$ della reazione $\alpha + {}^{197}\text{Au}$, per $\vartheta = 60^\circ$ a energie crescenti. Oltre 27 MeV i dati si scostano dall'andamento coulombiano. Dalla [6.74](#) si stima r_0 . [Eisberg & Porter, Rev.Mod.Phys. 33 (1961) 190]

sono una frazione pari a 7.5×10^{-5} del totale, e si tratta di una quantità cospicua, giustificabile solo con l'ipotesi che vi siano nel bersaglio centri diffusori solidi e compatti.

Si guardi ad esempio al caso di diffusione a piccoli angoli prodotta da un bersaglio quale il foglio d'oro considerato, con circa 12×10^{18} nuclei/cm², che significa una spaziatura media di circa 3×10^{-12} m fra nucleo e nucleo in direzione trasversale rispetto all'asse del fascio. Ciò implica che i 2/3 circa delle particelle α incidenti hanno un parametro d'urto $b \geq 10^{-12}$ m. L'angolo di diffusione associato a questo valore di b è di 1.6° , per cui si può affermare che l'angolo medio di diffusione è dell'ordine di $\vartheta_m \simeq 1^\circ$ o inferiore.

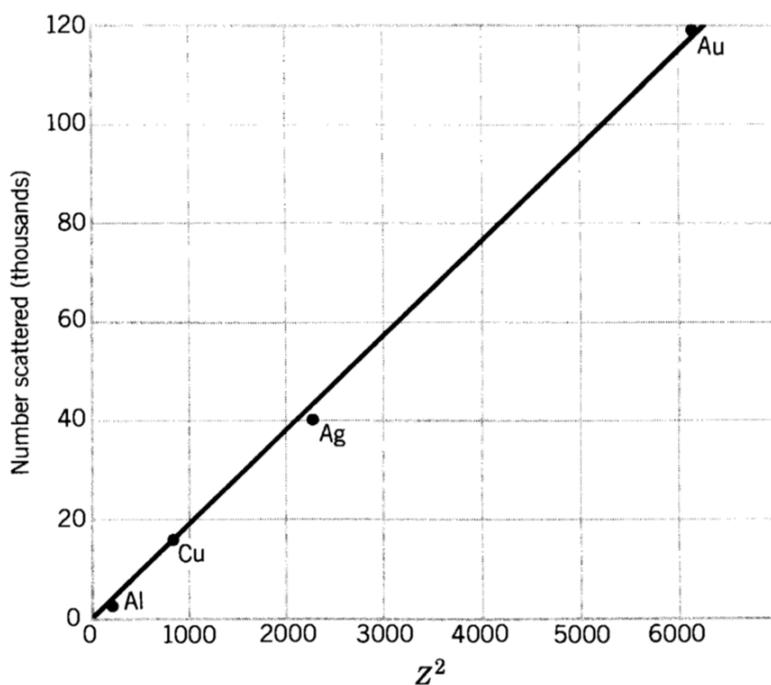


Figura 6.14: Dipendenza del rateo di diffusione dal quadrato del numero atomico Z del bersaglio. L'andamento conferma le previsioni della formula di Rutherford.

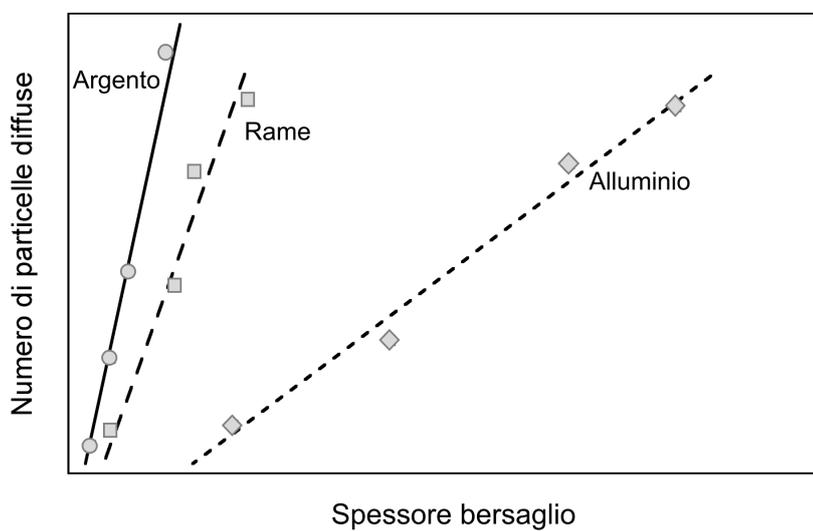


Figura 6.15: Dipendenza dallo spessore del bersaglio del rateo di diffusione. L'andamento lineare suffraga l'ipotesi del modello atomico di Rutherford.

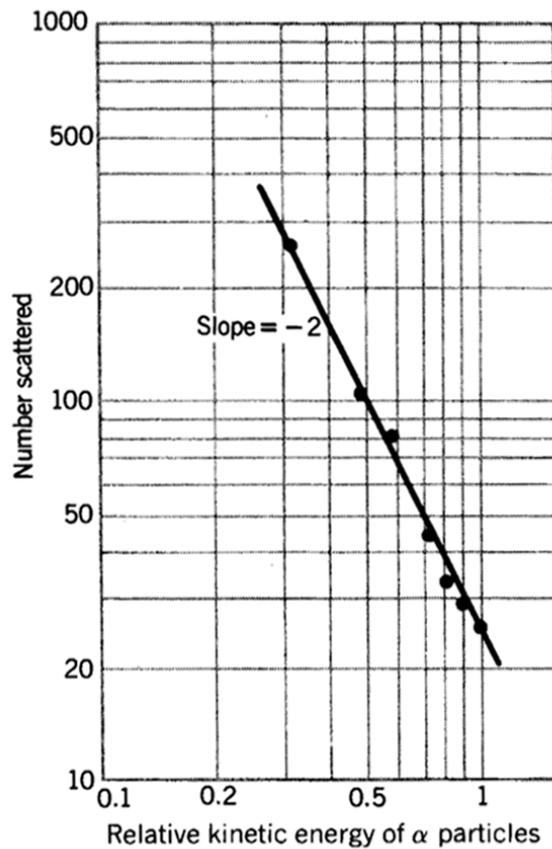


Figura 6.16: Dipendenza del rateo di diffusione dall'energia cinetica per particelle α incidenti su un bersaglio sottile. L'andamento conferma le previsioni della formula di Rutherford.

Una diffusione a grande angolo si giustifica quindi o con molte diffusioni di questo tipo, tutte volte coerentemente ad accrescere l'angolo totale, o con una singola diffusione ad angolo grande. Per osservare una diffusione ad un angolo totale $N\vartheta_m$, come frutto di successive diffusioni a piccolo angolo, ne sono quindi necessarie circa N^2 .

Se si osserva il numero di particelle diffuse a un angolo prefissato $\vartheta > 1^\circ$ in corrispondenza a diversi valori dello spessore Δz del foglio di materiale bersaglio, ci si aspetta che la probabilità di osservare particelle diffuse vari proporzionalmente a $\sqrt{\Delta z}$ per effetto delle diffusioni multiple, mentre dovrebbe invece variare proporzionalmente a Δz nel caso di diffusioni singole, e ciò semplicemente in quanto la probabilità di subire singole deviazioni a grande angolo cresce in modo direttamente proporzionale al numero dei possibili bersagli in grado di produrre tali deviazioni, come si vede chiaramente dai dati sperimentali in figura [6.15](#).

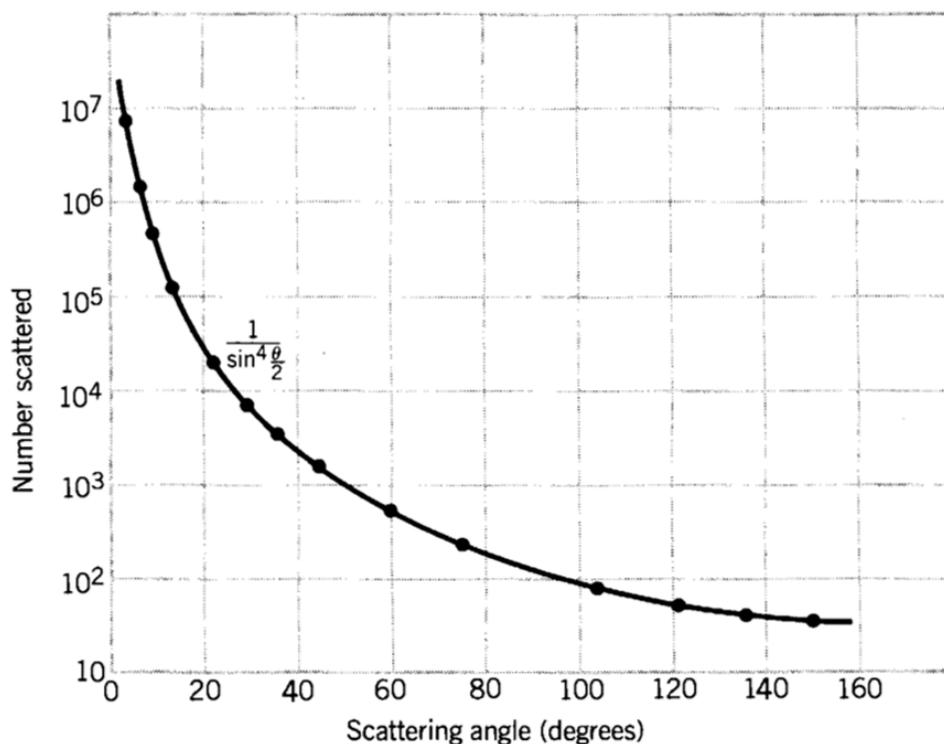


Figura 6.17: Dipendenza da ϑ del rateo di diffusione per un sottile bersaglio d'oro. L'andamento conferma le previsioni della formula di Rutherford.

6.5 Approccio quantistico al concetto di sezione d'urto

Il tasso di reazioni, fissate l'intensità del fascio incidente e la densità di centri diffusori nel bersaglio, dipende dalle proprietà del potenziale d'interazione e dal numero di stati finali accessibili alla reazione.

Il potenziale d'interazione può venir descritto tramite l'operatore Hamiltoniano \mathcal{H}_{int} . In una reazione il ruolo di questo potenziale è di trasformare la funzione d'onda ψ_i dello stato iniziale del sistema, nella funzione d'onda dello stato finale del sistema, ψ_f .

Il corrispondente *elemento della matrice di transizione*, detto anche *ampiezza di probabilità per la transizione*, è dato da

$$\mathcal{M}_{fi} = \langle \psi_f | \mathcal{H}_{int} | \psi_i \rangle = \int \psi_f^* \mathcal{H}_{int} \psi_i dV \quad (6.75)$$

dove l'integrale è esteso a tutto lo spazio, ovvero in pratica a tutto il volume utile di normalizzazione. Concettualmente l'approccio è dunque equivalente a quanto visto per la trattazione dei decadimenti.

Per la determinazione del numero di stati finali disponibili, da cui anche dipende il tasso di reazione, si tenga conto che nello *spazio delle fasi*, lo spazio esadimensionale delle coordinate e degli impulsi, in accordo col principio di indeterminazione, ogni particella occupa un volume pari ad $h^3 = (2\pi\hbar)^3$. Si consideri una particella diffusa entro un volume V con impulso di modulo compreso nell'intervallo fra p' e $p' + dp'$ ^[5]. Ciò corrisponde, nello spazio degli impulsi, ad un guscio sferico con raggio minore p' , spessore dp' e volume pari a $4\pi p'^2 dp'$. Non considerando per ora processi che determinino modifiche dello stato di spin, si ottiene per il numero finale $dn(p')$ di stati disponibili

$$dn(p') = \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} 4\pi p'^2 dp' \quad (6.76)$$

Il volume V su cui normalizzare corrisponde al volume che contiene tutte le particelle incidenti durante il tempo t in cui hanno luogo gli urti, quindi

$$V = v_a t A = \frac{\Phi_a t}{n_a} = \frac{N_a}{n_a} \quad (6.77)$$

essendo A l'area della sezione retta del fascio incidente, v_a il modulo della velocità di ogni particella del fascio, N_a la totalità delle particelle nel fascio, Φ_a ed n_a l'intensità del loro flusso incidente e la loro densità, supposte uniformi, come detto precedentemente.

Ricordando che l'energia totale e l'impulso di una particella sono legate dalla relazione

$$dE' = v' dp' \quad (6.78)$$

dedotta in Appendice **F**, si ha per la densità $\rho(E')$ degli stati finali nell'intervallo energetico dE'

$$\rho(E') = \frac{dn(E')}{dE'} = \frac{4\pi p'^2 V}{v' (2\pi\hbar)^3} \quad (6.79)$$

Il collegamento fra tasso di reazione, elemento della matrice di transizione e densità degli stati finali è dato dalla *seconda regola d'oro* di Fermi come per i decadimenti, dove il loro tasso è legato all'elemento della matrice di transizione e alla densità dei possibili stati finali.

Essa esprime qui il tasso di reazione W ^[6] per particella bersaglio (centro di diffusione) e per particella del fascio incidente, quindi la quantità

$$W = \frac{dN(E)/dt}{N_b N_a} \quad (6.80)$$

⁵L'apice caratterizza qui la particella diffusa. Inoltre in questo paragrafo con p si intende il modulo del vettore impulso \vec{p} , e non il quadri-impulso.

⁶Il tasso di reazioni è stato introdotto nel paragrafo **6.1**

dove si è esplicitata, per le particelle del fascio che hanno interagito, l'eventuale dipendenza dall'energia E in gioco nel canale d'ingresso della reazione. Sostituendo quindi in base alle [6.10](#) e [6.77](#) si ottiene

$$W = \frac{dN(E)/dt}{N_b N_a} = \frac{\sigma v_a}{V} \quad (6.81)$$

Di conseguenza si ha, per la sezione d'urto

$$\sigma = \frac{2\pi}{\hbar v_a} |\mathcal{M}_{fi}|^2 \rho(E') V \quad (6.82)$$

Se si conosce il potenziale d'interazione la [6.82](#) permette quindi di calcolare la sezione d'urto σ . Altrimenti si possono utilizzare i valori misurati della sezione d'urto σ e l'equazione [6.82](#) per calcolare l'elemento di matrice \mathcal{M}_{fi} .

La regola d'oro è anche alla base della spiegazione di processi spettroscopici e come visto di gran parte dei fenomeni di decadimento, e sono queste sue versatilità e applicabilità che hanno spinto Enrico Fermi a definirla *d'oro*! Nei casi in cui si tratta di decadimenti di particelle o nuclei instabili, eccitazioni di risonanze, transizioni fra diversi stati energetici, sia in ambito atomico che nucleare o particellare, la quantità W , le cui dimensioni sono $[t]^{-1}$, corrisponde come si è visto, all'inverso di una *vita media*

$$W = \frac{1}{\tau} \quad (6.83)$$

e la probabilità di transizione per unità di tempo può di conseguenza essere determinata direttamente, dalla misura della vita media τ o indirettamente, dalla *larghezza* in energia $\Delta E = \hbar/\tau$ della riga dello spettro identificativa dello stato.

6.6 Deduzione quantistica della sezione d'urto di Rutherford

Si affronta ora il calcolo quantistico della sezione d'urto differenziale per l'interazione coulombiana fra una particella incidente puntiforme di carica Z_1e e un bersaglio anche puntiforme di carica Z_2e .

Si supponga, come nell'approccio classico, di non tener conto degli spin delle particelle interagenti e si supponga nuovamente che il bersaglio abbia massa così grande se confrontata, a meno di c^2 , con le energie cinetiche dei proiettili incidenti, da poterne trascurare il rinculo. In tal caso si può utilizzare il tri-impulso e se Z_2e è piccolo, dunque se $Z_2\alpha \simeq Z_2/137 \ll 1$, il che equivale a dire che il potenziale agente non è troppo intenso, ci si trova nelle condizioni di poter applicare l'approssimazione perturbativa di Born. In tal caso l'effetto del potenziale a distanza ∞ è trascurabile e quindi le particelle del fascio incidente, nei loro stati iniziale e finale, sono praticamente considerabili come libere; le funzioni d'onda che le rappresentano sono quindi autofunzioni dell'impulso, cioè onde piane

$$\psi_i(\vec{p}_i, \vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\vec{p}_i \cdot \vec{r}/\hbar} \quad , \quad \psi_f(\vec{p}_f, \vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\vec{p}_f \cdot \vec{r}/\hbar} \quad (6.84)$$

Le difficoltà eventualmente connesse alla normalizzazione delle funzioni d'onda possono essere superate considerando un opportuno volume finito V , che sia sufficientemente grande rispetto alla zona direttamente coinvolta nel processo d'urto tanto da poter confondere gli stati di energia discreta presenti in esso con un quasi continuo di stati. Le dimensioni di V devono essere inoltre tali da comprendere anche materia e strutture circostanti il volume strettamente legato al processo d'interazione, così da poter considerare uno schermaggio conseguente efficace della carica Z_2e del bersaglio verso ogni particella incidente/deflessa oltre una certa distanza. Il risultato finale non deve inoltre dipendere da tale volume V .

Preso un fascio di particelle incidenti con densità n_a particelle per unità di volume e scelto come detto sufficientemente grande il volume d'integrazione, si ha per la condizione di normalizzazione

$$\int_V |\psi_i(\vec{p}_i, \vec{r})|^2 dV = n_a V \quad \text{con} \quad V = \frac{N_a}{n_a} \quad (6.85)$$

dove N_a rappresenta la totalità delle particelle a del fascio che hanno inciso sul bersaglio. V è quindi un ben preciso volume di normalizzazione che va opportunamente scelto per ogni singolo fascio incidente; si indichino con $R \propto V^{1/3}$ le dimensioni lineari caratterizzanti tale volume.

In accordo con la relazione [6.81](#) si ha che il tasso W di interazioni è dato dal prodotto della sezione d'urto σ con il modulo v_a della velocità di ogni particella incidente, diviso per il volume V . Applicando quindi la regola

d'oro di Fermi

$$\frac{\sigma v_a}{V} = W = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle \psi_f | \mathcal{H}_{int} | \psi_i \rangle|^2 \frac{dn}{dE_f} \quad (6.86)$$

dove E_f rappresenta l'energia totale, cinetica più equivalente in massa, dello stato finale. Poichè si considera un problema d'urto elastico, non avendo supposto alcun assorbimento d'energia da parte del bersaglio (ad esempio rinculo) o trasformazioni massa/energia, ne consegue $dE_f = dE' = dE$.

Dato inoltre che si trascura l'effetto del potenziale per gli stati iniziale e finale a grande distanza dal centro diffusivo, ne consegue che si conservano i moduli degli impulsi, ovvero $|\vec{p}_i| = |\vec{p}_f|$. Il solo effetto della diffusione da parte del potenziale coulombiano si risolve quindi in una deflessione di un angolo ϑ fra i due impulsi iniziale e finale della particella incidente. La

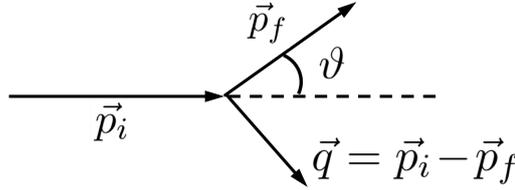


Figura 6.18: Relazione fra \vec{p}_i e \vec{p}_f conseguente al processo di diffusione.

densità nello spazio delle fasi degli stati finali possibili è data da

$$dn(|\vec{p}_f|) = \frac{4\pi |\vec{p}_f|^2 V}{(2\pi\hbar)^3} d|\vec{p}_f| \quad (6.87)$$

e conseguentemente la sezione d'urto per la diffusione di una particella incidente entro l'elemento $d\Omega$ di angolo solido è data da

$$d\sigma \frac{v_a}{V} = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle \psi_f | \mathcal{H}_{int} | \psi_i \rangle|^2 \frac{|\vec{p}_f|^2 V}{(2\pi\hbar)^3} \frac{d|\vec{p}_f|}{dE_f} d\Omega \quad (6.88)$$

Per energie molto alte delle particelle incidenti si può porre $v_a \simeq c$ e anche $|\vec{p}_f| \simeq E_f/c$, da cui

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{V^2 E_f^2}{4\pi^2 c^4 \hbar^4} |\langle \psi_f | \mathcal{H}_{int} | \psi_i \rangle|^2 \quad (6.89)$$

L'Hamiltoniano d'interazione per una particella incidente di carica $Z_1 e$ ha in questo caso la forma $\mathcal{H}_{int} = Z_1 e \cdot \Phi(r)$, con

$$\Phi(r) = \frac{Z_2 e}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (6.90)$$

L'elemento della matrice di transizione è quindi

$$\begin{aligned}\langle \psi_f | \mathcal{H}_{int} | \psi_i \rangle &= \mathcal{M}(\vec{p}_f, \vec{p}_i) = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0 V} \int \frac{e^{-i\vec{p}_f \cdot \vec{r}/\hbar} e^{i\vec{p}_i \cdot \vec{r}/\hbar}}{r} d_3x = \\ &= \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0 V} \int \frac{e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}/\hbar}}{r} d_3x = \mathcal{M}(\vec{q})\end{aligned}\quad (6.91)$$

dove $\vec{q} = \vec{p}_i - \vec{p}_f$ è l'impulso trasferito. Si ha: $|\vec{p}_f| = |\vec{p}_i| = |\vec{p}|$, e $(1 - \cos\vartheta) = 2 \sin^2\vartheta/2$, quindi

$$|\vec{q}|^2 = |\vec{p}_i|^2 + |\vec{p}_f|^2 - 2|\vec{p}_i||\vec{p}_f|\cos\vartheta = 2|\vec{p}|^2(1 - \cos\vartheta) = 4|\vec{p}|^2 \sin^2\frac{\vartheta}{2} \quad (6.92)$$

Si calcola l'integrale nella [6.91](#) passando a coordinate polari⁷ e si ottiene

$$\int \frac{e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}/\hbar}}{r} d_3x = 4\pi \left(\frac{\hbar}{q}\right)^2 \int_0^\infty \text{sen}x \, dx \quad (6.94)$$

L'integrando mostra infinite oscillazioni della medesima ampiezza, quindi l'integrale non converge. Per ottenere qualcosa di sensato bisogna definirlo in modo da tener conto del significato fisico del problema. L'origine della divergenza risiede nel fatto che per il potenziale si è usato l'andamento proporzionale ad r^{-1} fino a distanza ∞ , ma come si è già osservato ciò non ha significato fisico in quanto, indipendentemente dalle dimensioni dell'apparato sperimentale, vi sarà sempre una distanza a partire dalla quale le strutture fisiche presenti schermano il potenziale. Quindi bisogna tenerne conto facendo in qualche modo tendere a zero il potenziale molto più rapidamente di r^{-1} , oltre una opportuna distanza $R \propto V^{1/3}$ che al termine del calcolo verrà fatta tendere ad ∞ .

Si realizza ciò considerando un potenziale di tipo Yukawa, ovvero della forma $\Phi(r) = e^{-\lambda r}/r$, dove $\lambda \sim 1/R$ rappresenta una quantità piccola che si farà alla fine tendere a 0. Si ha così

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-\lambda x} \text{sen}x \, dx &= \frac{1}{2i} \int_0^\infty [e^{(i-\lambda)x} - e^{-(i+\lambda)x}] \, dx = \\ &= -\frac{1}{2i} \left(\frac{1}{i-\lambda} + \frac{1}{i+\lambda} \right) = \frac{1}{1+\lambda^2} \quad \text{con,} \quad \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{1}{1+\lambda^2} = 1\end{aligned}\quad (6.95)$$

⁷Si prende come angolo polare α quello fra \vec{q} ed \vec{r} e:

$$\begin{aligned}\int \frac{e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}/\hbar}}{r} d_3x &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \text{sen}\alpha \, d\alpha \int_0^\infty r^2 e^{\frac{iqr \cos\alpha}{\hbar}} dr = \\ &= 2\pi \int_{-1}^1 d(\cos\alpha) \int_0^\infty r^2 e^{\frac{iqr \cos\alpha}{\hbar}} dr = 2\pi \int_0^\infty r \frac{\hbar}{iqr} (e^{iqr/\hbar} - e^{-iqr/\hbar}) dr = \\ &= 4\pi \left(\frac{\hbar}{q}\right)^2 \int_0^\infty \text{sen}x \, dx \quad \text{posto,} \quad x = qr/\hbar.\end{aligned}\quad (6.93)$$

Si ottiene dunque, per l'elemento della matrice di transizione

$$\mathcal{M}(\vec{q}) = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0 V} 4\pi \left(\frac{\hbar}{|\vec{q}|} \right)^2 = \frac{Z_1 Z_2 e^2 \hbar^2}{\epsilon_0 V |\vec{q}|^2} \quad (6.96)$$

da cui infine la sezione d'urto

$$\begin{aligned} \sigma(\vartheta) &= \frac{d\sigma(\vartheta)}{d\Omega} = \frac{V^2 E'^2}{(2\pi)^2 (\hbar c)^4} |\mathcal{M}(\vec{q})|^2 = \frac{E_f^2}{(2\pi)^2 c^4} \frac{Z_1^2 Z_2^2 e^4}{\epsilon_0^2 |\vec{q}|^4} \\ &= \left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{16\pi\epsilon_0} \right)^2 \frac{4E_f^2}{p^4 c^4} \frac{1}{\text{sen}^4 \vartheta/2} \end{aligned} \quad (6.97)$$

Se si considera ora il limite relativistico di questo risultato, ovvero si assume $E_f \simeq pc$, si ha

$$\frac{d\sigma(\vartheta)}{d\Omega} \simeq \left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{8\pi\epsilon_0 E_f} \right)^2 \frac{1}{\text{sen}^4 \vartheta/2} \quad (6.98)$$

Se invece ci si pone nel limite non relativistico, per cui $E_k = p^2/(2m)$ ed $E_f \approx mc^2$, allora il termine $4E_f^2/(pc)^4$ si approssima con $1/E_k^2$, per cui la sezione d'urto diventa

$$\frac{d\sigma(\vartheta)}{d\Omega} \simeq \left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{16\pi\epsilon_0 E_k} \right)^2 \frac{1}{\text{sen}^4 \vartheta/2} \quad (6.99)$$

con lo stesso risultato ottenuto nell'approccio classico, e ciò non dipende dall'aver utilizzato l'approssimazione di Born, in quanto si può dimostrare che il risultato vale per tutti gli ordini perturbativi. A corroborare la coincidenza fra risultato classico e quantistico c'è anche il fatto che la [6.97](#) non contiene alcun termine "quantistico", ovvero \hbar .

Fattore di forma

Si veda ora la trattazione quantistica nel caso in cui si consideri la carica diffondente $Z_2 e$ non puntiforme ma distribuita con simmetria sferica. Il potenziale, conglobando in esso anche la carica $Z_1 e$ della particella incidente, è esprimibile come

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\vec{r}' \quad (6.100)$$

con $\int \rho(\vec{r}') d\vec{r}' = 1$, ricordando che $|\vec{r} - \vec{r}'|$ è invariante per traslazione, e dove l'integrale si intende esteso a tutto il volume V' contenente le cariche

bersaglio.

La matrice di transizione diventa in questo caso, ponendo $\vec{D} = \vec{r} - \vec{r}'$,

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(\vec{q}) &= \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0 V} \int e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}/\hbar} d\vec{r} \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\vec{r}' \\ &= \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0 V} \int \frac{e^{i\vec{q}\cdot\vec{D}/\hbar}}{D} d\vec{D} \int \rho(\vec{r}') e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}'/\hbar} d\vec{r}' \end{aligned} \quad (6.101)$$

Essa è quindi espressa come prodotto di tre fattori: il secondo corrisponde al primo dei due integrali e come visto, vale $4\pi (\hbar/|\vec{q}|)^2$; il terzo, indicato con $F(\vec{q})$, coincide con la *trasformata di Fourier* della distribuzione della densità di carica elettrica

$$F(\vec{q}) = \int \rho(\vec{r}') e^{\frac{i\vec{q}\cdot\vec{r}'}{\hbar}} d\vec{r}' \quad (6.102)$$

$F(\vec{q})$ è detto *fattore di forma* della distribuzione di carica elettrica.

La normalizzazione della distribuzione di carica dá

$$F(0) = \int \rho(\vec{r}') d\vec{r}' = 1 \quad (6.103)$$

La sezione d'urto di diffusione coulombiana per una carica estesa si scrive dunque come

$$\frac{d\sigma(\vartheta)}{d\Omega} = \left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{16\pi\epsilon_0} \right)^2 \frac{4E_f^2}{(pc)^4} \frac{1}{\text{sen}^4 \frac{\vartheta}{2}} |F(\vec{q})|^2 \quad (6.104)$$

Il risultato trovato vale però ora solo in approssimazione di Born e non si mantiene se si includono gli ordini perturbativi più elevati.

Differentemente dal caso classico, in cui le sezioni d'urto da carica puntiforme e da carica estesa coincidevano per ogni angolo $\vartheta < \vartheta_0$, nel caso quantistico esse coincidono soltanto per $\vartheta = 0$, ovvero $|\vec{q}| = 0$ ⁸.

⁸Il motivo è nella natura quantistica del fenomeno. Clasicamente si possono definire contemporaneamente l'impulso \vec{p} e il parametro d'urto b . Quantisticamente fissare $v = v_z$ equivale all'aver anche fissato $v_x = v_y = 0$. Non si possono quindi più definire le componenti delle coordinate nel piano (x, y) , ovvero il parametro d'urto b che altro non è se non un vettore su tale piano. Fissata quindi la velocità \vec{v} , sono ammessi tutti i valori del parametro d'urto, quindi anche quelli per cui è $b < l_0$, corrispondenti a $\vartheta > \vartheta_0$.

6.7 La sezione d'urto di Mott

Si può verificare che tener conto anche dello spin porta, per la sezione d'urto da diffusione coulombiana, a un risultato, detto sezione d'urto di Mott che trascurando il rinculo del nucleo bersaglio, per l'interazione elettrone-nucleo si scrive

$$\frac{d\sigma_{Mott}(\vartheta)}{d\Omega} = \frac{d\sigma_{Ruth}(\vartheta)}{d\Omega} \left(1 - \beta^2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2}\right) \quad (6.105)$$

Al crescere della velocità del proiettile la sezione d'urto di Mott cala dunque più rapidamente di quella di Rutherford, con l'angolo ϑ di diffusione. Nei casi fortemente relativistici, in cui $\beta = v/c \rightarrow 1$, si ha

$$\frac{d\sigma_{Mott}(\vartheta)}{d\Omega} \simeq \frac{d\sigma_{Ruth}(\vartheta)}{d\Omega} \cos^2 \frac{\vartheta}{2} \quad (6.106)$$

La sezione d'urto $d\sigma_{Coul}(\vartheta)/d\Omega$ di diffusione coulombiana per una carica estesa va quindi scritta come

$$\frac{d\sigma_{Coul}(\vartheta)}{d\Omega} = \frac{d\sigma_{Mott}(\vartheta)}{d\Omega} |F(\vec{q})|^2 \quad (6.107)$$

La necessità del fattore aggiuntivo che la sezione d'urto di Mott introduce rispetto a quella di Rutherford può essere capita se si considera il caso limite della diffusione a π radianti. Nel caso in cui si abbiano particelle relativistiche, per le quali $\beta \rightarrow 1$, dall'equazione di Dirac si deduce che la proiezione del loro spin \vec{s} lungo la direzione del moto, rappresentata dal versore $\vec{p}/|\vec{p}|$, è una quantità che si conserva. In pratica come quantità che si conserva si introduce

$$H = \frac{\vec{s} \cdot \vec{p}}{|\vec{s}| |\vec{p}|} \quad (6.108)$$

detta *elicità*. L'elicità vale +1 per particelle con spin orientato nel verso del moto e vale -1 per particelle con spin orientato in verso opposto al moto.

In figura [6.19](#) è mostrata una possibile configurazione di diffusione all'indietro, anche se non esattamente a π radianti, dove si è scelto come asse z di quantizzazione quello parallelo all'impulso \vec{p} dell'elettrone incidente.

Per la conservazione dell'elicità, la proiezione dello spin \vec{s} sull'asse z dovrebbe cambiare segno con l'urto, ma ciò è impossibile con un bersaglio di spin nullo, a causa della conservazione del momento angolare totale. Il momento angolare orbitale \vec{L} è infatti perpendicolare alla direzione z del moto e non può quindi determinare alcun cambiamento nella componente lungo z del momento angolare. Ciò significa che per particelle relativistiche la diffusione a π radianti dovrebbe essere totalmente soppressa.

Se invece il bersaglio possiede un valore non nullo di spin allora la proiezione dello spin dell'elettrone può essere modificata durante la diffusione a π radianti, in quanto la conservazione del momento angolare può trovare compensazione nel concomitante cambiamento della direzione dello spin del

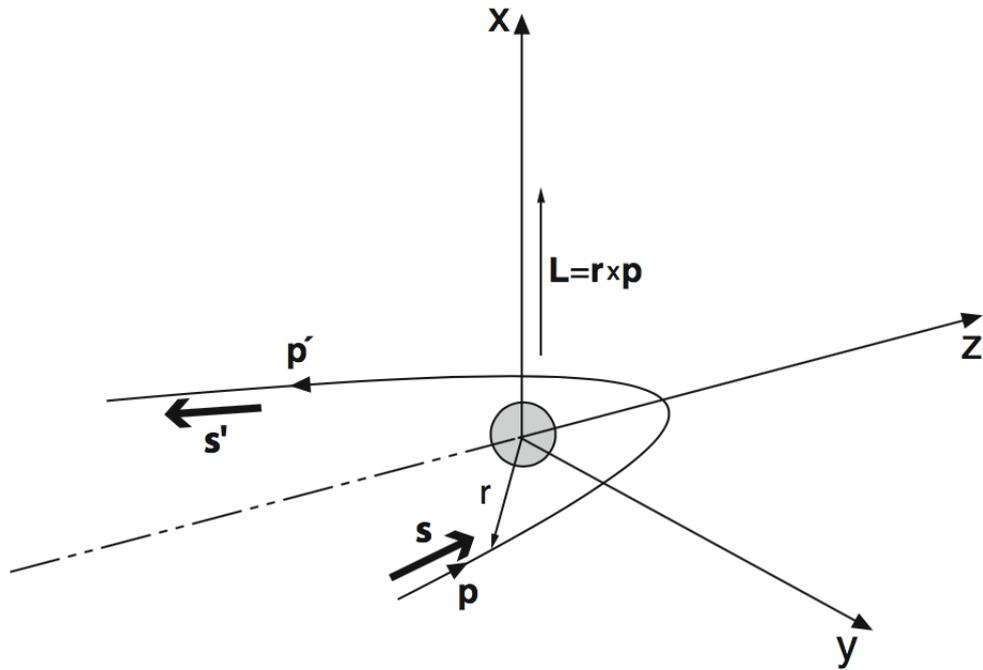


Figura 6.19: Diffusione a π radianti.

bersaglio. In questo caso la diffusione a π radianti è possibile. Nel seguito, senza con ciò togliere generalità agli argomenti trattati, a meno di specificare diversamente si considereranno soltanto fattori di forma a simmetria sferica, relativi dunque a sistemi che non presentano direzioni preferenziali nello spazio. In tal caso i fattori di forma dipendono esclusivamente dall'impulso trasferito \vec{q} e per sottolinearlo si scriverà il fattore di forma come $F(\vec{q}^2)$.

6.8 Misure dei fattori di forma (elettrici)

La misura delle sezioni d'urto al variare di $|\vec{q}|$, che equivale a cambiare l'angolo ϑ o l'energia delle particelle incidenti, e quindi $|\vec{p}|$, permette di ricavare i valori dei fattori di forma per gli stessi valori di $|\vec{q}|$.

Interpolando i dati si può ricavare $F(\vec{q}^2)$ come funzione continua, e invertendola dedurre la distribuzione di carica. Invertire la trasformata di Fourier richiede però di conoscere $F(\vec{q}^2)$ per ogni valore di $|\vec{q}|$, da 0 ad ∞ .

L'energia massima sperimentalmente a disposizione è però finita e corrisponde all'energia cinetica E_k nel canale d'ingresso. I valori di $|\vec{q}|$ per cui si può misurare $F(\vec{q}^2)$ sono quindi limitati, per $\vartheta = \pi$, dalla condizione

$$|\vec{q}| \leq 2|\vec{p}| = 2\left(\frac{E_k^2}{c^2} + 2mE_k\right)^{1/2} \quad (6.109)$$

L'inversione della trasformata di Fourier richiede quindi un'estrapolazione sull'andamento di $F(\vec{q}^2)$ oltre l'intervallo in cui può essere fisicamente misurata. Si può ottenere un risultato per la distribuzione spaziale di carica per valori di r maggiori di $R \sim 2\pi\hbar/|\vec{q}|_{max}$, mentre i risultati per valori di $r < R$ dipendono dall'ipotesi fatta per estrapolare $F(\vec{q}^2)$ nel caso $|\vec{q}| \rightarrow \infty$.

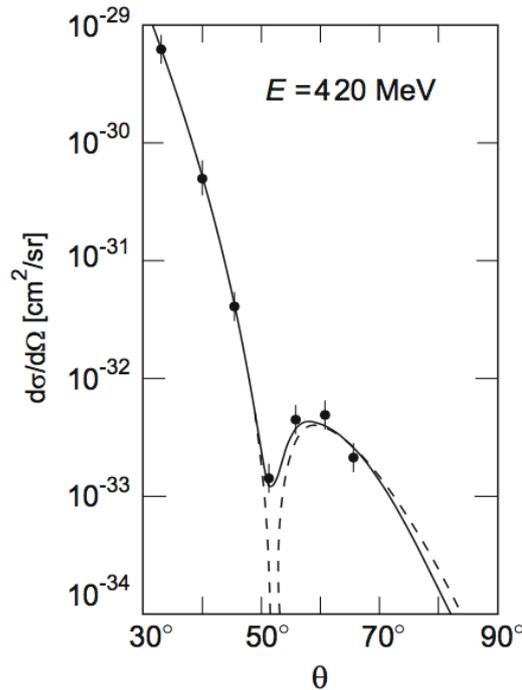


Figura 6.20: Sezione d'urto differenziale elastica dell'interazione di elettroni da 420 MeV su ^{12}C [R. Hofstadter - Ann.Rev.Nucl.Sci. 7 (1957) 231].

Le informazioni sul fattore di forma, quindi nello spazio degli impulsi, so-

no invece desumibili direttamente dai risultati sperimentali. R. Hofstadter condusse, a partire dal 1953, un'intensa campagna di misure di diffusione di elettroni su nuclei e nucleoni che gli valse il Nobel per la Fisica nel 1961. In figura [6.20](#) una delle prime misure di sezione d'urto differenziale elastica effettuata con elettroni da 420 MeV incidenti su un bersaglio di ^{12}C ; la linea tratteggiata è il risultato del calcolo effettuato immaginando onde piane incidenti su una distribuzione sferica e omogenea di carica con superficie diffusa, in approssimazione di Born, mentre invece la linea continua è il risultato di un fit sui dati sperimentali basato su un approccio in *phase-shift analysis*⁹. Si notino la sensibile diminuzione del valore della sezione d'urto al crescere di ϑ , proporzionale al termine $1/|\vec{q}|^4$ e l'andamento diffrattivo, con un minimo posizionato a $\vartheta \approx 51^\circ$, associato al fattore di forma. Nella tabella che segue sono riportati i fattori di forma calcolati per alcune specifiche forme analitiche della distribuzione di carica e in figura [6.21](#) ne sono illustrati gli andamenti.

Distrib. carica	$f(r)$	$F(\vec{q}^2)$	
Puntif.	$\delta(r)/4\pi$	1	Cost.
Espon.	$(a^3/8\pi) \cdot e^{-(ar)}$	$(1 + \vec{q}^2/a^2\hbar^2)^{-2}$	Dipol.
Gauss.	$(a^2/2\pi)^{3/2} \cdot e^{-(a^2r^2/2)}$	$e^{-(\vec{q}^2/2a^2\hbar^2)}$	Gauss.
Sfera omog.	$\begin{cases} 3/4\pi R^3 & \text{per } r \leq R \\ 0 & \text{per } r > R \end{cases}$	$\begin{cases} 3\alpha^{-3}(\text{sen}\alpha - \alpha\text{cos}\alpha) \\ \text{con } \alpha = \vec{q} R/\hbar \end{cases}$	Oscill.

In figura [6.22](#) sono mostrate la sezione d'urto differenziale per diffusione di elettroni da 757 MeV sull'isotopo ^{40}Ca , moltiplicata per un fattore 10, e quella sull'isotopo ^{48}Ca , divisa per un fattore 10. Ricordando il legame che in ottica c'è fra le dimensioni di un oggetto diffrangente, la lunghezza d'onda della luce diffratta e la posizione dei minimi di diffrazione, se si immagina che la distribuzione di carica d'un nucleo come un oggetto diffrangente si ha che dalla posizione dei minimi nell'andamento in funzione di ϑ della sezione d'urto, si possono dedurre informazioni sull'estensione spaziale dell'oggetto diffrangente.

Si ha infatti, detti λ la lunghezza d'onda di de Broglie associata alla particella incidente ed R il "raggio" della distribuzione di carica del nucleo

$$\frac{\lambda}{R} \approx \text{sen}\vartheta_{min} \quad (6.110)$$

⁹Si veda il capitolo ... su reazioni nucleari

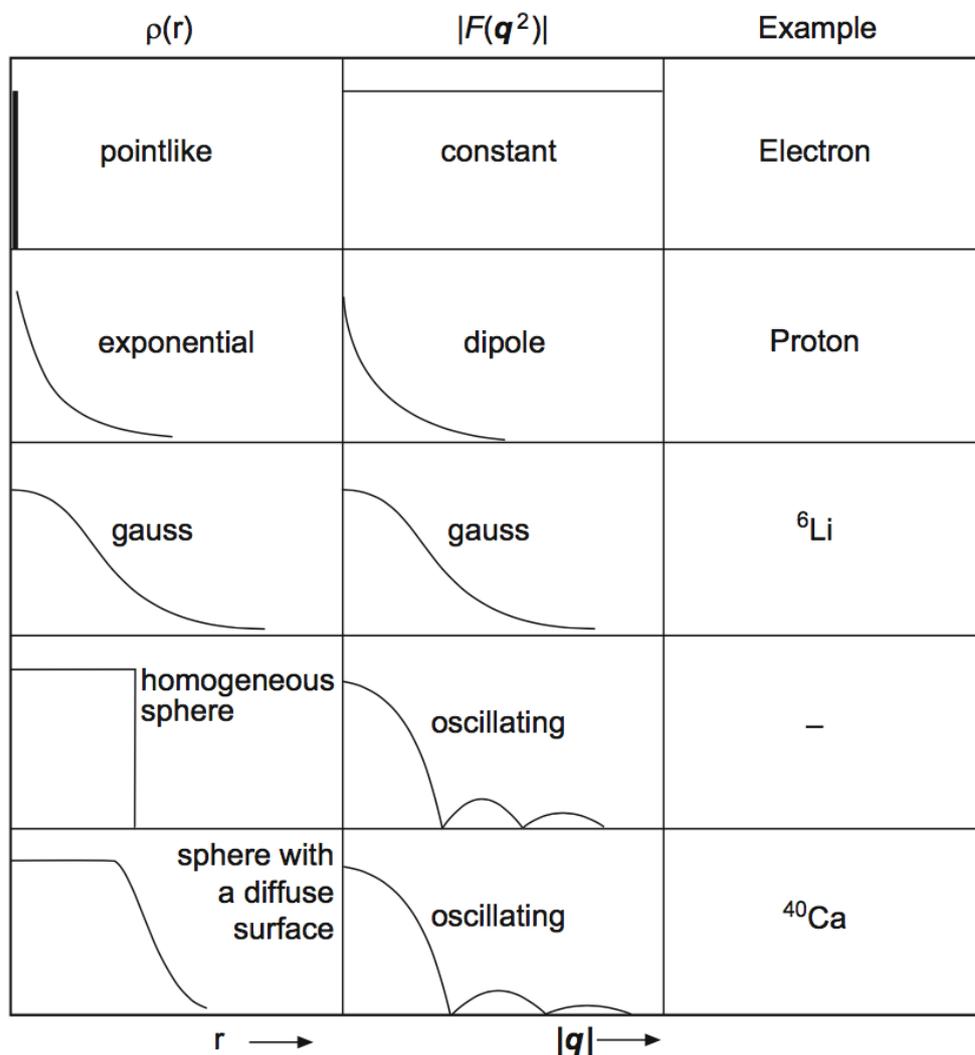


Figura 6.21: Alcuni fattori di forma per specifiche distribuzioni di carica. La diffusione da oggetti con la superficie più nettamente definita produce, come per la diffrazione della luce da una fenditura, un ben definito andamento di massimi e minimi diffrattivi per il fattore di forma.

e ricordando che $\lambda = 2\pi\hbar/|\vec{q}|$

$$R \approx \frac{2\pi\hbar}{|\vec{q}| \sin\vartheta_{min}} \quad (6.111)$$

I risultati delle esperienze di diffusione di elettroni con energie di alcune centinaia di MeV mostrano che in prima approssimazione la densità dei protoni nei nuclei si mantiene la stessa, indipendentemente dal variare di A , ed è sempre in prima approssimazione costante in ogni nucleo. Se ne deduce che

non ci sono zone *vuote* nei nuclei, come invece avviene per gli atomi, almeno alla scala dimensionale d'indagine di elettroni di queste energie che risolvono dimensioni dell'ordine di 10^{-15} m.

Inoltre il raggio quadratico medio della distribuzione di carica dei nuclei risulta crescere con A come $R = R_0 A^{1/3}$, con $R_0 \simeq 1.2$ fm, concordemente a quanto trovato con altri metodi. Interessanti risultati vengono anche da

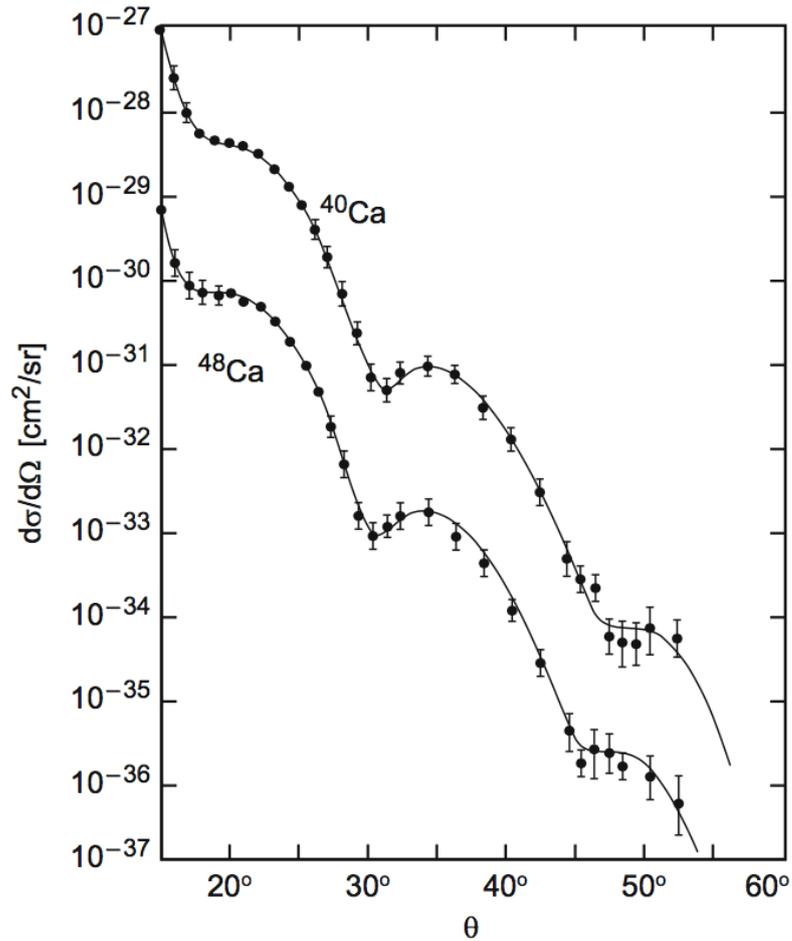


Figura 6.22: Sezioni d'urto differenziali per diffusione di elettroni da 757 MeV su ^{40}Ca , moltiplicata per 10, e su ^{48}Ca divisa per 10 [J.B. Bellicard et al. - Phys.Rev.Lett. 19 (1967) 527].

misure di sezioni d'urto differenziali per la diffusione elastica di altre particelle su nuclei, come ad esempio quelle di π^+ di circa 270 MeV/c su ^{12}C e ^{40}Ca , riportate in figura [6.23](#). Si osservi che in questa reazione il proiettile è sensibile anche all'interazione nucleare con tutti i nucleoni del nucleo, e non soltanto a quella elettrica con i protoni. Le posizioni angolari dei primi minimi della sezione d'urto differenziale sono anche in questo caso in accor-

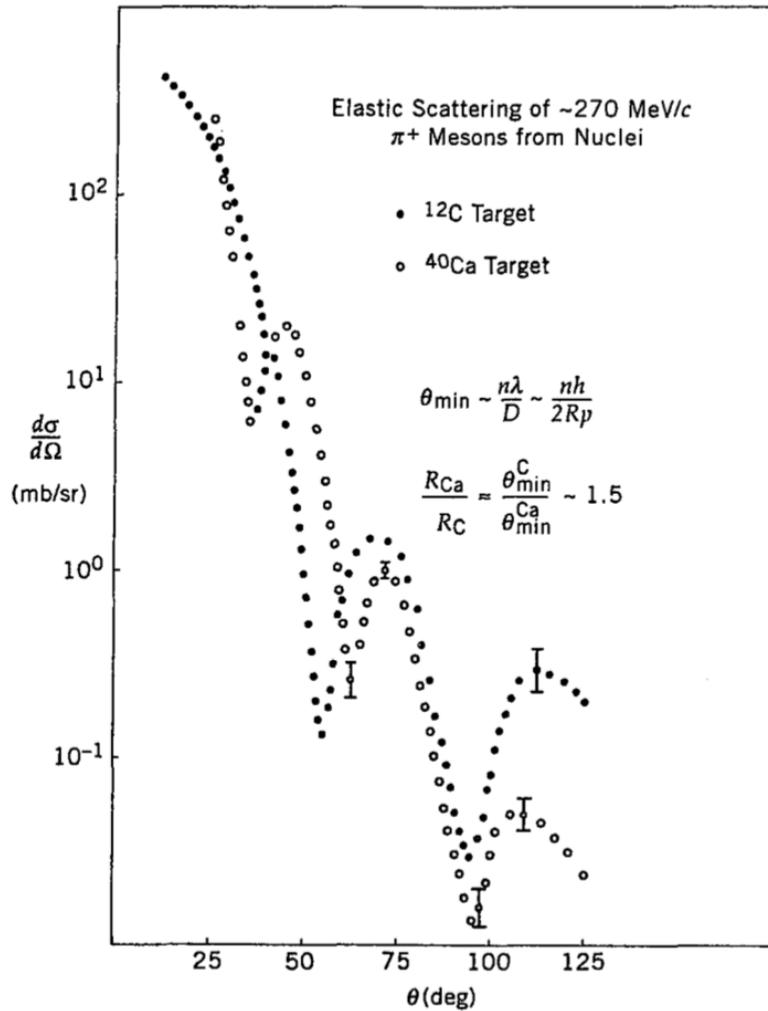


Figura 6.23: Sezione d'urto differenziale per π^+ da ~ 270 MeV/c, su ^{12}C e ^{40}Ca [C.H.Q. Ingram, Meson-Nuclear Phys. 1979, AIP Conf. proc. 54].

do con i valori dei raggi nucleari attesi in base alla relazione $R = R_0 A^{1/3}$, e anche i rapporti tra i valori angolari dei minimi per i due diversi bersagli scalano come i raggi dei due nuclei. Per i nuclei medio pesanti con $A \gtrsim 20$, la densità di carica che permette i migliori fit su molti dati sperimentali ha, come mostrato in figura 6.24, un andamento compatibile con la forma di Woods-Saxon¹⁰, in figura 6.25

$$\rho(r) = \frac{\rho_0}{1 + e^{(r-R)/a}} \quad (6.112)$$

¹⁰R.D. Woods, D.S. Saxon, "Diffuse surface optical model for nucleon-nuclei scattering" - Phys.Rev. 95(1954) 577.

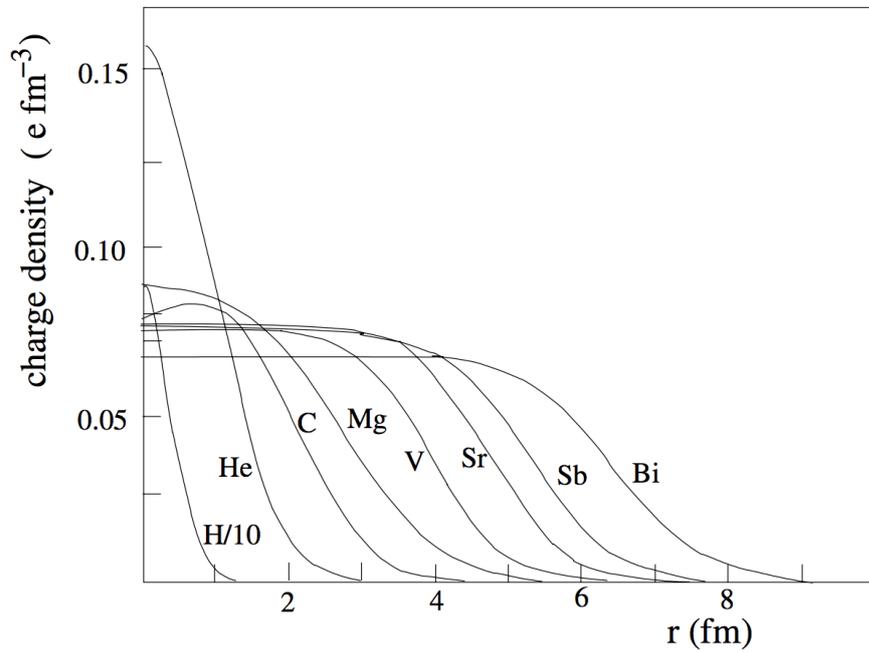


Figura 6.24: Distribuzione radiale di carica, misurata per alcuni nuclei.

dove a è un parametro che tiene conto dello *spessore* della superficie nucleare, e $\rho_0 \simeq 0.17$ nucleoni/ fm^3 è una costante di normalizzazione che rappresenta la densità nucleonica media in un nucleo. La distribuzione di

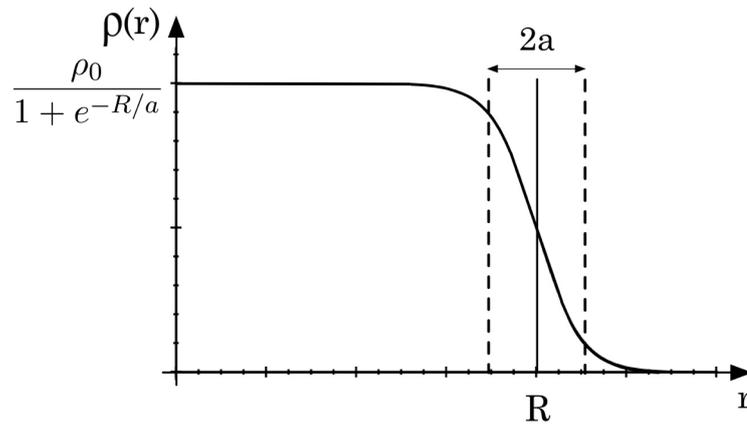


Figura 6.25: Distribuzione di Wood-Saxon.

Wood-Saxon permette di descrivere abbastanza bene le proprietà medie dei nuclei e concerne la distribuzione di carica dei nuclei nel loro stato fondamentale.

Si osservi come la forma di questa distribuzione coincida con la forma del

potenziale medio nucleare individuato nel modello a shell e descritto dall'espressione [3.13](#)

I nuclei eccitati possono modificare significativamente e rapidamente nel tempo la propria forma, dove "rapidamente" va inteso su una scala temporale dell'ordine dei 10^{-23} s.

All'inizio di questo capitolo si è cominciato col parlare di reazioni nucleari, ovvero interazioni fra proiettili e bersagli che possono portare alla modifica di molti parametri dello stato finale di almeno uno dei due o di entrambi, ma finora si sono praticamente considerate soltanto modifiche dei parametri cinematici di proiettile e bersaglio dovute all'azione dell'interazione coulombiana.

Molti risultati indicano oltretutto che la materia in un nucleo sia distribuita in modo simile, sia che si tratti di componenti carichi (protoni), o di componenti neutri (neutroni).

Un'indagine più diretta e completa degli effetti della presenza dell'interazione nucleare ha richiesto di effettuare esperimenti con proiettili sia carichi che neutri e in condizioni cinematiche che mettano in evidenza il ruolo dell'interazione nucleare.

Per capire come ciò sia stato affrontato, sia dal punto di vista sperimentale che interpretativo, e i principali risultati ottenuti, si vedranno ora alcuni richiami di quell'ampio e ancora vivace capitolo delle "reazioni nucleari".

