

Capitolo 7

Reazioni nucleari in regime non relativistico

Le prime reazioni nucleari indotte sono state prodotte nel laboratorio di Rutherford utilizzando particelle α da sorgenti radioattive. In alcuni di questi primissimi esperimenti le particelle α , come s'è visto, semplicemente rimbalzavano elasticamente sui nuclei bersaglio. Nel corso di altri esperimenti Rutherford fu in grado di osservare la modificazione o "trasmutazione" di specie nucleari come nella seguente reazione studiata nel 1919



Il primo acceleratore di particelle in grado di indurre reazioni nucleari fu realizzato da Cockroft e Walton che nel 1930 osservarono la reazione



In questo paragrafo si tratteranno reazioni che vengono classificate di *bassa energia*, ovvero fino a poche decine di MeV. Le reazioni nell'intervallo 100 MeV \div 1 GeV sono dette di *media energia* e comportano anche la produzione di mesoni e la trasformazione di protoni in neutroni e viceversa. A energie superiori si possono produrre anche altre particelle più massive e determinare riarrangiamenti dei quark che costituiscono i nucleoni interagenti.

Una tipica reazione nucleare $a + X \rightarrow Y + b$ si scrive anche



con a il proiettile, X il nucleo bersaglio, eventualmente a riposo nel SL, Y e b i prodotti di reazione. Spesso Y è un prodotto pesante che si ferma nella struttura del bersaglio e non viene osservato direttamente, mentre b è leggero e può essere rivelato.

Se a è un raggio γ la reazione è detta *foto-nucleare*, se b è un raggio γ la

reazione viene detta *cattura radiativa*.

Se a e b coincidono, e così pure X e Y , si ha diffusione *elastica* se Y e b sono nel loro stato fondamentale, *anelastica* se Y o b o entrambi sono in uno stato eccitato.

Talvolta a e b sono la stessa particella ma la reazione produce un ulteriore nucleone nel canale d'uscita, espulso dal nucleo X per effetto dell'urto; questo meccanismo di reazione è detto di *knockout*.

Vi sono *reazioni di trasferimento* in cui uno o più nucleoni vengono scambiati fra proiettile e bersaglio, come nel caso in cui un deutone incidente si trasforma in un protone o in un neutrone in uscita con la cessione di un neutrone o di un protone al bersaglio X per trasformarlo in Y .

Le reazioni possono essere classificate anche in base al meccanismo che le governa. Le reazioni di trasferimento appartengono ad esempio alle cosiddette *reazioni dirette*, nel corso delle quali solo pochi nucleoni, tipicamente del bersaglio, prendono effettivamente parte al processo, con la restante parte dei nucleoni del bersaglio che svolgono un ruolo di sostanziali spettatori passivi.

Questo tipo di reazioni porta alla rimozione o all'inserimento di singoli nucleoni, permettendo di studiare direttamente la struttura a shell dei nuclei. C'è poi l'altro caso estremo, detto meccanismo del *nucleo composto*, in cui proiettile e bersaglio si fondono per un breve lasso di tempo durante il processo, ripartendosi completamente l'energia disponibile prima che il sistema così costituito, detto appunto *nucleo composto*, si disecchi emettendo uno o più nucleoni in un modo che ricorda l'evaporazione di una molecola da un liquido caldo.

Fra questi due casi estremi trovano posto le cosiddette *reazioni di risonanza*, nel corso delle quali il proiettile forma col bersaglio uno stato *quasi-legato* prima dell'emissione del prodotto leggero della reazione.

7.1 Leggi di conservazione

Per lo studio delle reazioni nucleari vanno naturalmente tenute in considerazione delle leggi di conservazione.

La conservazione dell'*energia totale* e dell'*impulso totale* sono utilizzate per correlare le energie misurabili dei prodotti di reazione alle energie note delle particelle incidenti.

Si può utilizzare l'energia misurata di b per dedurre l'energia d'eccitazione degli stati di Y o la differenza di massa tra X e Y .

Per i processi a bassa energia, nel corso dei quali non hanno luogo produzione di pioni e/o riarrangiamenti dei quark costituenti, vale la conservazione separata del *numero di protoni e di neutroni*, che deriva dalla più generale conservazione del *numero barionico*.

Le interazioni deboli hanno un ruolo trascurabile sulla scala temporale ca-

ratteristica delle reazioni nucleari, che è dell'ordine di $10^{-16} \div 10^{-22}$ s.

La conservazione del *momento angolare* aiuta nel correlare gli spin delle particelle del canale d'ingresso col momento angolare orbitale dei prodotti dei canali d'uscita delle reazioni, deducibili da misure delle loro distribuzioni angolari. Si può così risalire agli spin degli specifici stati nucleari.

La conservazione della *parità* permette, noto il momento angolare orbitale dei prodotti di reazione, tramite la regola $(-1)^\ell$ e dalla conoscenza degli altri valori di parità, di risalire alle parità incognite degli eventuali stati eccitati.

7.2 Condizioni sperimentali

Lo studio sperimentale accurato di reazioni nucleari richiede che siano soddisfatti certi criteri per quanto concerne i fasci incidenti:

- _ devono essere ben collimati e foceggiati, in modo da poter definire con precisione una direzione di riferimento rispetto alla quale determinare gli angoli ϑ e φ d'emissione dei prodotti di reazione;
- _ l'energia cinetica delle particelle incidenti deve essere ben definita;
- _ la loro intensità deve essere monitorabile con precisione e adeguata per poter ottenere in tempi ragionevoli i necessari livelli di significatività statistica per i risultati cercati;
- _ se si vogliono effettuare misure di tempi di volo può essere necessario che il fascio sia pulsato e comunque serve un segnale veloce di riferimento associato ad ogni particella o pacchetto di particelle del fascio; bisogna anche che la separazione temporale fra ogni particella/pacchetto e quella/o precedente o successiva/o sia almeno maggiore della risoluzione temporale dell'apparato di misura;
- _ le particelle del fascio devono poter essere polarizzabili;
- _ il trasporto delle particelle del fascio verso il bersaglio deve avvenire con la minor degradazione possibile delle loro caratteristiche dinamiche.

In tabella sono riassunti i diversi tipi di misure in abbinamento con le sezioni d'urto associate.

7.3 Energetica delle reazioni nucleari

La conservazione dell'energia totale per una reazione del tipo 7.3 si scrive

$$m_X c^2 + E_{k,X} + m_a c^2 + E_{k,a} = m_Y c^2 + E_{k,Y} + m_b c^2 + E_{k,b} \quad (7.4)$$

Dove E_k indica le energie cinetiche per le quali a basse energie si può utilizzare l'approssimazione non relativistica.

Si definisce il Q -valore di una reazione analogamente a quanto fatto per i

Table 11.1 Reaction Cross Sections

Cross Sections	Symbol	Technique	Possible Application
Total	σ_t	Attenuation of beam	Shielding
Reaction	σ	Integrate over all angles and all energies of b (all excited states of Y)	Production of radioisotope Y in a nuclear reaction
Differential (Angular)	$d\sigma/d\Omega$	Observe b at (θ, ϕ) but integrate over all energies	Formation of beam of b particles in a certain direction (or recoil of Y in a certain direction)
Differential (Energy)	$d\sigma/dE$	Don't observe b, but observe excitation of Y by subsequent γ emission	Study of decay of excited states of Y
Doubly differential	$d^2\sigma/dE_b d\Omega$	Observe b at (θ, ϕ) at a specific energy	Information on excited states of Y by angular distribution of b

Figura 7.1: Sezioni d'urto.

decadimenti radioattivi

$$Q = (m_X + m_a - m_Y - m_b) c^2 \equiv E_{k,Y} + E_{k,b} - E_{k,X} - E_{k,a} \quad (7.5)$$

Il Q -valore può risultare positivo, negativo o nullo.

Se $Q > 0$ la reazione si dice *eso-energetica* o *esotermica* e parte della massa del sistema iniziale, ovvero della sua energia di legame, è stata trasformata in energia cinetica dei prodotti di reazione.

Se $Q < 0$ la reazione si dice *endoenergetica* o *endotermica* e in tal caso parte dell'energia cinetica presente nel canale d'ingresso è stata convertita in massa o in energia di legame dei prodotti di reazione.

Le relazioni 7.4 e 7.5 valgono qualunque sia il sistema di riferimento scelto. Ci si pone nel Sistema del Laboratorio (SL), in cui i nuclei bersaglio sono considerati a riposo, trascurando il moto termico.

Si definisce un "piano di reazione" tramite la direzione dell'asse del fascio incidente e quella della traiettoria di uno dei prodotti uscenti. Dalla conservazione delle componenti dell'impulso ortogonali a tale piano discende immediatamente che anche la traiettoria dell'altro prodotto uscente giace

sullo stesso piano. La geometria della reazione è illustrata in figura [7.2](#). La

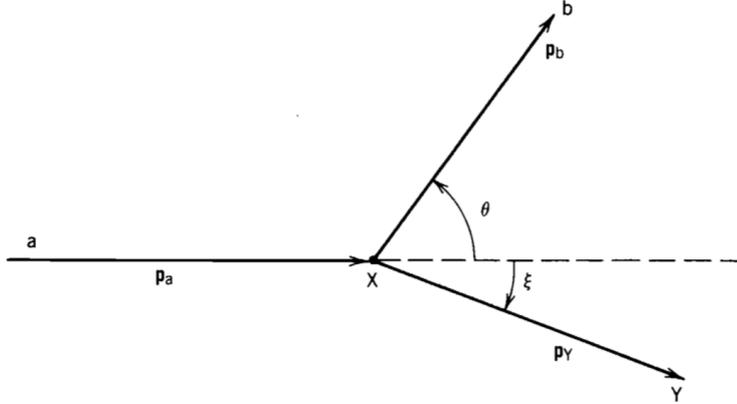


Figura 7.2: Geometria base di una reazione $a + X \rightarrow Y + b$.

conservazione dell'impulso dà

$$\begin{aligned} p_a &= p_b \cos\vartheta + p_Y \cos\xi \\ 0 &= p_b \sin\vartheta + p_Y \sin\xi \end{aligned} \quad (7.6)$$

Supponendo noto Q , con $E_{k,a}$ e quindi p_a parametri controllabili dallo sperimentatore, le [7.5](#) e [7.6](#) costituiscono un insieme di tre equazioni in quattro incognite (ϑ , ξ , $E_{k,b}$, $E_{k,Y}$) che non possiede quindi un'unica soluzione. Se il nucleo residuo Y non viene osservato, si possono eliminare dalle equazioni le quantità ξ ed $E_{k,Y}$, trovando dunque la relazione tra $E_{k,b}$ e ϑ

$$\begin{aligned} \sqrt{E_{k,b}} &= \frac{\sqrt{m_a m_b E_{k,a}} \cos\vartheta}{m_Y + m_b} \pm \\ &\pm \frac{\sqrt{m_a m_b E_{k,a} \cos^2\vartheta + (m_Y + m_b) [m_Y Q + (m_Y - m_a) E_{k,a}]}}{m_Y + m_b} \end{aligned} \quad (7.7)$$

In figura [7.3](#) è mostrato l'andamento di $E_{k,b}$ verso $E_{k,a}$ per la reazione ${}^3\text{H}(p,n){}^3\text{He}$, con Q -valore $Q = -763.75$ keV. Tranne che per un piccolo intervallo energetico $1.019 \text{ MeV} \leq E_{k,a} \leq 1.147 \text{ MeV}$, c'è corrispondenza biunivoca fra $E_{k,b}$ e ϑ , fissato un valore di $E_{k,a}$.

Dal grafico in figura [7.3](#) si nota anche che $E_{k,a}$ ha un valore minimo assoluto E_{th} al di sotto del quale la reazione non può aver luogo e ciò corrisponde a valori negativi del Q -valore

$$E_{th} = (-Q) \frac{m_Y + m_b}{m_Y + m_b - m_a} \quad (7.8)$$

La condizione di soglia si manifesta sempre per $\vartheta = 0$ e quindi $\xi = 0$, e corrisponde ai prodotti di reazione Y e b che si muovono assieme in direzione

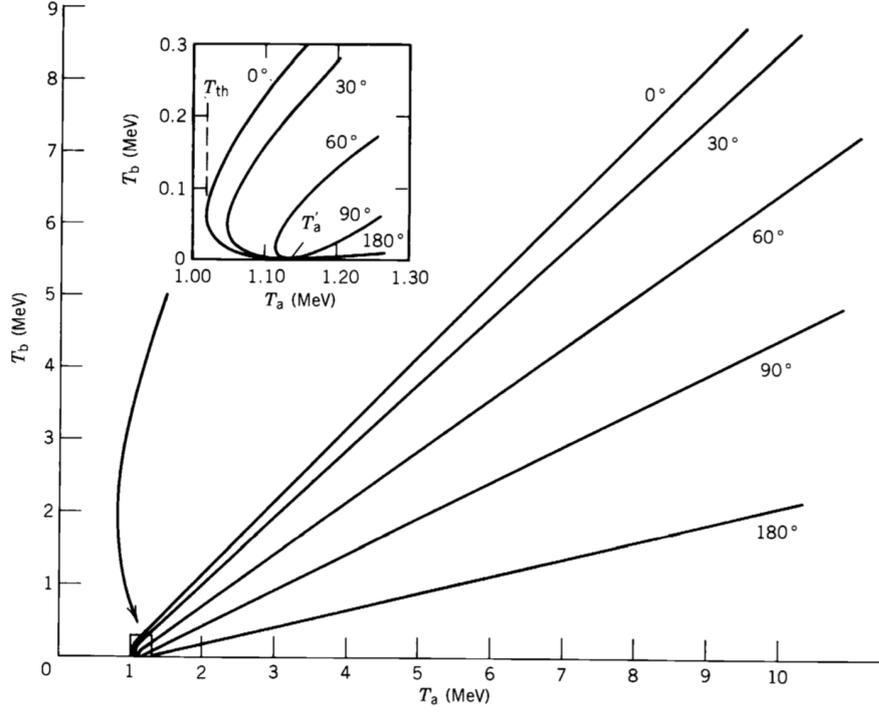


Figura 7.3: $E_{k,b}$ verso $E_{k,a}$ per la reazione ${}^3\text{H}(p, n){}^3\text{He}$. Nel riquadro è evidenziata la zona di non biunivocità.

e verso comuni, sempre però restando due entità separate. Si tratta di un urto perfettamente centrale in cui non vi è stata trasformazione d'energia nella creazione di impulsi trasversi rispetto alla direzione dell'asse del fascio. Se $Q > 0$ non ci sono condizioni di soglia al procedere della reazione, anche se bisogna tener conto della possibile barriera coulombiana, oltre alle forze nucleari a corto range.

La condizione di non-biunivocità ha luogo per valori di energia compresi tra E_{th} ed E'_a , con

$$E'_a = (-Q) \frac{m_Y}{m_Y - m_a} \quad (7.9)$$

e si presenta chiaramente solo per $Q < 0$, rivestendo un ruolo importante esclusivamente per reazioni che coinvolgano nuclei di masse confrontabili. Dalle [7.8](#) e [7.9](#) si ottiene

$$E'_a - E_{th} \simeq E_{th} \frac{m_a m_b}{m_Y (m_Y - m_a)} \left(1 - \frac{m_b}{m_Y} + \dots \right) \quad (7.10)$$

da cui si nota che se a e b sono nuclei con $A \leq 4$ e Y è un nucleo pesante o medio pesante, allora l'intervallo $(E'_a - E_{th})$ di non-biunivocità è inferiore all'1% dell'energia di soglia della reazione. Un secondo esempio per la reazione ${}^{14}\text{C}(p, n){}^{14}\text{N}$ è mostrato in figura [7.4](#).

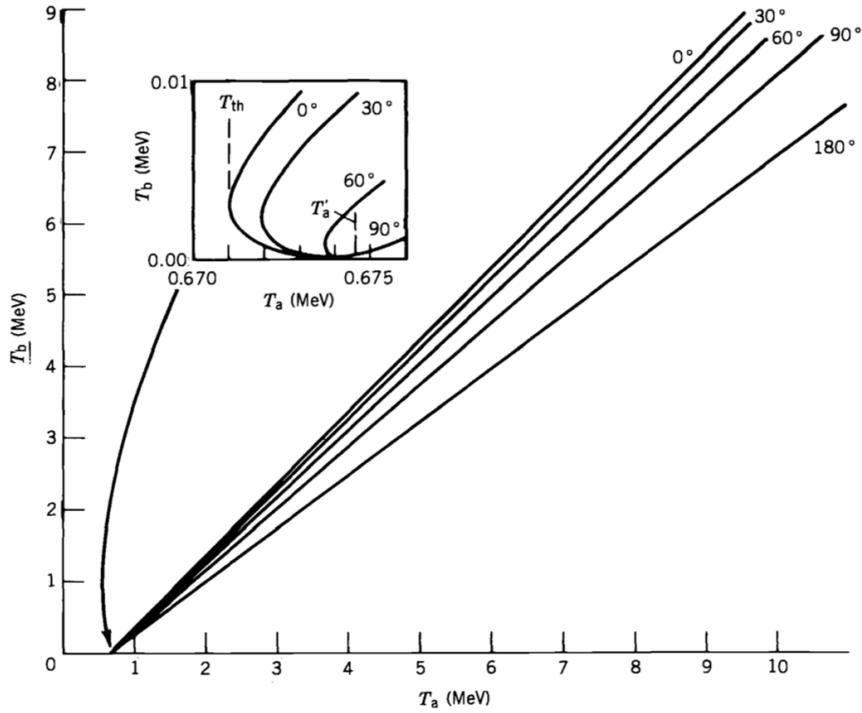


Figura 7.4: $E_{k,b}$ verso $E_{k,a}$ per la reazione $^{14}\text{C}(p, n)^{14}\text{N}$. Nel riquadro la zona di non biunivocità.

Si osserva che la zona di non-biunivocità si manifesta fino ad un valore angolare massimo possibile ϑ_m che equivale alla condizione di annullamento dell'argomento della seconda radice quadrata presente nella [7.7](#)

$$\cos^2 \vartheta_m = - \frac{(m_Y + m_b) [m_y Q + (m_Y - m_a) E_{k,a}]}{m_a m_b E_{k,a}} \quad (7.11)$$

Per $E_{k,a} = E'_{k,a}$ la zona di non-biunivocità si estende da $\vartheta = 0$ sino a $\vartheta_m = 90^\circ$; in prossimità di $E_{k,a} = E_{th}$ ha invece luogo soltanto per $\theta_m \simeq 0$. Se una reazione è invece caratterizzata dall'aver $Q > 0$, come detto non vi sono né un valore di soglia energetica né intervalli angolari per i quali si abbiano doppi valori dell'energia. Considerando ad esempio le reazioni inverse delle due viste sopra, ovvero $^3\text{He}(n, p)^3\text{H}$ e $^{14}\text{N}(n, p)^{14}\text{C}$, si ha $-Q \rightarrow +Q$, e la nuova situazione è illustrata in figura [7.5](#).

Dalla misura di $E_{k,b}$, noti ϑ ed $E_{k,a}$, si deducono il Q della reazione e la relazione fra le masse. Note m_a , m_b ed m_X si deduce m_Y . Risolvendo la [7.7](#) rispetto al Q -valore si ha

$$Q = E_{k,b} \left(1 + \frac{m_b}{m_Y}\right) - E_{k,a} \left(1 + \frac{m_a}{m_Y}\right) - 2\sqrt{\frac{m_a}{m_Y} \frac{m_b}{m_Y} E_{k,a} E_{k,b}} \cos \vartheta \quad (7.12)$$

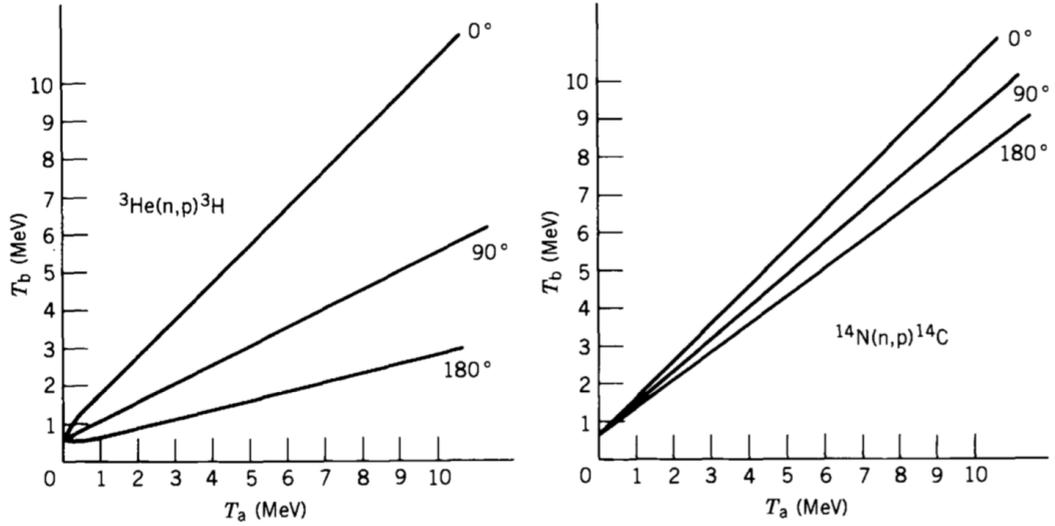


Figura 7.5: $E_{k,b}$ verso $E_{k,a}$ per le reazioni ${}^3\text{He}(n,p){}^3\text{H}$ e ${}^{14}\text{N}(n,p){}^{14}\text{C}$.

A rigori questa procedura non è corretta in quanto nel termine a destra dell'uguaglianza compare anche m_Y , spesso si possono però ottenere risultati sufficientemente accurati sostituendo ad m_Y il valore intero che ne rappresenta il numero di massa, e ciò in particolare se si hanno risultati di misure effettuate a $\vartheta = 90^\circ$, per cui si annulla l'ultimo termine della [7.12](#). Se la reazione conduce a stati eccitati del nucleo risultante Y, allora il Q -valore deve tenerne conto

$$Q_{ecc} = (m_X + m_a - m_Y^* - m_b) c^2 = Q_0 - E_{ecc} \quad (7.13)$$

con Q_0 il Q -valore corrispondente allo stato fondamentale di Y, E_{ecc} l'energia d'eccitazione rispetto allo stato fondamentale di Y, da cui la massa m_Y^* dello stato eccitato

$$m_Y^* = \frac{m_Y c^2 + E_{ecc}}{c^2} \quad (7.14)$$

Solitamente il valore massimo osservato sperimentalmente per $E_{k,b}$ corrisponde al caso della reazione con nucleo finale Y nello stato fondamentale, per cui dalla [7.12](#) si può ottenere Q_0 . I valori via via inferiori di $E_{k,b}$ corrispondono agli stati eccitati per i quali si possono dedurre E_{ecc} e Q_{ecc} dalle misure di $E_{k,b}$.

7.4 Diffusione da potenziale nucleare

Della diffusione da potenziale coulombiano si è detto in paragrafi precedenti, ora si tratta della diffusione da potenziale nucleare.

Data l'intensità dell'interazione non ci si trova nelle condizioni per poter sfruttare la teoria delle perturbazioni e non si può dunque applicare l'approssimazione di Born.

Usando proiettili con energie sufficientemente alte però, la loro lunghezza d'onda di De Broglie $\lambda = h/p$ può risultare inferiore alle dimensioni nucleari tipiche da pensare di utilizzare un approccio di tipo "ottico", confortati in questo dal fatto che le sezioni d'urto sperimentali elastiche mostrano forti analogie con gli andamenti tipici dei fenomeni diffrattivi ottici da parte di un disco opaco.

In ottica la diffrazione da un bordo netto produce una figura di massimi e minimi il cui primo minimo si presenta a un'angolo ϑ tale che $\text{sen}\vartheta \simeq \lambda/R$, con R il raggio del disco. I successivi minimi si presentano quasi ugualmente spazati e i massimi intermedi calano d'ampiezza al progredire di ϑ .

Un nucleo può assorbire efficacemente nucleoni incidenti, per cui ha senso l'analogia con un disco opaco. Nel caso di proiettili carichi bisogna tener conto della concorrenza fra meccanismi d'interazione coulombiana e nucleare. Per osservare la diffusione elastica di nucleoni nella forma *diffrattiva* bisogna quindi riuscire ad eliminare gli effetti coulombiani e ciò può essere ottenuto in due modi. Il primo consiste nell'utilizzare proiettili privi di carica elettrica come i neutroni, che però sentono la forza nucleare.

Le sezioni d'urto differenziali in questi casi mostrano dei minimi sempre superiori a zero, in quanto la superficie nucleare non è equiparabile a un bordo netto, ma piuttosto a una struttura diffusa. Per ridurre gli effetti coulombiani con proiettili carichi si ricorre a due passi successivi, il primo dei quali consiste nell'utilizzare proiettili di energia sufficiente a contrastare la barriera coulombiana, onde permettere il raggiungimento di piccoli valori di massimo avvicinamento fra proiettile e bersagli; quindi si osservano in particolare gli andamenti ad angoli grandi, dove la sezione d'urto coulombiana decresce molto e rapidamente. Uno dei risultati della diffusione elastica di nucleoni su nuclei è la determinazione dei raggi nucleari; anche se i valori ottenuti dipendono in una certa misura dal modello di potenziale utilizzato per descrivere l'interazione, si ottiene comunque che i risultati sono generalmente consistenti con l'ipotesi che per un nucleo simmetrico si possa considerare una forma sferica con raggio espresso dalla $R = R_0 A^{1/3}$, con $R_0 \simeq 1.25$ fm.

Una diffusione anelastica coulombiana implica che il nucleo, dopo l'interazione, viene lasciato in una condizione eccitata a carico di parte dell'energia cinetica del proiettile e anche quest'ultimo potrebbe essere in una condizione d'eccitazione, dopo l'urto.

Se in questi casi si misura la distribuzione in energia delle particelle diffuse

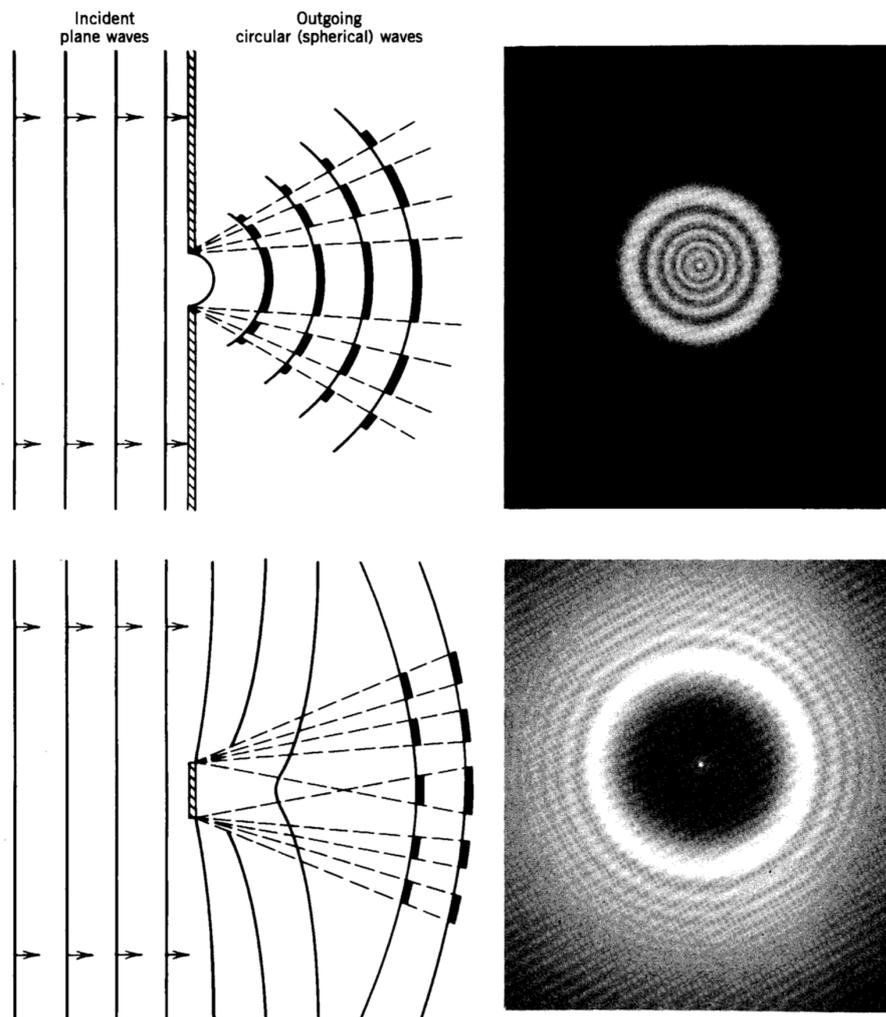


Figura 7.6: In alto la rappresentazione della diffrazione della luce prodotta da una piccola apertura circolare; in basso quella prodotta da un piccolo disco opaco circolare (Atlas of Optical Phenomena - 1962).

a un angolo solido definito, si osserva la presenza di un singolo picco elastico, alla più alta energia, e di picchi a energie inferiori ognuno dei quali corrisponde a interazioni anelastiche associate a specifici stati eccitati del nucleo bersaglio. La posizione di ognuno di questi picchi permette di risalire all'energia dello stato eccitato che lo ha generato, e la sua popolazione è proporzionale alla sezione d'urto per la reazione d'eccitazione dello stato ad esso associato.

Le misure delle distribuzioni angolari delle particelle diffuse dai vari stati eccitati permettono di risalire ai valori di spin-parità degli stessi.

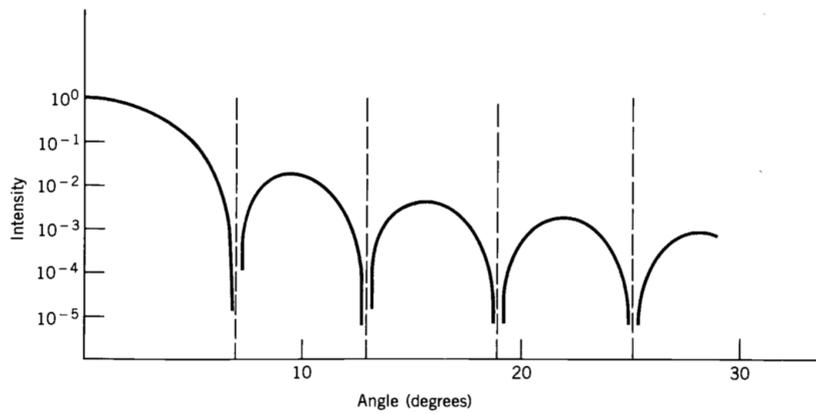


Figura 7.7: Figura di diffrazione prodotta da luce incidente su un foro circolare. L'andamento è calcolato per una lunghezza d'onda dieci volte superiore al diametro dell'apertura circolare. I minimi hanno intensità zero.

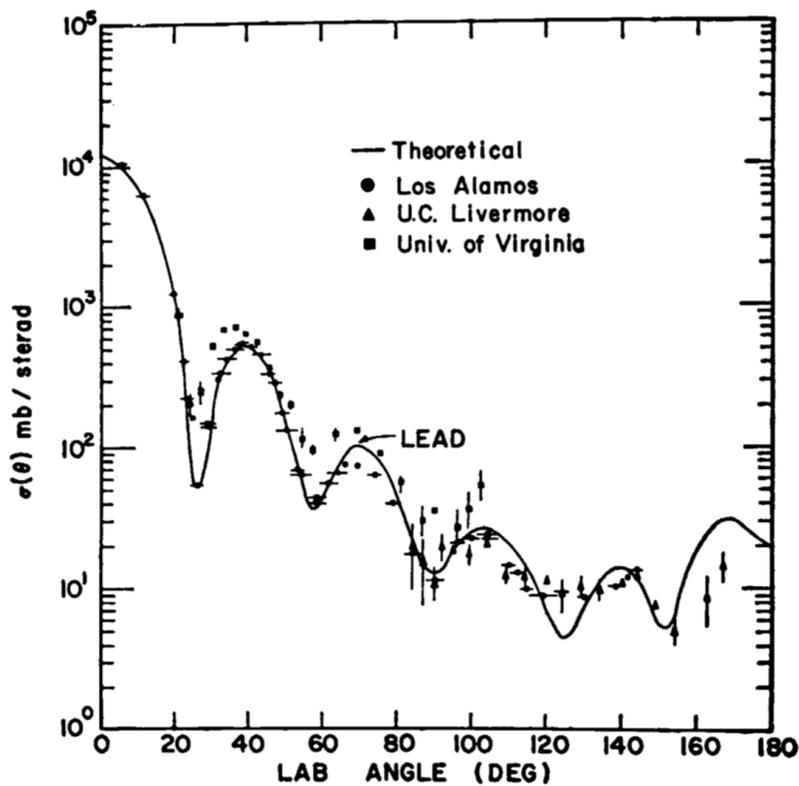


Figura 7.8: Diffusione elastica di neutroni da 14 MeV su piombo (S.Fernbach - Rev. Mod. Phys. 30 (1958) 415).

7.5 Diffusione in onde parziali

Si illustra ora un approccio che permette di dedurre espressioni per le sezioni d'urto confrontabili con quelle sperimentali, di utilità anche negli studi a energie superiori, comprese quelle per lo studio della struttura a quark dei nucleoni e degli adroni in genere.

Si consideri un fascio di particelle incidenti lungo l'asse z di un sistema di riferimento (x, y, z) e si supponga di avere un centro diffusore di massa $\approx \infty$ posizionato nell'origine del sistema di riferimento. Si assuma di poter rappresentare ogni particella del fascio incidente come un'onda piana e^{ikz} con impulso di modulo $p = \hbar k$, e le particelle in uscita siano rappresentate da onde sferiche.

L'analisi del problema diventa quindi più agevole se si esprime l'onda piana incidente anch'essa come sovrapposizione di onde sferiche

$$\psi_{inc} = A e^{ikz} = A \sum_{\ell=0}^{\infty} i^{\ell} (2\ell + 1) j_{\ell}(kr) P_{\ell}(\cos\vartheta) \quad (7.15)$$

con A costante di normalizzazione.

Le funzioni radiali $j_{\ell}(kr)$ sono le *funzioni sferiche di Bessel*, soluzioni della parte radiale dell'equazione di Schrödinger in una regione lontanata dal bersaglio, dove il potenziale nucleare è ormai trascurabile. Le funzioni angolari $P_{\ell}(\cos\vartheta)$ sono i *polinomi di Legendre*

$$\begin{aligned} P_0(\cos\vartheta) &= 1 \\ P_1(\cos\vartheta) &= \cos\vartheta \\ P_2(\cos\vartheta) &= \frac{1}{2} (3 \cos^2\vartheta - 1) \end{aligned} \quad (7.16)$$

ecc.

Si dice in questo caso di aver sviluppato l'onda incidente e quella diffusa in *onde parziali*, ognuna delle quali corrispondente a uno specifico valore ℓ del momento angolare. La procedura è possibile se il potenziale d'interazione nucleare è di tipo "centrale". Questo approccio si rivela utile finché risulta sufficiente considerare l'effetto del potenziale nucleare soltanto sulle onde parziali di ordine ℓ più basso.

Semiclassicamente, se una particella di impulso $p = 2\pi\hbar/\lambda$ interagisce con parametro d'urto b , allora il momento angolare relativo è dato da

$$\ell \hbar = p b \quad \text{da cui:} \quad b = \ell \frac{\hbar}{p} = \ell \frac{\lambda}{2\pi} = \ell \lambda \quad (7.17)$$

Siccome ℓ può assumere soltanto valori interi, semiclassicamente si può dire che particelle con momento angolare compreso tra $0\hbar$ e $1\hbar$ interagiscono con parametri d'urto compresi fra $b = 0$ e $b = \lambda$, e quindi attraversano

un'area circolare efficace (sezione d'urto) pari a $\pi\lambda^2$.

Per $\hbar \leq \ell \leq 2\hbar$ la sezione d'urto risulta un anello circolare di raggio interno λ , raggio esterno 2λ , e area $3\pi\lambda^2$.

Si può dunque immaginare di suddividere l'area d'interazione in zone, ognuna corrispondente a un definito valore di momento angolare ℓ e di area

$$\pi [(\ell + 1)\lambda]^2 - \pi (\ell\lambda)^2 = (2\ell + 1)\pi\lambda^2$$

Si può, in modo semiclassico, ragionevolmente stimare il massimo valore di b come $b_{max} = R_1 + R_2$, ovvero la somma del raggio del nucleo incidente con quello del nucleo bersaglio, deducendo quindi che il massimo valore di ℓ può essere in tal caso $\ell_{max} = b_{max}/\lambda$, e la sezione d'urto corrispondente

$$\sigma = \sum_{\ell=0}^{R/\lambda} (2\ell + 1)\pi\lambda^2 = \pi (b_{max} + \lambda)^2 \quad (7.18)$$

che seppur semiclassica è una stima ragionevole, tenendo conto, tramite il termine λ , dell'indeterminazione spaziale quantisticamente associata al proiettile.

Asintoticamente, ovvero lontano dal bersaglio, le funzioni di Bessel si approssimano a

$$\begin{aligned} j_\ell(kr) &\simeq \frac{\text{sen}(kr - \ell\pi/2)}{kr} \quad \text{per } (kr \gg \ell) \\ &= \frac{e^{i(kr - \ell\pi/2)} - e^{-i(kr - \ell\pi/2)}}{2ikr} \end{aligned} \quad (7.19)$$

per cui

$$\psi_{inc} = \frac{A}{2kr} \sum_{\ell=0}^{\infty} i^{\ell+1} (2\ell + 1) \left[e^{-i(kr - \ell\pi/2)} - e^{i(kr - \ell\pi/2)} \right] P_\ell(\cos\vartheta) \quad (7.20)$$

dove il primo termine in parentesi quadra rappresenta un'onda sferica entrante convergente verso il bersaglio e il secondo termine un'onda sferica uscente dal bersaglio. La sovrapposizione delle due costituisce l'onda piana.

Come effetto della causalità la diffusione può naturalmente agire solo sull'onda uscente e lo può fare in due modi: tramite una modificazione della fase e/o tramite una modificazione dell'ampiezza.

La modificazione dell'ampiezza, se non si considera la possibilità della trasformazione di parte dell'energia incidente in ulteriori particelle uscenti, implica sostanzialmente una riduzione del numero di particelle nel canale d'uscita rispetto a quelle coinvolte nel canale d'ingresso. Ma si ricordi che la funzione d'onda rappresenta soltanto le particelle con impulso pari ad $\hbar k$. In presenza di diffusione anelastica, energia e identità delle particelle uscenti possono cambiare, rispetto al canale d'ingresso. Al termine e^{ikr} saranno

quindi generalmente associate anche particelle provenienti da diffusioni anelastiche.

Le diffusioni determinate da una specifica causa d'interazione costituiscono quello che vien detto un definito *canale di reazione*. Alcuni canali di reazione possono essere chiusi per le particelle interagenti, se ad esempio non ci sono abbastanza energia e/o momento angolare disposizione.

Per tener conto delle conseguenti variazioni nelle onde parziali uscenti di ordine ℓ -mo si introduce un coefficiente complesso η_{ℓ} nel termine d'onda uscente e^{ikr} nell'equazione [7.20](#) che diventa

$$\psi_{inc} = \frac{A}{2kr} \sum_{\ell=0}^{\infty} i^{\ell+1} (2\ell+1) \left[e^{-i(kr-\ell\pi/2)} - \eta_{\ell} e^{i(kr-\ell\pi/2)} \right] P_{\ell}(\cos\vartheta) \quad (7.21)$$

La [7.21](#) rappresenta quindi la sovrapposizione di onde incidenti e diffuse: $\psi = \psi_{inc} + \psi_{dof}$. Sottraendo la [7.21](#) alla [7.20](#) si ottiene l'onda diffusa

$$\begin{aligned} \psi_{dif} &= \frac{A}{2kr} \sum_{\ell=0}^{\infty} i^{\ell+1} (2\ell+1) i (1-\eta_{\ell}) e^{i(kr-\ell\pi/2)} P_{\ell}(\cos\vartheta) \\ &= \frac{A}{2k} \frac{e^{ikr}}{r} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) (1-\eta_{\ell}) P_{\ell}(\cos\vartheta) \end{aligned} \quad (7.22)$$

Se si considerano i contributi a ψ_{dif} relativi esclusivamente ai valori del numero d'onda k corrispondenti a quelli dell'onda incidente, allora si ottiene la rappresentazione della diffusione elastica.

Si può quindi introdurre la densità di corrente diffusa come

$$\begin{aligned} j_{diff} &= \frac{\hbar}{2mi} \left(\psi_{dif}^* \frac{\partial \psi_{dif}}{\partial r} - \frac{\partial \psi_{dif}^*}{\partial r} \psi_{dif} \right) \\ &= |A|^2 \frac{\hbar}{4mkr^2} \left| \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) i (1-\eta_{\ell}) P_{\ell}(\cos\vartheta) \right|^2 \end{aligned} \quad (7.23)$$

Essendo la corrente incidente data da

$$j_{inc} = \frac{\hbar k}{m} |A|^2 \quad (7.24)$$

si ottiene, per la sezione d'urto differenziale

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{4k^2} \left| \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) i (1-\eta_{\ell}) P_{\ell}(\cos\vartheta) \right|^2 \quad (7.25)$$

Integrando i polinomi di Legendre su tutto l'angolo solido si ottiene la sezione d'urto di diffusione

$$\sigma_{dif} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \pi \lambda^2 (2\ell+1) |1-\eta_{\ell}|^2 \quad (7.26)$$

Nel caso di interazione esclusivamente elastica $|\eta_{\ell}| = 1$ e convenzionalmente si pone $\eta_{\ell} = e^{2i\delta_{\ell}}$, dove δ_{ℓ} rappresenta lo sfasamento dell'onda parziale di ordine ℓ . In questo caso $|1 - \eta_{\ell}|^2 = 4 \sin^2 \delta_{\ell}$, e

$$\sigma_{dif} = \sum_{\ell=0}^{\infty} 4\pi\lambda^2 (2\ell + 1) \sin^2 \delta_{\ell} \quad (7.27)$$

Definendo la *sezione d'urto di reazione* σ_r come quella che tien conto di tutti i possibili canali di reazione tranne di quello elastico, per esprimerla bisogna considerare il rateo con cui le particelle diffuse scompaiono dal canale con un particolare numero d'onda k partendo dalla [7.21](#). Si considera praticamente la differenza fra corrente entrante e corrente uscente ottenendo

$$|j_{inc}| - |j_{out}| = \frac{|A|^2 \hbar}{4mkr^2} \left[\left| \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell + 1) i^{\ell+1} e^{i\ell\pi/2} P_{\ell}(\cos\vartheta) \right|^2 - \left| \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell + 1) i^{\ell+1} \eta_{\ell} e^{i\ell\pi/2} P_{\ell}(\cos\vartheta) \right|^2 \right] \quad (7.28)$$

e la sezione d'urto di reazione diventa

$$\sigma_r = \sum_{\ell=0}^{\infty} \pi\lambda^2 (2\ell + 1) (1 - |\eta_{\ell}|^2) \quad (7.29)$$

La sezione d'urto totale che tien conto di tutti i processi è quindi

$$\sigma_{Tot} = \sigma_{dif} + \sigma_r = \sum_{\ell=0}^{\infty} 2\pi\lambda^2 (2\ell + 1) (1 - \text{Re } \eta_{\ell}) \quad (7.30)$$

Da quanto ottenuto si possono trarre alcune importanti osservazioni:

- La diffusione elastica può manifestarsi anche in assenza di ogni altro tipo d'interazione, come si vede dalla [7.29](#) se $|\eta_{\ell}| = 1$, mentre non si può avere interazione anelastica senza la contemporanea presenza anche di una componente elastica non nulla. Pensando a un processo di tipo diffrattivo ciò equivale a dire che se delle particelle sono rimosse da un fascio incidente dando luogo a una sorta di "ombra" dietro il bersaglio, allora vi saranno delle particelle che per effetto dell'interazione col bersaglio verranno diffratte nella zona d'ombra.
- Considerando il bersaglio alla stregua di un disco opaco che assorba tutte le onde parziali fino a quelle di ordine $\ell = b_{max}/\lambda$ ($\eta_{\ell} = 0$ implica assorbimento completo) e non perturbi quelle per $\ell > b_{max}/\lambda$ ($\eta_{\ell} = 1$), si ha

$$\sigma_{dif} = \pi (b_{max} + \lambda)^2 \quad (7.31)$$

e

$$\sigma_r = \pi (b_{max} + \lambda)^2 \quad (7.32)$$

da cui

$$\sigma_{Tot} = 2\pi (b_{max} + \lambda)^2 \quad (7.33)$$

per cui la sezione d'urto totale vale il doppio della sezione d'urto geometrica. È un effetto "non classico" e può essere capito sempre tenendo in considerazione la zona d'"ombra" prodotta dal nucleo bersaglio che però non può limitarsi ad assorbire ma deve appunto anche diffrangere entro la zona d'ombra.

Questi risultati possono essere utilizzati per indagare la struttura dei nuclei: si ipotizza una forma di potenziale d'interazione e si risolve la corrispondente equazione di Schrödinger nella regione d'interazione $0 \leq r \leq R$, imponendo condizioni di continuità agli estremi. Si può così trovare η_ℓ e provare a valutare la plausibilità della forma scelta per il potenziale dal confronto con i dati sperimentali per σ_{dif} e σ_r .

7.6 Interazioni neutroni-nuclei

Per sondare la distribuzione di materia in quanto tale di un nucleo, serve una "sonda" che interagisca sia con i protoni che con i neutroni, ma che non dia luogo a interazioni elettromagnetiche, per poter separare l'effetto coulombiano dal resto.

Si può in proposito sfruttare la diffusione elastica di neutroni su nuclei.

In ottica si considera la contemporanea presenza di rifrazione e riflessione che non modificano l'intensità totale della luce, e di assorbimento che invece riduce l'intensità totale della luce, introducendo un indice di rifrazione complesso la cui parte reale descrive riflessione e rifrazione, e la cui parte immaginaria descrive invece l'assorbimento.

Nel caso della diffusione di neutroni da nuclei ci si trova di fronte a una tipologia di fenomeni simili in quanto il neutrone incidente con un impulso \vec{p} può eccitare livelli nucleari o produrre altre reazioni, e in tal caso non è più presente nello stato finale, perlomeno non con i valori di energia e impulso iniziali. Si può quindi considerarlo come "assorbito" e ciò vale anche quando subisce una reazione "anelastica", poichè in tal caso sarà infatti passato da uno stato di una certa energia ad un stato con un'altra energia. Esso è stato dunque "sottratto" al suo stato iniziale e questo equivale all'averlo "assorbito". Si può quindi descrivere il fenomeno con un potenziale complesso la cui parte immaginaria è responsabile dell'assorbimento del neutrone.

Utilizzando un bersaglio con numero di massa A non piccolo ($A \gtrsim 16$), si dispone potenzialmente di un numero rilevante di suoi possibili modi d'eccitazione, legati al corrispondentemente gran numero di suoi possibili livelli, e

si può ragionevolmente pensare al nucleo come un buon assorbitore di neutroni incidenti, almeno in un certo intervallo di energie.

Sperimentalmente si osserva che la sezione d'urto totale per neutroni su nuclei pesanti a partire da alcune decine di MeV è sostanzialmente costante al crescere delle energie fino ai valori più alti, come mostrato nelle figure 7.9 e 7.10. Dal valore misurato della sezione d'urto totale si può quindi otte-

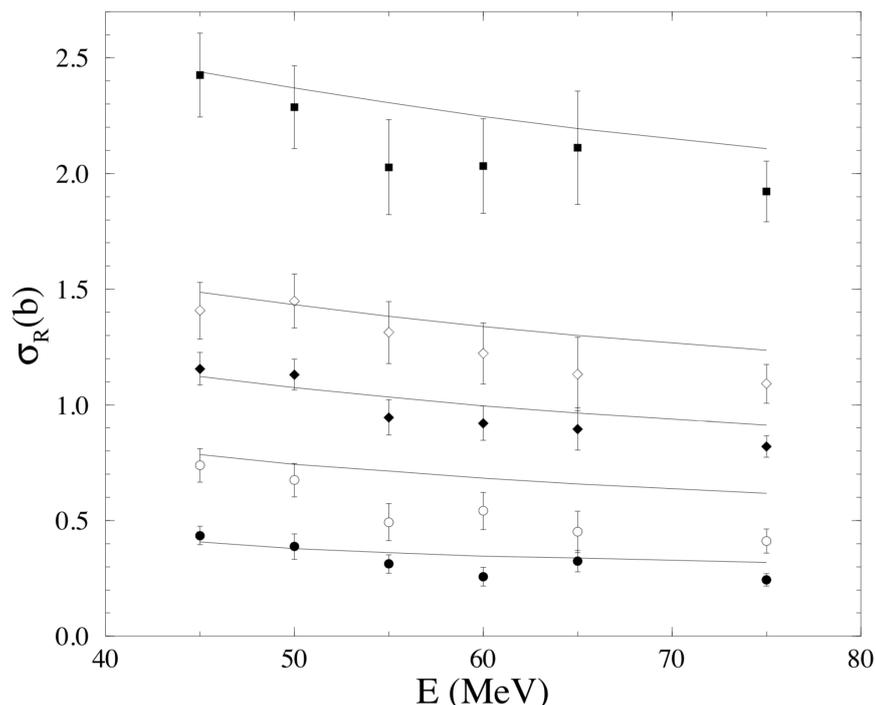


Figura 7.9: Sezione d'urto totale di reazione per neutroni su ^{12}C , ^{28}Si , ^{56}Fe , ^{90}Zr e ^{208}Pb . Le curve sono fit con previsioni di modello ottico.

nera $R \simeq (b_{max} + \lambda)$ che a meno delle "dimensioni" del neutrone incidente rappresenta l'estensione radiale della distribuzione di materia del nucleo che sente l'interazione forte. Anche in questo caso, al variare di A , si trova che vale

$$R = R_0 A^{1/3} \quad (7.34)$$

con R_0 leggermente superiore al valore trovato per diffusione coulombiana. Utilizzando la distribuzione di Woods-Saxon per effettuare un *best-fit* separatamente sui dati provenienti dalla diffusione di elettroni e su quelli provenienti dalla diffusione di neutroni, si ottiene rispettivamente

$$\begin{aligned} R_0 = 1.07 \text{ fm} \quad , \quad a = 0.55 \text{ fm} \quad , \quad (\text{elettroni}) \\ R_0 = 1.25 \text{ fm} \quad , \quad a = 0.65 \text{ fm} \quad , \quad (\text{neutroni}) \end{aligned} \quad (7.35)$$

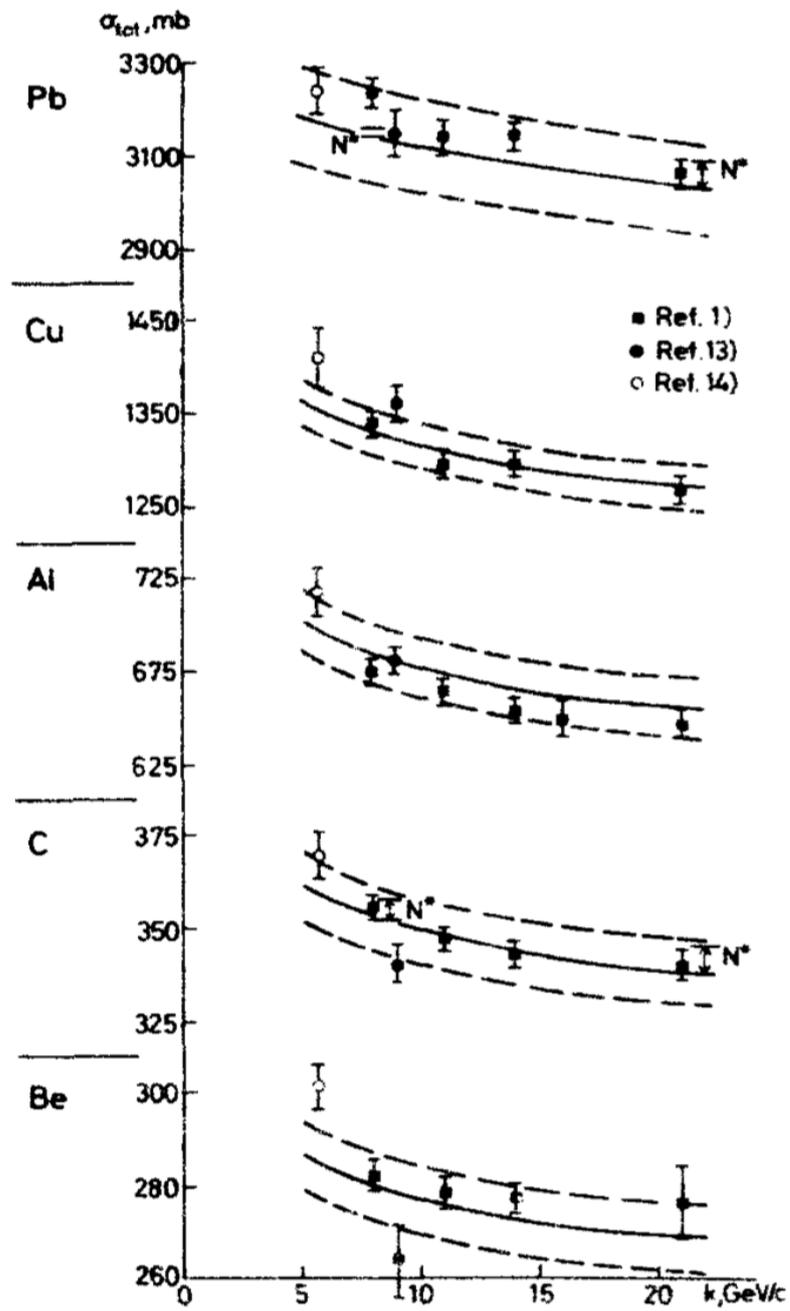


Figura 7.10: Sezioni d'urto totali n-nucleo per impulsi maggiori di 5 GeV/c [G.V. Bochman et al., Phys.Lett. 33B (1970) 222].

Alle energie considerate gli elettroni hanno lunghezze d'onda molto inferiori alle dimensioni nucleari esplorate, sono sostanzialmente puntiformi, per cui la distribuzione di carica nucleare va pensata associata ai "centri" dei protoni del nucleo; nell'interazione forte fra neutroni e nucleo invece, oltre che le dimensioni non più trascurabili della sonda neutronica, cui bisogna pensare associato un opportuno fattore di forma, bisogna considerare anche le dimensioni fisiche finite di ogni singolo nucleone. Tutto ciò concorre alle differenze ottenute nei due casi. Naturalmente, al crescere dell'energia dei

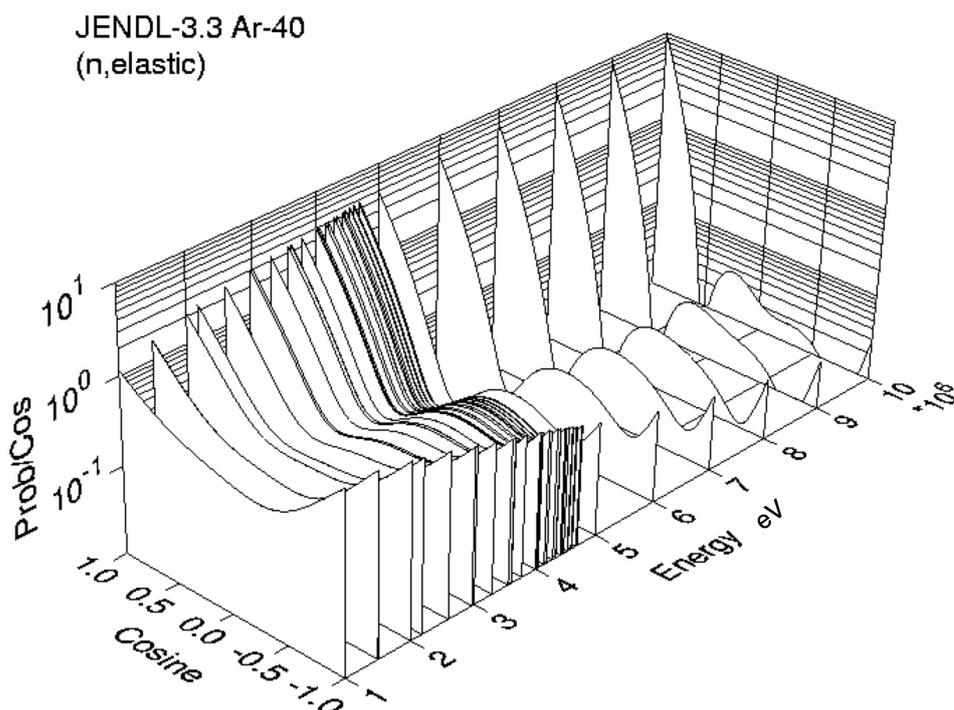


Figura 7.11: Sezioni d'urto differenziali normalizzate per neutroni su ^{40}Ar a energie crescenti da 1 a 10 MeV. Si nota l'insorgere sempre più evidente dell'andamento diffrattivo all'aumentare dell'energia, quindi al ridursi della lunghezza d'onda di De Broglie dei neutroni incidenti.

neutroni incidenti, e quindi al diminuire della loro lunghezza d'onda, ci si aspetta che divengano sempre più evidenti fenomeni di diffusione diffrattiva, come mostrato in figura [7.11](#).

Finora si è sempre supposto di trattare diffusioni elastiche, in cui cioè gli stati iniziali e finali delle particelle e nuclei coinvolti restano immutati e l'unico trasferimento d'energia considerato è quello dell'energia di rinculo del bersaglio senza che né questo né il proiettile si trovino in uno stato eccitato dopo l'interazione. Ciò significa che una volta fissati gli angoli di diffusione, le energie nei canali d'ingresso e d'uscita della reazione sono univocamente

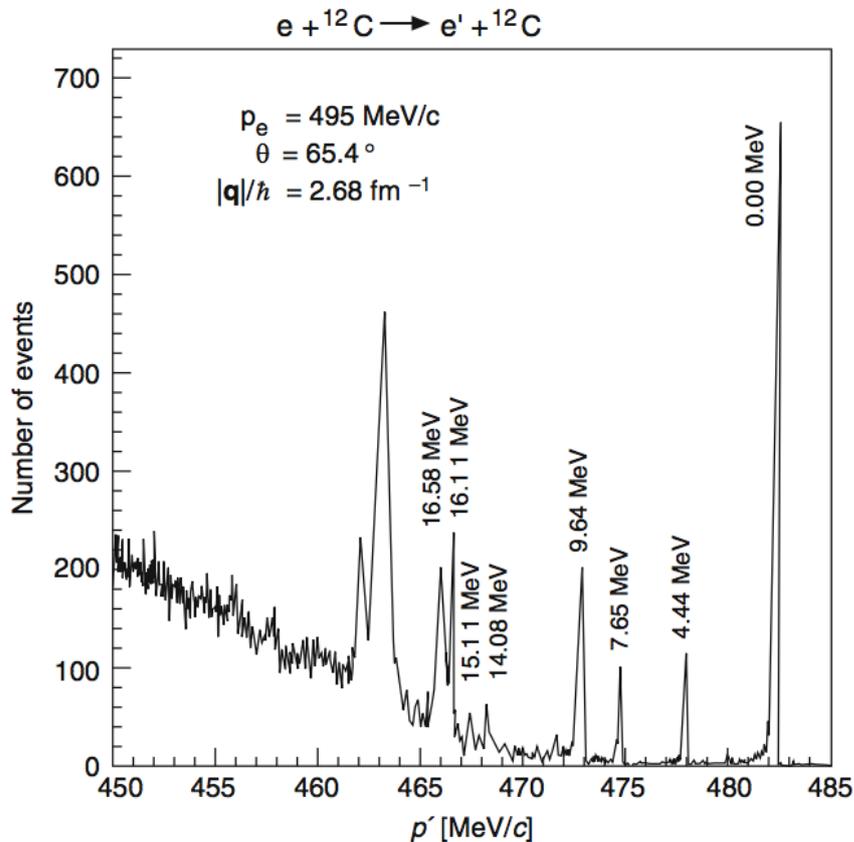


Figura 7.12: Spettro della diffusione di elettroni da 495 MeV/c su ${}^{12}\text{C}$, a 65.4° nel (SL).

connesse, come visto nei paragrafi [6.3](#) e [6.2](#).

Analizzando però gli spettri energetici misurati per la diffusione di elettroni ad angoli ϑ fissati, si nota che contengono eventi per i quali il trasferimento d'energia è chiaramente superiore a quanto ci si potrebbe attendere in base al solo fenomeno di rinculo. Questi eventi corrispondono a reazioni anelastiche come ad esempio mostrato in figura [7.12](#) dove si notano il prominente picco all'energia $E' \approx 482 \text{ MeV}$, dovuto all'urto elastico fra elettroni e nuclei di ${}^{12}\text{C}$, preceduto da picchi a energie inferiori dovuti all'eccitazione di singoli livelli nucleari oltre, in questo caso, al picco ad un'energia $E' \approx 463 \text{ MeV}$, causato da una *risonanza dipolare gigante*¹. La struttura dello spettro a energie inferiori dipende dalle diffusioni quasi-elastiche dei nucleoni legati nel nucleo. I picchi possono essere riprodotti con funzioni che descrivono fenomeni risonanti, con un approccio equivalente a quello spiegato nel para-

¹J. Speth A. van der Woude, "Giant resonances in nuclei" - Rep. Prog. Phys. 44 (1981) 719-786.

grafo seguente.

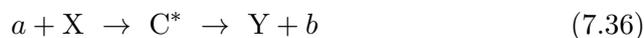
Nel caso in cui non si possano trascurare le dimensioni finite dei proiettili, i dati per le sezioni d'urto fra nuclei proiettile, con numero di massa A_P e nuclei bersaglio, con numero di massa A_B , mostrano comunque una proporzionalità con il termine $(A_P^{1/3} + A_B^{1/3})$, coerentemente con l'assumere, tanto per il proiettile quanto per il bersaglio che le loro dimensioni siano compatibili con una forma sferica di raggio $R \simeq R_0 A_i^{1/3}$, con $R_0 \gtrsim 1.3$ fm, quindi maggiore di quanto trovato negli altri casi, dipendendo ciò dal fatto che un nucleo non va visto effettivamente come una sfera dalla superficie a bordo netto, ma piuttosto a bordo esteso e "sfumato", ad esempio come descritto dalla distribuzione di Wood-Saxon.

7.7 Reazioni con formazione del nucleo composto

Fra le tipologie di reazioni nucleari indicate si descrive ora brevemente quella che procede tramite la formazione di un cosiddetto *nucleo composto*.

Si immagini una particella che incide su un nucleo con parametro d'urto piccolo rispetto al raggio del nucleo stesso, e che quindi avrà una relativamente alta probabilità di interagire con uno dei suoi nucleoni. La particella, ceduta parte della propria energia, potrà comunque ancora interagire con i restanti nucleoni del nucleo in modo tale da ripartire la propria energia cinetica con molti nucleoni del nucleo bersaglio e divenire lei stessa parte del sistema fisico interagente bersaglio+proiettile. Se anche l'incremento medio di energia di ogni nucleone coinvolto è inferiore a quanto servirebbe per scalarlo dal nucleo, può però verificarsi che la redistribuzione statistica dell'energia portata dal proiettile possa talvolta concentrarne su uno dei nucleoni del sistema formatosi una quantità sufficiente a estrometterlo dal sistema in modo simile a quanto avviene nel caso dell'evaporazione d'una molecola da un liquido caldo.

Un simile processo avviene quindi tramite la formazione di uno "stato intermedio" successivo all'assorbimento della particella incidente e che precede l'emissione delle particelle per "evaporazione". Questo stato intermedio viene detto *nucleo composto* e una simile reazione viene indicata come



e C^* rappresenta il nucleo composto. Una simile reazione è quindi un processo che ha luogo in due fasi, la prima delle quali comporta la formazione del nucleo composto, seguita dal suo "decadimento".

Il decadimento di un nucleo composto può avvenire in svariati modi e un'assunzione del modello è che le probabilità relative dei diversi possibili canali di decadimento siano indipendenti dal modo in cui il nucleo composto si è formato, e dipendano invece soltanto dalla composizione del nucleo composto e dall'energia totale del sistema, ciò equivale ad assumere l'ipotesi che

la redistribuzione dell'energia cinetica del proiettile fra i nucleoni del nucleo composto avvenga in modo sostanzialmente "termico", con conseguente "perdita di memoria" del processo di formazione. Il successivo decadimento sarà quindi governato prevalentemente da processi statistici.

Un esempio interessante è riportato nello schema di figura 7.13 dove si vede come uno stesso nucleo composto possa essere ottenuto con diversi canali d'ingresso e possa produrre diversi canali di reazione. Il modello del nucleo

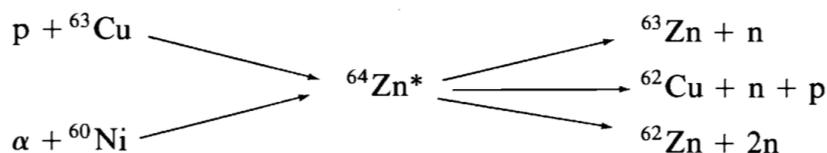


Figura 7.13: Esempio di formazione di un nucleo composto.

composto dá buoni risultati nella descrizione di reazioni a bassa energia, fra i 10 MeV e i 20 MeV, per le quali la probabilità che la particelle incidente sfugga dal sistema prima di essersi sostanzialmente "termalizzata" con esso è bassa. Per lo stesso motivo la sua efficacia cresce al crescere del numero di massa A dei nuclei bersaglio.

Da quanto detto si deduce anche che data la casualità delle interazioni che determinano la formazione di un nucleo composto, l'emissione dei prodotti di decadimento debba essere sostanzialmente isotropa, con una distribuzione angolare quindi uniforme nel sistema del CM, come confermato dai risultati sperimentali.

Se peraltro il proiettile ha un numero di massa non trascurabile rispetto al bersaglio, il momento angolare trasferito al nucleo composto durante l'urto può essere notevole e conseguentemente la distribuzione angolare delle particelle emesse dal suo decadimento ne risente con una preferenza per direzioni ortogonali a quella dell'asse del momento angolare trasferito.

Data l'analogia evaporativa si può dedurre che il numero delle particelle emesse da un nucleo composto cresca con l'energia e che la sezione d'urto abbia una forma pressochè Gaussiana.

I tempi caratteristici d'evoluzione di un processo con formazione di un nucleo composto sono abbastanza lenti, dell'ordine di $10^{-16} \div 10^{-18}$ s.

7.8 Reazioni dirette

Al crescere dell'energia della particella incidente la sua lunghezza d'onda associata cala. Un nucleone da 1 MeV ha una lunghezza d'onda di de Broglie di circa 4 fm e quindi, non risolvendo i singoli nucleoni, è più facile che interagisca con un nucleo producendo un "nucleo composto". Salendo a 20 MeV la lunghezza d'onda associata scende a circa 1 fm rendendo possibile

un'interazione "diretta" fra il nucleone incidente e uno o comunque solo pochissimi fra i nucleoni del bersaglio.

Questa condizione, detta appunto *reazione diretta*, è quindi in un certo senso opposta a quella che conduce al nucleo composto, e oltretutto vede probabili urti fra i nucleoni incidenti e i nucleoni più periferici dei nuclei bersaglio.

I meccanismi del nucleo composto e delle reazioni dirette possono ovviamente contribuire entrambi a una certa reazione e diventa in tal caso importante e interessante capire come distinguere i due contributi.

Un'altra caratteristica delle reazioni dirette è il loro tempo di attuazione, dell'ordine di 10^{-22} s, quindi da quattro a sei ordini di grandezza inferiore rispetto al caso del nucleo composto. Anche le distribuzioni angolari dei prodotti di reazione sono diverse nei due casi, caratterizzate da picchi definiti nel caso delle reazioni dirette.

Una reazione anelastica può procedere secondo entrambi le vie, con una forte dipendenza dall'energia del proiettile, come avviene ad esempio con la reazione di stripping del deutone $X(d, n)Y$, una *reazione di trasferimento* in cui un singolo protone viene trasferito dal proiettile al bersaglio.

L'altra reazione di stripping del deutone $X(d, p)X'$ è invece più facile che proceda per via "diretta" in quanto l'"evaporazione" di un protone da un nucleo composto risulta inibita dalla barriera coulombiana.

La reazione $X(\alpha, n)Y$ difficilmente procede invece per via diretta in quanto richiede il trasferimento di ben tre nucleoni su stati di valenza di un nucleo bersaglio, che è un processo molto poco probabile.

Un'applicazione importante delle reazioni di trasferimento di singola particella, specialmente d, p e d, n , concerne lo studio degli stati eccitati a breve vita media per confrontarne le caratteristiche con le previsioni del "modello a shell".

Lo studio delle reazioni di *pickup* in cui il proiettile cattura un nucleone al nucleo bersaglio, come ad esempio (p, d) , fornisce informazioni sugli stati di singola particella.

7.9 Reazioni di risonanza

Il modello del nucleo composto considera gli stati nucleari non legati come un continuo privo di struttura, anche se in realtà si tratta di stati definiti, ma in numero così grande e con energie così prossime l'una all'altra da formare uno spettro praticamente continuo.

Ognuno di questi stati è poi instabile e presenta quindi una certa "larghezza", il che determina una sostanziale "sovrapposizione" fra gli stati, se la distanza fra questi è dell'ordine o inferiore alla larghezza, da cui lo spettro praticamente "continuo" che giustifica il modello del nucleo composto.

Gli stati legati studiati tramite reazioni dirette rappresentano come detto la condizione simmetrica; risultano stabili rispetto all'emissione di particelle e

le loro vite medie sono molto più lunghe, come ad esempio per i decadimenti γ , per cui sono caratterizzati da "larghezze" molto inferiori. Uno stato con vita media di 10^{-12} s ha ad esempio una larghezza di circa 10^{-3} eV, quindi molto inferiore alla tipica spaziatura fra stati legati contigui. Questo rende plausibile trattare questi stati alla stregua di stati discreti caratterizzati ognuno da una propria funzione d'onda.

Fra questi due estremi si individua quella che vien detta regione di *risonanza*, caratterizzata da livelli discreti con alta probabilità, e quindi sezione d'urto, di formarsi e larghezze piuttosto ridotte in quanto presentano solitamente due soli modi di decadimento disponibili, ovvero la re-emissione della particella incidente o l'emissione di fotoni γ .

Il comportamento delle sezioni d'urto in prossimità dei valori d'energia caratteristici di tali livelli viene descritto con andamenti risonanti del tipo Breit-Wigner, come in [5.35](#).

Le reazioni di cattura radiativa mostrano una tipica struttura di risonanza, come per lo spettro in figura [7.14](#).

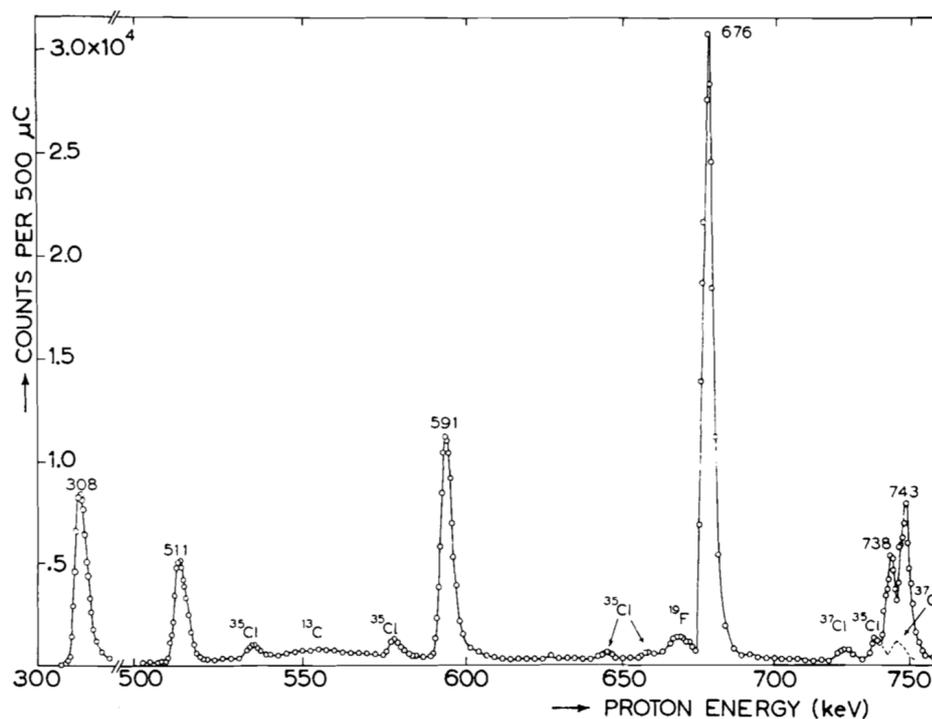


Figura 7.14: Risonanze da cattura radiativa di protoni su ^{23}Na . Lo spettro è presentato in funzione dell'energia dei protoni incidenti. Si osservano anche picchi relativi al Cl in quanto il bersaglio utilizzato consisteva in NaCl.

7.10 Urti e risonanze

Come si è visto, l'individuazione di picchi o di risonanze negli spettri o negli andamenti di sezioni d'urto, e la loro opportuna descrizione e interpretazione, costituiscono uno dei punti cardine delle attività sperimentali in fisica nucleare e delle particelle.

Si riprende ora il problema considerando come esempio quello dell'urto fra pioni π e protoni p o deutoni d (bersagli di idrogeno o di deuterio) nel sistema del laboratorio (SL), e si suppone di misurare le sezioni d'urto di produzione di nuove particelle in funzione dell'energia dei pioni del fascio incidente, o dell'angolo polare ϑ di diffusione rispetto alla direzione z parallela alla velocità di avvicinamento dei proiettili al bersaglio. I pioni che non interagiscono proseguono lungo la traiettoria che hanno seguito per avvicinarsi al bersaglio.

Misurando ad esempio la sezione d'urto di produzione di pioni a diversi angoli ϑ , è intuitivo capire che il numero di quelli semplicemente diffusi dalle interazioni col bersaglio dovrebbe diminuire al crescere dell'angolo ϑ di diffusione, se non altro per la conservazione della quantità di moto totale che nel (SL) è sempre diretta in avanti lungo z .

In generale la sezione d'urto dipende sia da ϑ che dall'energia E_π della particella incidente nel sistema del laboratorio: $\sigma = \sigma(\vartheta, E_\pi)$. I risultati sperimentali per l'interazione fra pioni e protoni o deutoni mostrano, in figura 7.15, un andamento delle sezioni d'urto lentamente variabile per energie E_π superiori a pochi GeV, che presenta però dei picchi in corrispondenza di valori caratteristici di E_π , vi sono cioè valori dell'energia delle particelle incidenti in corrispondenza dei quali la sezione d'urto aumenta anche significativamente rispetto al suo andamento prima e dopo tali valori.

I picchi nella sezione d'urto di figura 7.15 e in altre simili, per la loro forma caratteristica sono detti *risonanze* e sono interpretati come evidenza della produzione di nuove particelle (di massa definita e con ben definiti numeri quantici), non presenti prima dell'urto, che poi decadono. La prima osservazione sperimentale fu di E. Fermi e collaboratori²

Per capire meglio quanto affermato si consideri l'urto elastico

$$\pi^+ + p \rightarrow \pi^+ + p \quad (7.37)$$

in cui le due particelle nello stato finale si trovano in uno stato cinematico diverso da quello iniziale; come detto se il processo è puramente elastico ci si aspetta che la maggior parte delle particelle diffuse vada "in avanti" e con un valore "piccolo" di ϑ . Se però nell'urto parte dell'energia a disposizione dá luogo alla produzione di una nuova particella "X" che poi decade in $\pi^+ + p$ ($\pi^+ + p \rightarrow X \rightarrow \pi^+ + p$), è ragionevole che i prodotti di questo

²H. L. Anderson, E. Fermi, E. A. Long, and D. E. Nagle, "Total Cross Sections of Positive Pions in Hydrogen." Phys. Rev. 85 (1952) 936.

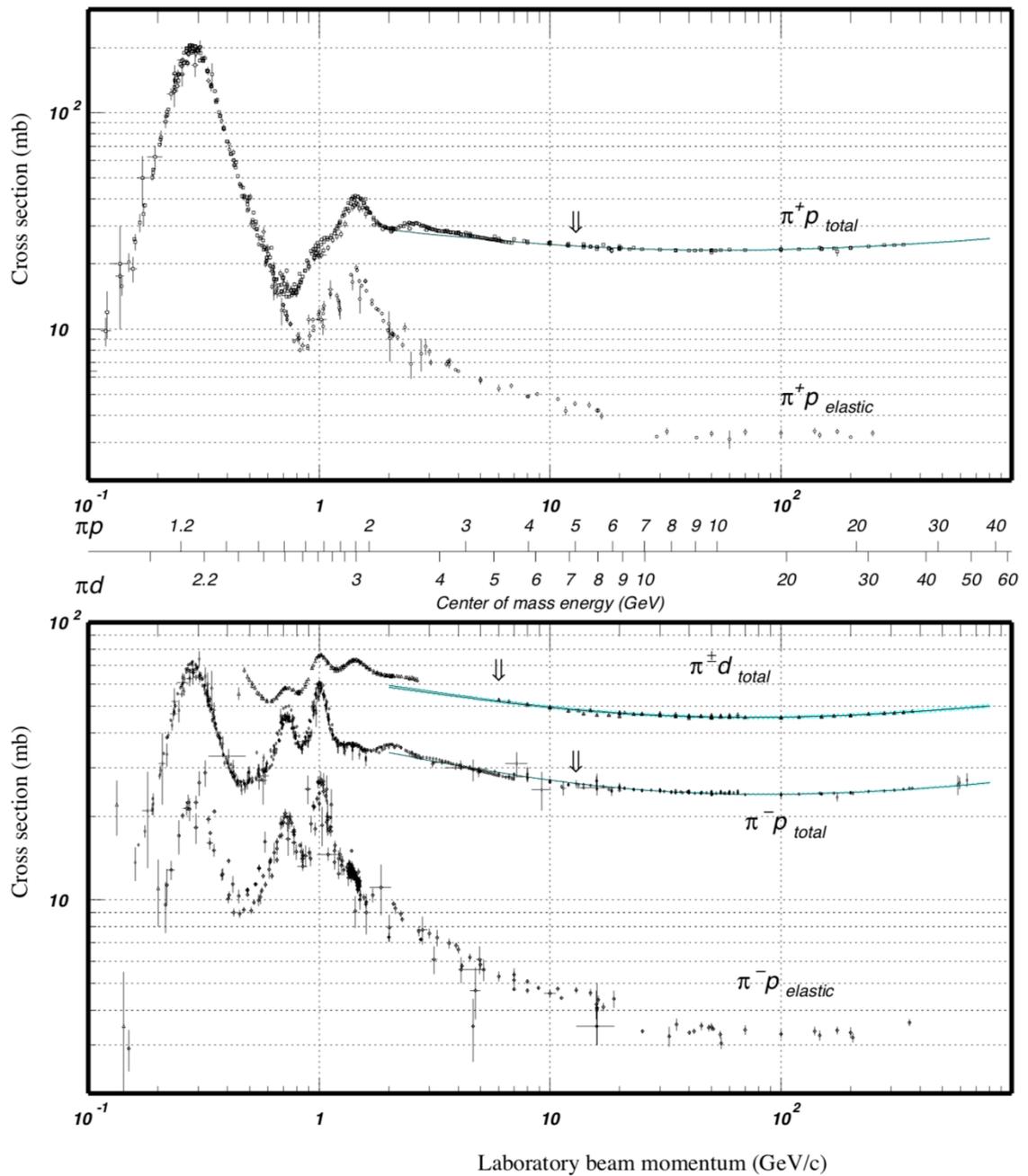


Figura 7.15: Sezioni d'urto elastica e totale per le reazioni $\pi + p$ e $\pi + d$ in funzione della quantità di moto del pione. La scala centrale riporta la corrispondente energia \sqrt{s} disponibile nel sistema del (CM). Il primo picco pronunciato per l'interazione $\pi + p$, centrato a 1.232 GeV/c², corrisponde alle risonanze Δ .

decadimento, pur nel rispetto della conservazione della quantità di moto, vengano emessi senza conservare un particolare ricordo della direzione iniziale di provenienza del pione incidente. In conseguenza di ciò i prodotti di decadimento avranno probabilità non trascurabili di essere emessi ad angoli qualunque, in particolare anche grandi, e fissatone uno ci si aspetta quindi di osservare un aumento del numero di particelle diffuse a quell'angolo, rispetto al caso della diffusione senza formazione della particella X , e quindi un aumento del valore della sezione d'urto corrispondente, man mano che l'energia del pione incidente si avvicina a quella che consente la produzione della particella X di massa pari a quella disponibile nel centro di massa della reazione, divisa per il quadrato della velocità della luce.

Quello ora descritto è un modo diretto per la ricerca di stati adronici eccitati che viene detto anche *formazione*.

Nel caso dell'interazione qui considerata la produzione delle particelle osservate è mediata dalle interazioni forti. Tali particelle sono inoltre altamente instabili e hanno quindi una vita media molto breve; dalle misure sperimentali si osserva che i prodotti del loro decadimento sembrano provenire direttamente dal cosiddetto "vertice d'interazione primario", ovvero dal piccolissimo volume in cui ha effettivamente avuto luogo l'urto fra il pione e il protone o il deutone bersaglio. Le vite medie stimate per tali risonanze sono dell'ordine di 10^{-24} s, il che indica che anche il loro decadimento è mediato dalle interazioni forti. Fra le risonanze in questione vi sono la Δ^- , la Δ^0 , la Δ^+ e la Δ^{++} , che sono stati eccitati dei nucleoni. Di esse si riparlerà nel paragrafo ??, trattando delle interazioni profondamente anelastiche.

Per quanto anche visto nel paragrafo 5.6 e in appendice F, l'energia E di una particella di massa m e quantità di moto \vec{p} è data da

$$E^2 = |\vec{p}|^2 c^2 + m^2 c^4 \quad (7.38)$$

Se si ha un sistema fisico costituito da N particelle "non interagenti" di masse m_i e quantità di moto \vec{p}_i , con $i = 1, 2, \dots, N$, l'energia complessiva E_t del sistema è la somma delle energie delle singole particelle, $E_t = \sum_i^N E_i$, e la quantità di moto totale \vec{p}_t del sistema è la somma vettoriale delle quantità di moto delle singole particelle, $\vec{p}_t = \sum_i^N \vec{p}_i$. Si può dunque porre

$$E_t^2 = |\vec{p}_t|^2 c^2 + M^2 c^4 \quad (7.39)$$

con M che ha le dimensioni fisiche di una massa. Si osservi che se c'è un sistema di riferimento in cui tutte le N particelle sono ferme, allora vale chiaramente

$$E_t = c^2 \sum_{i=1}^N m_i = M c^2 \quad (7.40)$$

per cui, almeno in questo particolare caso, $M = \sum_{i=1}^N m_i$.

Si ricordi che energia e quantità di moto di una particella sono grandezze

fisiche che dipendono dal sistema di riferimento nel quale sono calcolate. La massa di una particella non dipende invece dal sistema di riferimento, ma è una caratteristica propria della particella e costituisce per essa un *invariante relativistico*^{3]}. Quindi la differenza

$$E^2 - |\vec{p}|^2 c^2 = m^2 c^4 \quad (7.41)$$

è anch'essa un invariante relativistico che assume sempre il medesimo valore in qualsiasi sistema di riferimento.

Ciò si rivela utile ad esempio, nel caso in cui si abbia una particella di massa M ferma in un sistema di riferimento che decade in N particelle ognuna con energia E_i e quantità di moto \vec{p}_i . Essendo M invariante deve dunque valere

$$E_t^2 - |\vec{p}_t|^2 c^2 = M^2 c^4 \quad (7.42)$$

Questo permette dunque di risalire alla massa M di una particella che sia decaduta in altre particelle di cui si conoscano energia e quantità di moto. Tornando al caso studiato più sopra della produzione di una risonanza Δ nell'urto $\pi + p$, si ha che questa decade in una coppia (π, p) . Misurando le quantità di moto \vec{p}_π e \vec{p}_p delle due particelle figlie se ne possono ottenere le energie: $E_\pi = \sqrt{p_\pi^2 c^2 + m_\pi^2 c^4}$ e $E_p = \sqrt{p_p^2 c^2 + m_p^2 c^4}$. Si ha quindi

$$(E_\pi + E_p)^2 - (\vec{p}_\pi + \vec{p}_p)^2 c^2 = m_\Delta^2 c^4 \quad (7.43)$$

Ponendosi ad esempio nel sistema di riferimento in cui la Δ è a riposo, per cui $(\vec{p}_\pi + \vec{p}_p) = 0$, si ha

$$(E_\pi + E_p)^2 = M^2 c^4 \quad (7.44)$$

e siccome la conservazione dell'energia richiede che sia

$$E_\pi + E_p = m_\Delta c^2 \quad (7.45)$$

ne deriva immediatamente: $M = m_\Delta$.

Se quindi si conoscono i parametri cinematici del sistema di N particelle prodotte ad esempio dal decadimento di un'altra particella, allora si può sempre calcolare la *massa invariante* di quest'ultima.

Se $N = 2$ come per il caso della Δ e si suppone di effettuare un esperimento in cui si osservano molti eventi con due particelle nello stato finale, esse potrebbero essere il risultato del decadimento di una particella di massa M oppure no. Nel primo caso la loro "massa invariante" dovrà essere pari a $M c^2$, altrimenti dovrà coincidere con un valore qualsiasi compreso fra 0 e l'energia complessiva E_t disponibile nello stato iniziale (canale d'ingresso

^{3]}Il concetto di massa si applica effettivamente soltanto agli stati stazionari, ovvero agli autostati dell'Hamiltoniana, in quanto soltanto onde monocromatiche posseggono una ben determinata frequenza.

della reazione o del decadimento).

Se si dispone quindi di numerosi eventi misurati di questo tipo si può calcolare la massa invariante per ogni coppia di particelle.

La massa invariante si può naturalmente calcolare anche per più di due particelle nello stato finale e costruire quindi un "istogramma" delle frequenze con cui si presentano certi valori di massa invariante. Si ottiene in tal modo un grafico nel quale sono riportati in ascisse i possibili valori di massa invariante e in ordinate il numero di volte in cui si sono trovati questi valori.

Può naturalmente succedere che molti eventi siano casuali in quanto le particelle rivelate e considerate potenziali figlie di una particella più pesante, non avendo in realtà alcuna relazione l'una con l'altra, danno origine a masse invarianti di valore casualmente compreso tra 0 e la massima energia disponibile, quindi vi saranno anche casi di ottenimento casuale del valore di massa invariante corrispondente a quello della particella decaduta. Vi saranno però anche i casi in cui la massa invariante assumerà il valore corrispondente a quello della particella che decadendo ha dato origine a quello specifico stato finale, proprio perchè dovuti al corretto e coerente abbinamento delle particelle rivelate. Il grafico che si ottiene ha quindi generalmente l'aspetto di un fondo continuo, dovuto agli eventi casuali, sul quale si elevano alcuni *picchi* in corrispondenza delle ascisse associate alle masse invarianti delle particelle madri; esso viene detto *distribuzione* o anche *spettro in massa invariante* e in figura 7.16 ne è riportato un esempio tratto dalle misure effettuate con l'esperimento CMS ad LHC, per urti fra protoni con un'energia $\sqrt{s} = 7$ TeV nel centro di massa, rivelando coppie $\mu^+\mu^-$ nel canale d'uscita, e per una luminosità integrata di 40 pb^{-1} ; sono evidenti i picchi relativi a svariate particelle/risonanze quali ad esempio la η , la ρ , la Φ , la J/ψ , la Z .

I picchi nella distribuzione di massa invariante sono detti *risonanze* e ricordando quanto detto nel paragrafo 5.3, si possono descrivere gli andamenti delle sezioni d'urto in prossimità di tali picchi, e quindi dei corrispondenti valori di massa invariante, come la sovrapposizione fra un andamento continuo che tenga conto del fondo casuale, con un andamento risonante descritto dalla cosiddetta *formula di Breit-Wigner*⁴

$$\sigma(E) = \frac{4\pi\lambda^2(2J+1)(\Gamma^2/4)}{(2s_a+1)(2s_b+1)[(E-E_R)^2+(\Gamma^2/4)]} \quad (7.46)$$

dove s_a ed s_b sono gli spin delle particelle a e b nel canale d'ingresso, J è lo spin dello stato risonante X , tutti in unità di \hbar , E_R è il valore d'energia associato alla risonanza. Considerando che lo stato risonante X può generalmente decadere in modi diversi e indipendenti, caratterizzati dall'indice i , a ognuno dei quali è associata una certa *larghezza parziale* $\Gamma_i = \hbar/\tau_i$, la frazione di probabilità che lo stato risonante decada proprio nel modo $i - mo$

⁴Per come dedurla si veda ad esempio D.H. Perkins, Introduction to High Energy Physics.

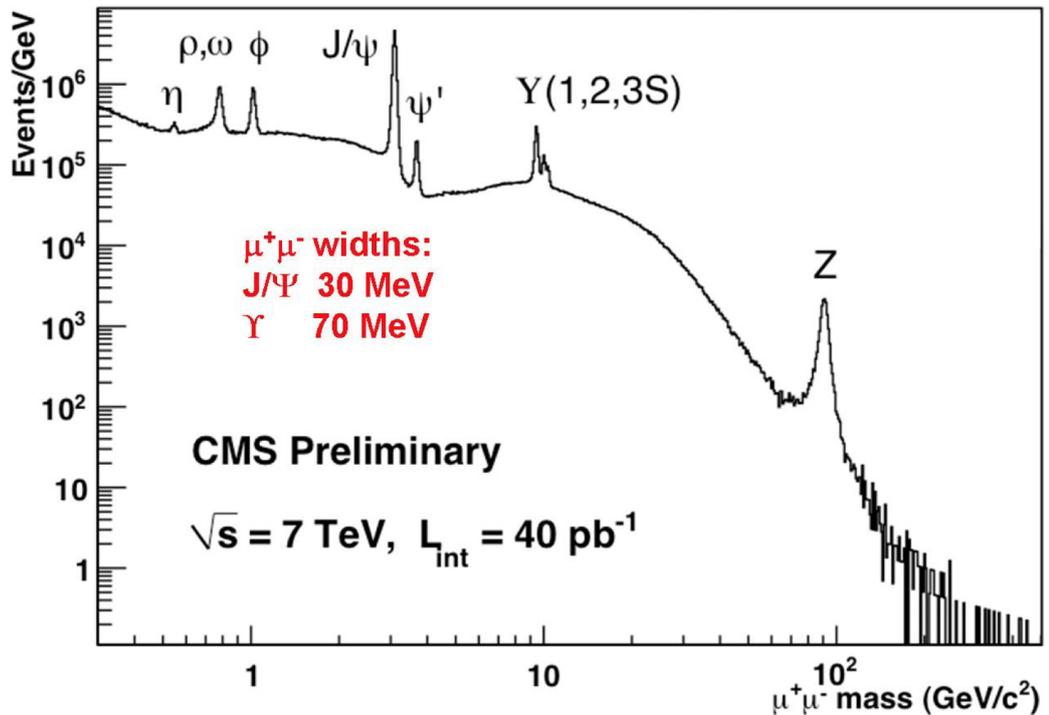


Figura 7.16: Sul fondo continuo si osservano numerosi picchi corrispondenti alle masse di altrettante particelle che decadono in coppie $\mu^+\mu^-$. L'entità del fondo generalmente decresce al crescere dell'energia, in quanto la probabilità di osservare coppie casuali di alta massa invariante è minore rispetto a quella di osservarne di bassa massa invariante.

è data da Γ_i/Γ . Chiaramente $\tau_i = \hbar/\Gamma_i$ assume il significato di vita media dello "stato risonante".

Nel valutare la vita media di uno stato risonante dall'analisi della larghezza a metà altezza del picco che lo rappresenta in uno spettro di massa invariante, bisogna sempre tener conto dell'eventuale contributo alla larghezza del picco misurato, dovuto alla risoluzione del sistema di rivelazione utilizzato. Se nel modo più generale lo stato risonante si forma attraverso un particolare canale i e decade poi attraverso un altro particolare canale j , allora la sezione d'urto che lo descrive corrisponde al prodotto della [7.46](#) con il rapporto $\Gamma_i\Gamma_j/\Gamma^2$.

Tornando ora all'esempio scelto, si osservi che non tutti gli stati eccitati adronici sono ottenibili con esperimenti di *formazione*, e ciò in quanto potrebbero essere necessari flussi incidenti di intensità praticamente non raggiungibili per poter osservare le strutture cercate. Questo è ad esempio il caso di risonanze prodotte in interazioni $(\pi + \pi)$, come il mesone ρ^0 che

ha una massa di $776 \text{ MeV}/c^2$. Particelle come la ρ^0 vengono prodotte efficientemente in reazioni che coinvolgono la produzione di molti pioni nei loro stati finali. Si consideri ad esempio la reazione

$$\pi^- + p \rightarrow \pi^+ + \pi^- + n \quad (7.47)$$

che può procedere attraverso lo stadio intermedio

$$\pi^- + p \rightarrow \rho^0 + n \quad (7.48)$$

seguito da

$$\rho^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^- \quad (7.49)$$

Chiaramente in tal caso i due pioni risultanti del decadimento della ρ^0 restano fra loro correlati e di conseguenza, sperimentalmente, la ρ^0 può essere individuata nello stato finale graficando lo spettro di massa invariante del sistema $\pi^+\pi^-$.

Capitolo 8

Stati adronici legati: quarkonia

Gli stati adronici legati più semplici sono costituiti da coppie di quark e antiquark pesanti, quali $c\bar{c}$ e $b\bar{b}$ che dato l'elevato valore della loro massa, possono essere trattati con approccio non relativistico. Essi vengono denominati *quarkonia*.

Il modo di trattare questi stati prende spunto da stati legati quali l'atomo di idrogeno e il positronio, in cui però l'interazione che determina l'esistenza dello stato legato è quella elettromagnetica. A questo proposito si rammentano ora alcune caratteristiche di tali strutture.

L'atomo di idrogeno, costituito da un protone e un elettrone, è il più semplice stato legato su scala atomica e in prima approssimazione i suoi stati legati e i livelli energetici possono essere dedotti risolvendo l'equazione di Schrödinger non relativistica utilizzando un potenziale statico coulombiano $V_C \propto 1/r$ essendo sostanzialmente r la distanza dal baricentro del sistema atomico

$$\left(-\frac{\hbar}{2m}\Delta - \frac{\alpha\hbar c}{r}\right)\psi(\vec{r}) = E\psi(\vec{r}) \quad (8.1)$$

con α la costante di struttura fine che rappresenta l'accoppiamento elettromagnetico ed m la massa ridotta del sistema

$$m = \frac{m_e M_p}{m_e + M_p} \simeq 0.511 \text{ MeV}/c^2 \quad (8.2)$$

I suoi autostati sono caratterizzati da N nodi nelle funzioni d'onda radiali e dal valore del momento angolare ℓ . Per il potenziale coulombiano si ha che gli stati con i medesimi valori di $n = N + \ell + 1$ sono degeneri, per cui n viene detto *numero quantico principale*. I livelli energetici permessi E_n risultano da

$$E_n = -\frac{\alpha^2 m c^2}{2n^2} \quad (8.3)$$

L'energia di legame dello stato fondamentale ($n = 1$) dell'atomo di idrogeno è pari ad $E_1 = -13.6$ eV. Il raggio di Bohr r_b è dato da

$$r_b = \frac{\hbar c}{\alpha m c^2} \simeq 0.53 \times 10^5 \text{ fm} \quad (8.4)$$

Le interazioni spin-orbita e spin-spin, che determinano rispettivamente le cosiddette *struttura fine* e *iperfine* rimuovono la degenerazione dei livelli energetici principali (figura 8.1). Le correzioni di struttura fine all'andamento del tipo $1/n^2$ dei livelli energetici principali sono dell'ordine di α^2 e quelle iperfini dell'ordine di $\alpha^2(\mu_p/\mu_e)$, essendo μ_i il momento di dipolo magnetico della particella "i". La notazione nl_j indica gli stati per i quali si

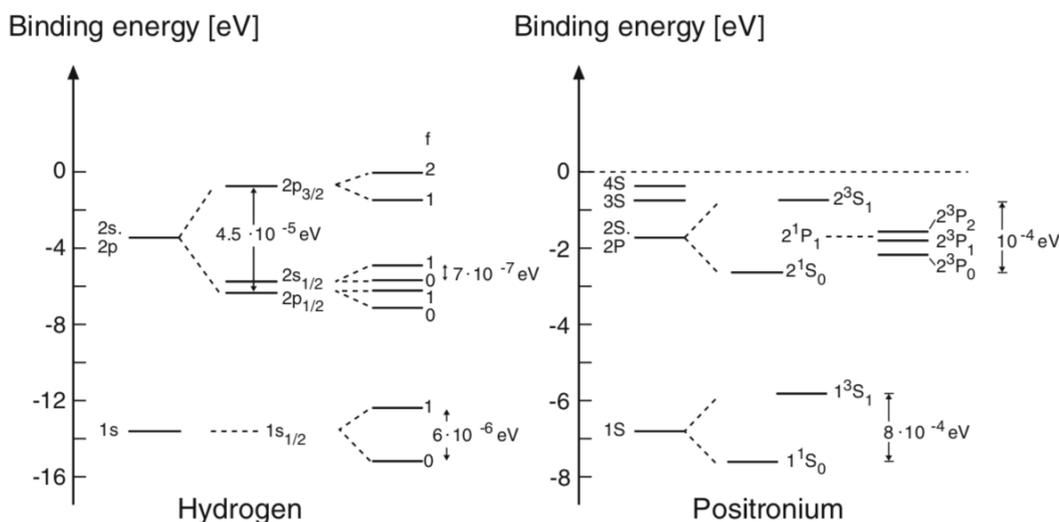


Figura 8.1: Livelli energetici dell'atomo di idrogeno e del positronio.

tiene conto degli effetti di struttura fine. I numeri quantici del momento angolare orbitale, $\ell = 0, 1, 2, 3$ vengono anche denominati s, p, d, f. Il numero quantico j è il momento angolare totale dell'elettrone $\vec{j} = \vec{\ell} + \vec{s}$. Gli effetti di struttura iperfine vengono descritti tramite un ulteriore numero quantico f che descrive il momento angolare totale dell'atomo incluso il contributo \vec{i} dello spin del protone: $\vec{f} = \vec{j} + \vec{i}$.

Come successivo sistema legato più semplice si considera quello costituito da una coppia elettrone-positrone (e^+e^-), detto *positronio*, per il quale la massa ridotta $m = m_e/2$ è praticamente la metà di quella dell'atomo di idrogeno, mentre l'accoppiamento spin-spin è molto maggiore, essendo il momento magnetico μ_e dell'elettrone circa 650 volte superiore a quello μ_p del protone.

La massa ridotta del positronio fa sì che le energie di legame valgano circa

la metà di quelle corrispondenti dell'idrogeno mentre il raggio di Bohr vale circa il doppio. La maggior intensità dell'accoppiamento spin-spin fa sì che per il positronio sia meno evidente, nello spettro energetico, la gerarchia fra gli effetti di struttura fine e iperfine che invece appare per l'atomo di idrogeno (figura 8.1), in quanto le interazioni spin-orbita e spin-spin hanno per il positronio intensità simili.

Per il positronio i numeri quantici rilevanti sono quindi quello quantico principale n , il momento angolare orbitale L , lo spin totale S e il momento angolare totale J .

S può assumere valore 0 (singoletto) o 1 (tripletto), con J che ubbidisce alla disuguaglianza triangolare $|L - S| \leq J \leq L + S$.

La notazione utilizzata per indicare gli stati del positronio è $n^{2S+1}L_J$ ed il momento angolare orbitale viene rappresentato dalle maiuscole S, P, D, F. Elettrone e positrone possono annichilirsi e di conseguenza il positronio ha una vita media finita con decadimento prevalente in 2 o 3 fotoni, in funzione dello spin 0 o 1.

L'ampiezza di decadimento in 2 fotoni dello stato 1^1S_0 è data da

$$\Gamma(1^1S_0 \rightarrow 2\gamma) = \frac{4\pi\alpha^2\hbar^3}{m_2^2c} |\psi(0)|^2 \quad (8.5)$$

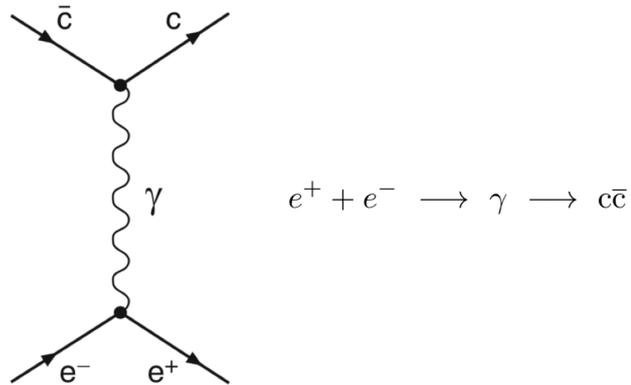
$|\psi(0)|^2$ è calcolata nell'origine e rappresenta quindi la probabilità che e^+ ed e^- si annichilino in un punto. Dalla 8.5 si ottiene per il positronio una vita media pari a circa 10^{-10} s, in ottimo accordo con le misure sperimentali.

In maniera analoga si possono studiare i *quarkonia*, in cui però ad agire è l'interazione forte, e non quella elettromagnetica. Il potenziale efficace e l'intensità dell'accoppiamento forte possono in tal caso essere determinati sperimentalmente dall'analisi degli spettri energetici di questi sistemi e delle probabilità di transizione tra gli stati che li compongono.

8.1 Il charmonio

Il charmonio è uno stato legato $c\bar{c}$ e la nomenclatura con cui si indicano i suoi stati è simile a quella utilizzata per il positronio (le differenze sono dovute a motivi storici!). Il numero quantico principale è dato da $n_{c\bar{q}} = N + 1$, con N il numero di nodi della funzione d'onda radiale.

Un modo per produrre coppie $c\bar{c}$ è dalla conversione di un fotone virtuale generato da un urto e^+e^- a energie nel CM comprese nell'intervallo fra 3 GeV e 4.5 GeV. Variando nell'intervallo indicato le energie dei fasci di elettroni collidenti si ottiene l'andamento sperimentale della sezione d'urto, mostrato in figura 8.3 in cui si evidenziano picchi associati a risonanze che rappresentano diversi stati del charmonio. Se il processo avviene con lo scambio di un fotone virtuale, come in questo caso, allora possono essere creati soltanto stati con numeri quantici $J^P = 1^-$ e quello a più bassa



energia è lo stato 1^3S_1 , chiamato J/ψ , con massa di $3.097 \text{ GeV}/c^2$; si sono rivelate risonanze con masse fino a $4.4 \text{ GeV}/c^2$. Gli stati del charmonio sono

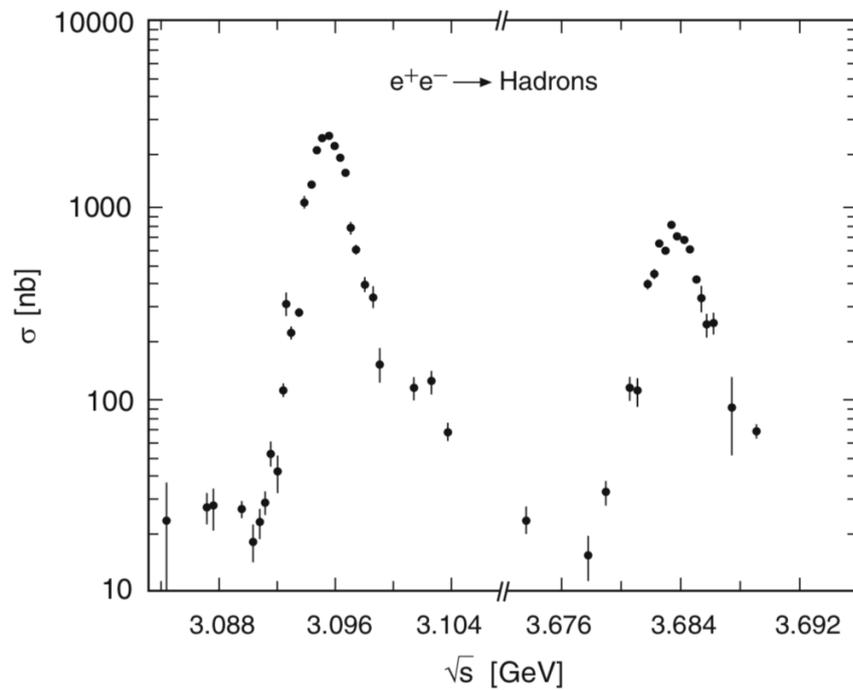


Figura 8.2: Sezione d'urto $e^+ + e^- \longrightarrow \text{adroni}$.

instabili e decadono prevalentemente in adroni per il tramite dell'interazione forte. In analogia al caso atomico o al positronio, gli stati eccitati del charmonio possono emettere fotoni decadendo in stati a energie inferiori. I fotoni emessi possono essere rivelati con apparati costituiti ad esempio da

cristalli di NaI(Tl)¹ che con opportuna tassellatura coprono l'intero angolo solido attorno al volume di reazione, detti anche rivelatori 4π . In figura 8.3

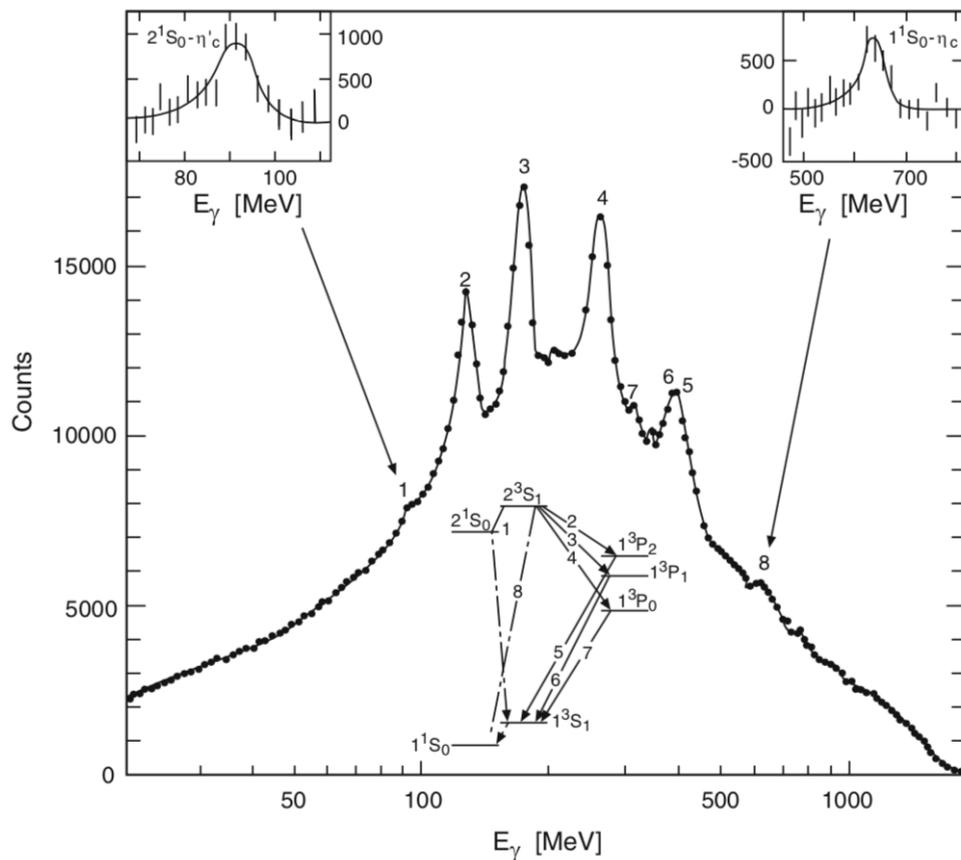


Figura 8.3: Spettro dei fotoni emessi dal decadimento di $\psi(2^3S_1)$, misurato dal rivelatore Crystal Ball. Nel diagramma le linee continue rappresentano transizioni di dipolo elettrico con cambio di parità, quelle tratteggiate transizioni di dipolo magnetico con conservazione della parità.

è mostrato cosa la Crystal Ball ha rivelato dello stato eccitato $\psi(2^3S_1)$ del charmonio: lo spettro di emissione γ è piuttosto ricco con evidenza di 8 righe fra 100 MeV e 700 MeV. Le righe più intense sono quelle associate alle transizioni di dipolo elettrico che ubbidiscono alle regole di selezione $\Delta L = 1$ e $\Delta S = 0$. Si riescono ad osservare anche le transizioni di dipolo magnetico, benchè più deboli di quelle di dipolo elettrico, dato che per stati $c\bar{c}$ l'interazione spin-spin è significativamente più intensa che nel caso atomico, dove

¹Come ad esempio la "Crystal Ball" utilizzata presso lo Stanford Linear Accelerator Center con l'acceleratore SPEAR a partire dal 1979, e in seguito utilizzata a DESY per esperimenti sulla fisica del quark "b", per tornare infine nel 1996 negli USA, presso l'AGS del Brookhaven National Laboratory.

la distanza fra le due particelle interagenti è molto maggiore (circa di un fattore 10^5).

Si ricordi che l'apparente semplicità degli stati del quarkonio sono una diretta conseguenza dei grandi valori delle masse dei quark charm e bottom, per cui quark e antiquark si muovono prevalentemente nell'ambito del potenziale a breve range, con velocità ben al di sotto di valori relativistici.

Similmente al charmonio vi sono poi anche stati legati di coppie $b\bar{b}$ o $t\bar{t}$, dette *bottonomio* e *toponomio*.

8.2 Il potenziale quark - antiquark

Gli stati di charmonio e positronio hanno, per $n = 1$ ed $n = 2$, una struttura molto simile, a parte un fattore di scala dell'ordine di 10^8 . Per valori superiori di n gli stati del charmonio invece non mostrano più l'andamento proporzionale a $1/n^2$ tipico del positronio (e dell'atomo di idrogeno). Sic-

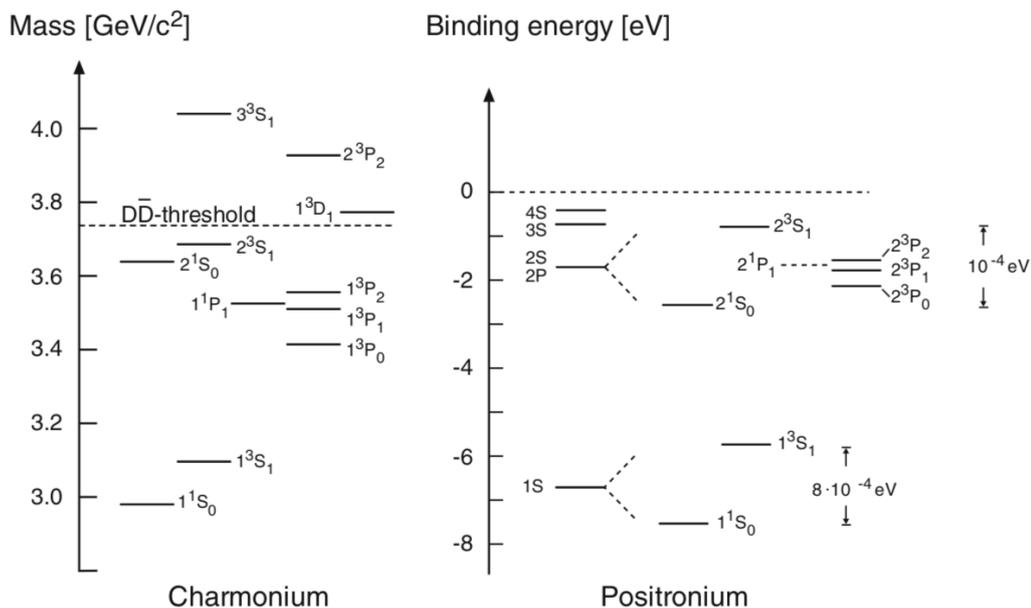


Figura 8.4: Livelli energetici del charmonio e del positronio.

come il potenziale d'interazione determina le posizioni relative dei livelli energetici, questo risultato sperimentale suggerisce che anche il potenziale dell'interazione forte, come quello elettromagnetico, deve essere di tipo coulombiano alle distanze più piccole, ovvero per $n = 1, 2$.

Ciò è in accordo con quanto previsto dalla QCD che predice un potenziale

fra quark che a corte distanze va come $1/r$.

Il fatto però che per il charmonio non vi sia degenerazione fra gli stati 2^3S e 1^3P , come invece nel positronio, evidenzia che il potenziale non può per l'interazione fra quark, considerarsi puramente coulombiano, anche alle distanze più piccole. Ricordando che i quark non sono sperimentalmente osservati come particelle libere, si può assumere il potenziale costituito da due componenti, una di tipo coulombiano dominante alle distanze minori, cui si somma un termine linearmente crescente con la distanza di separazione fra i quark che prevale alle distanze maggiori; questo giustifica anche il fatto che i quark siano confinati negli adroni. Si può dunque scrivere il potenziale fra quark come

$$V(r) = -\frac{4}{3} \frac{\alpha_s(r)\hbar c}{r} + kr \quad (8.6)$$

con i comportamenti asintotici $V(r \rightarrow 0) \propto 1/r$ e $V(r \rightarrow \infty) \propto \infty$. Il fattore $4/3$ deriva dal fatto che i quark possono esistere in tre stati di colore. Il termine d'accoppiamento forte $\alpha_s(r)$ non è costante, come invece quello analogo per il caso elettromagnetico, ma dipende dalla separazione r fra i partoni e diminuisce al diminuire della distanza fra essi. Questa risulta una conseguenza diretta della QCD e si manifesta con la cosiddetta proprietà di *libertà asintotica* per l'interazione forte, per cui si possono considerare i quark alla stregua di particelle semi-libere quando la separazione fra essi è molto piccola, come discusso nel caso della diffusione profondamente anelastica. In figura [8.5](#) sono illustrati l'andamento delle linee per un campo di

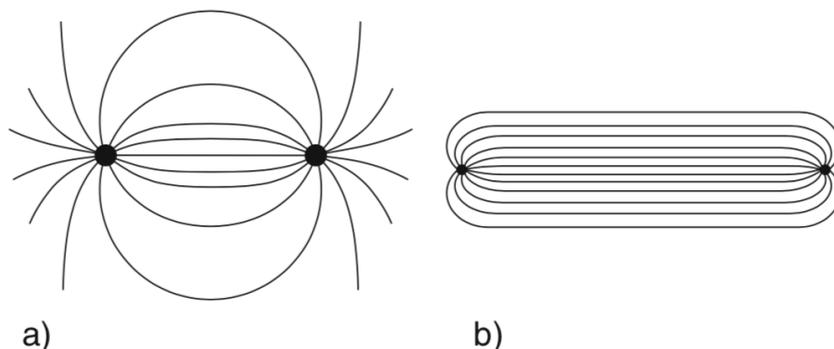


Figura 8.5: a) Linee di campo per un andamento dipolare ($V \propto 1/r$) fra due cariche elettriche, b) e per un andamento del tipo $V \propto r$, come fra due quark a significativa distanza l'uno dall'altro.

tipo dipolare e per uno derivante da un termine del tipo kr , che dá luogo a una configurazione in cui le linee di campo si raggruppano in un "tubo di flusso". Le linee di forza tra i quark appaiono "stirate" e l'energia associata al campo cresce linearmente all'aumentare della distanza fra i quark. La quantità k , assunta costante, determina sostanzialmente l'energia del campo

per unità di lunghezza e viene detta *tensione della stringa*. I livelli ener-

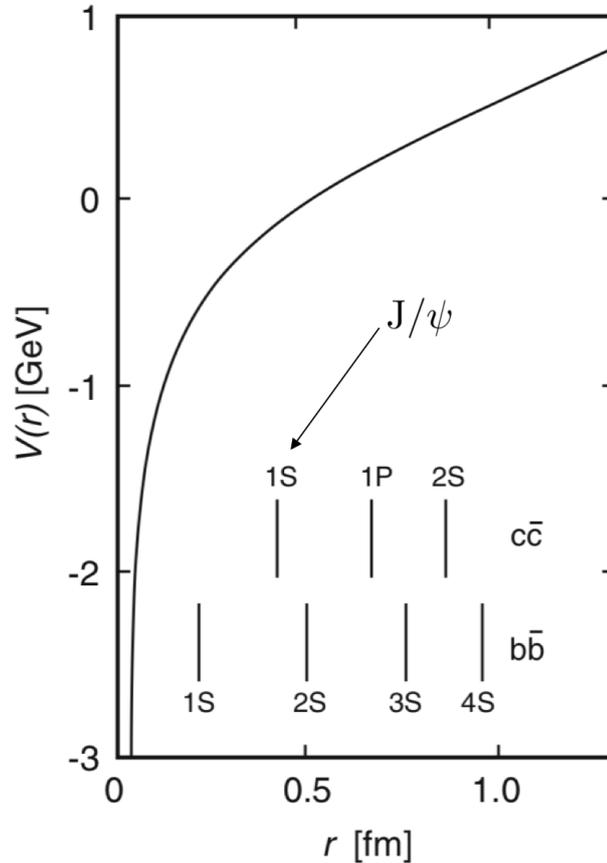


Figura 8.6: Potenziale di interazione forte verso la distanza fra i quark interagenti. I segmenti verticali indicano le "dimensioni radiali" degli stati $c\bar{c}$ e $b\bar{b}$ calcolate tramite un potenziale del tipo [8.6](#).

getici del charmonio non dipendono però soltanto dal potenziale ma anche dai termini cinetici dell'Hamiltoniana che contengono la massa incognita m_c del quark charm. Una stima grezza delle quantità incognite α_s , k ed m_c può essere ottenuta dal fit sui livelli energetici principali degli stati $c\bar{c}$ con l'equazione di Schrödinger non-relativistica contenente un potenziale della forma [8.6](#). Valori tipici per questi fit danno

$$\alpha_s \approx 0.15 \div 0.25$$

$$k \approx 1 \text{ GeV/fm}$$

$$m_c \approx 1.5 \text{ GeV}/c^2$$

Si noti che m_c è la massa del quark costituente c , ovvero la massa efficace del quark nello stato legato², e che la costante d'accoppiamento nel charmo-

²La massa efficace consta di due contributi, la massa del quark "nudo" e una parte "dinamica" dovuta alla "nuvola" di quark e gluoni del mare che circondano il quark costi-

nio è da 20 a 30 volte superiore a quella elettromagnetica di struttura fine, $\alpha \simeq 1/137$. Dalla figura [8.6](#) si desume che le dimensioni lineari r della J/ψ , lo stato 1^3S_1 del charmonio, sono circa pari a 0.4 fm, ovvero cinque ordini di grandezza inferiori a quelle del positronio.

Per una descrizione più completa dei livelli energetici bisogna tener conto anche dei contributi al potenziale derivanti dagli accoppiamenti spin-orbita e spin-spin.

Così come il potenziale coulombiano descrive una forza decrescente con la distanza, il cui integrale di linea rappresenta l'energia di ionizzazione, il potenziale d'interazione forte descrive una forza tra quark che si mantiene costante al crescere della distanza fra essi. Quindi togliere una particella

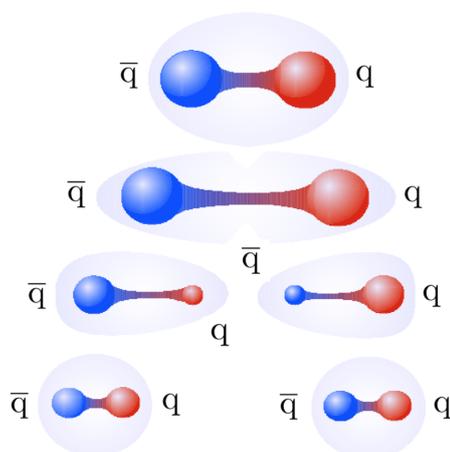


Figura 8.7: Schema del meccanismo di adronizzazione.

dotata di colore, come un quark, da un adrone, richiederebbe un'energia infinitamente grande. L'impossibilità di isolare particelle "colorate" fa quindi sì che in natura si trovino solo particelle cromaticamente neutre, anche se ciò non significa però che non si possa staccare un quark da un altro. In questo caso il risultato non sarà però la produzione di quark liberi ma quella di nuovi adroni, e ciò avverrà quando l'energia nel tubo di flusso, ovvero nella "stringa" congiungente i due quark in allontanamento, avrà superato una specifica soglia che permetta la formazione di due nuovi quark che separandosi contribuiranno a costituire il nuovo adrone.

Se ad esempio in un processo di diffusione profondamente anelastica si ha l'espulsione di un quark da un adrone, come schematizzato in figura [8.7](#),

tuate. Gli adroni charmati sono da 4 a 10 volte più pesanti degli adroni immediatamente più leggeri, e dato che il contributo dinamico alla massa è circa equivalente per ogni adrone, ciò significa che la massa del quark costituente c è quasi tutta dovuta al contributo di "massa nuda".

dove l'adrone è un generico mesone, il tubo di flusso di colore (stringa) che si forma fra questo quark e il sistema adronico residuo si rompe quando raggiunge una lunghezza dell'ordine di $1 \div 2$ fm, convertendo nel punto di rottura l'energia della tensione della stringa in una coppia quark-antiquark che separatamente si attaccano alle estremità rotte della stringa, generando due adroni cromaticamente neutri. Questo è il processo detto di *adronizzazione*.

Capitolo 9

La forza nucleare

Si ricorda quanto noto sulle forze nucleari. L'esistenza di nuclei stabili implica che l'interazione nucleone-nucleone è attrattiva e più intensa di quella coulombiana, anche se non può mantenersi attrattiva a qualunque distanza, altrimenti i nuclei collaserebbero su loro stessi; ciò suggerisce la presenza di un *core* repulsivo a brevi distanze. Questo *core* può essere ignorato considerando la struttura nucleare a basse energie, data la dipendenza dall'energia, per una particella incidente, della capacità di sondare una struttura bersaglio a brevi distanze.

All'ordine più basso il potenziale può essere rappresentato da un termine centrale dominante, dipendente esclusivamente dalla separazione radiale fra le particelle coinvolte, assieme a un piccolo contributo di tipo non-centrale. Dagli esperimenti sull'interazione nucleone-nucleone si sa che essa è sì a range breve, ma comunque dell'ordine di grandezza delle dimensioni nucleari, e quindi non può essere imputata allo scambio diretto di gluoni, come avviene per la forza forte fondamentale fra quark, dato il confinamento del colore.

Il confronto fra i dati della diffusione n-n e p-p, tenuto conto dell'interazione coulombiana, mostra che la forza nucleare gode della *simmetria di carica* ed è quindi sostanzialmente indipendente dalla carica elettrica ($p-p \equiv n-n \equiv p-n$), come visto nel paragrafo [2.3.11](#).

Gli studi effettuati sul deutone, come descritto nei paragrafi successivi, hanno evidenziato per le forze nucleari una dipendenza dallo spin: la forza fra protone e neutrone in uno stato di spin totale 1 (spin paralleli), è infatti abbastanza intensa da permettere il debole legame che garantisce l'esistenza del deutone, mentre il potenziale per lo stato con spin totale 0 (spin anti-paralleli) non contempla stati legati.

Si ricorda infine che le forze nucleari mostrano *saturazione* , per cui ogni nucleone di un nucleo ha praticamente interazioni attrattive solo con un numero limitato di altri nucleoni del nucleo a lui vicini, e questo discende dal breve raggio d'azione delle forze nucleari e si evidenzia nella forma dell'andamento dell'energia media di legame mostrato in figura [2.5](#).

9.1 Sistema legato nucleone-nucleone

9.1.1 La diffusione nucleone-nucleone

La diffusione nucleone-nucleone (N-N) alle basse energie, al di sotto della soglia di produzione del pione, è un fenomeno puramente elastico che può essere descritto senza ricorrere alla meccanica quantistica relativistica. I nucleoni sono visti come oggetti puntiformi privi di struttura interna ma dotati di spin e isospin. Per descrivere i processi d'interazione in questo contesto ci si può riferire a un opportuno potenziale.

I numerosissimi risultati sperimentali^[1], ottenuti anche utilizzando fasci e/o bersagli polarizzati, mostrano che in un sistema di due nucleoni la forza nucleare dipende effettivamente sia dallo spin che dallo spin isotopico.

Considerando la diffusione N-N nel caso in cui gli spin fra proiettile e bersaglio siano paralleli o antiparalleli, ma ortogonali al piano di diffusione^[2] si riescono a isolare i contributi di tripletto e di singoletto all'interazione. Se gli spin dei nucleoni coinvolti sono paralleli lo spin totale deve essere 1, se sono antiparalleli risultano possibili sia contributi da stati con spin totale pari a 0 che pari ad 1.

Passando all'isospin, nella diffusione protone-protone si ottiene il solo stato di tripletto con isospin 1, in quanto il protone ha $I_3 = +1/2$; nella diffusione protone-neutrone si hanno sia il contributo di singoletto che quello di tripletto.

Sfasamenti

Si consideri un nucleone proveniente da distanza infinita, con energia cinetica E e impulso \vec{p} , che diffonde sul potenziale di un altro nucleone. Il nucleone incidente può essere descritto da un'onda piana e quello uscente, fino a certi valori di E , da un'onda sferica. Si trova che la sezione d'urto dipende dallo sfasamento fra queste due onde.

Nel caso di stati con ben definiti valori di spin e isospin, la sezione d'urto per la diffusione nucleone-nucleone entro un elemento d'angolo solido $d\Omega$ dipende dall'ampiezza di diffusione $f(\vartheta)$ della reazione

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\vartheta)|^2 \quad (9.1)$$

¹Per un articolo di rassegna sull'interazione N-N si vedano ad esempio: R. Machleidt and I. Slaus, "The nucleon-nucleon interaction" - J. Phys. G: Nucl. Part. Phys. 27 (2001) R69, e la bibliografia associata.

²Il piano di diffusione corrisponde a quello contenente sia la retta che rappresenta l'asse del fascio incidente che la retta passante dal punto in cui avviene l'urto e diretta verso l'osservatore.

Nel caso di diffusione su un potenziale a breve raggio d'azione, per descrivere l'ampiezza di diffusione si utilizza la *decomposizione in onde parziali*³, secondo la quale l'onda diffusa è espansa in termini di valori fissati del momento angolare ℓ . Per la diffusione elastica e considerando di porsi a grandi distanze r dalla posizione del centro di diffusione, vale la relazione

$$f(\vartheta) = \frac{1}{k} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell + 1) e^{i\delta_\ell} \sin\delta_\ell P_\ell(\cos\vartheta) \quad (9.2)$$

con

$$k = \frac{1}{\lambda} = \frac{|\vec{p}|}{\hbar} = \frac{\sqrt{2ME}}{\hbar} \quad (9.3)$$

il numero d'onda del nucleone diffuso di massa M ed energia cinetica E , δ_ℓ lo sfasamento angolare e P_ℓ l'autofunzione del momento angolare coincidente con un polinomio di Legendre di ordine ℓ . Lo sfasamento δ_ℓ rappresenta la differenza di fase fra onda incidente originale e onda diffusa. Questi termini contengono l'informazione su forma e intensità del potenziale e la dipendenza dall'energia della sezione d'urto.

La conservazione del flusso di particelle caratterizzante la diffusione elastica considerata fa sì che il termine di sfasamento δ_ℓ contribuisca anche all'ampiezza tramite il termine $\sin\delta_\ell$. Ciò viene anche detto *unitarietà*. La decomposizione in onde parziali risulta particolarmente utile per le basse energie poichè in tal caso contribuiscono significativamente soltanto pochi termini dell'espansione, dato che per un potenziale con raggio d'azione a si ha

$$\ell \leq \frac{|\vec{p}| a}{\hbar} = \frac{k a}{\hbar} \quad (9.4)$$

Lo sfasamento δ_0 per $\ell = 0$, ovvero in onda "s", è fondamentale per il legame nucleare. Dalla [9.4](#) si deduce che per impulsi relativi inferiori a 100 MeV/c, l'onda "s" domina per la diffusione protone-protone, in cui il range d'interazione è dell'ordine di 2 fm; il polinomio di Legendre vale $P_0 = 1$ e non c'è quindi dipendenza da ϑ .

In figura [9.1](#) sono riportati i valori misurati dello sfasamento δ_0 per la diffusione nucleone-nucleone, separatamente per i casi di tripletto e singoletto di spin, rispetto all'impulso disponibile nel sistema del CM.

Lo sfasamento δ_0 risulta positivo per impulsi inferiori a circa 400 MeV/c, negativo per valori superiori. Se ne deduce, confermando quanto già visto per altre vie, che l'interazione nucleare ha carattere repulsivo a brevissimo raggio d'interazione, e natura attrattiva a più grandi distanze.

Se infatti si considera una funzione d'onda $\psi(\vec{x})$ a simmetria sferica, la si può decomporre in un opportuno prodotto di cui si consideri il fattore radiale espresso dalla funzione $u(r) = r \psi(r)$, che obbedisce all'equazione di

³Si vedano ad esempio: E. Gozzi, "Notes on Quantum Mechanics with Examples of Solved Problems", cap. 15; D. J. Griffiths, "Introduction to Quantum Mechanics", cap. 11.

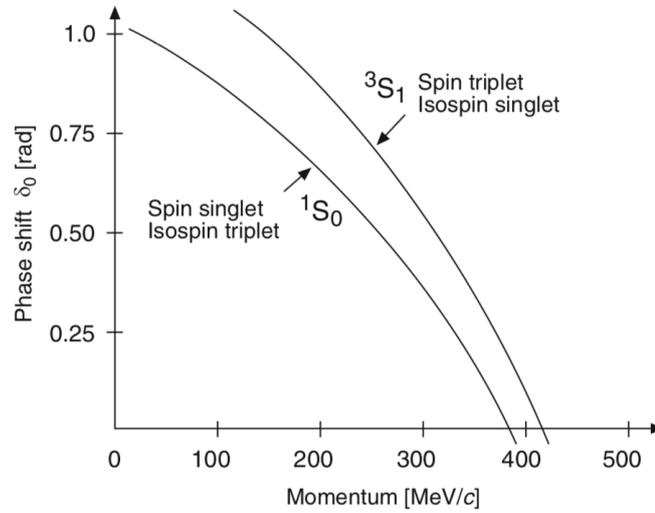


Figura 9.1: Valori sperimentali dello sfasamento δ_0 per l'interazione nucleone-nucleone, nel caso di tripletto e di singoletto di spin, in funzione dell'impulso relativo dei nucleoni interagenti.

Schrödinger

$$\frac{d^2 u(r)}{dr^2} + \frac{2m(E - V)}{\hbar^2} u(r) = 0 \quad (9.5)$$

Risolvendo la 9.5 per un potenziale repulsivo rettangolare $V \rightarrow \infty$ con raggio d'azione b si trova

$$\delta_0 = -kb \quad (9.6)$$

Lo sfasamento è quindi negativo e proporzionale al raggio d'azione del potenziale; ciò significa che l'onda diffusa è in ritardo di fase rispetto a quella

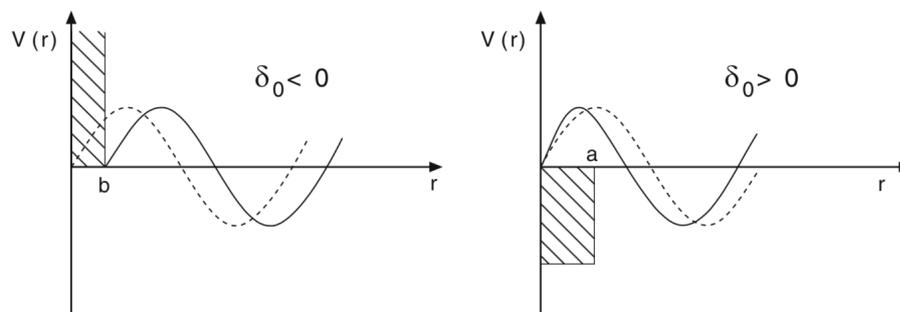


Figura 9.2: Potenziale repulsivo $V \rightarrow \infty$ con raggio d'azione b , a sinistra, e potenziale attrattivo con raggio d'azione a , a destra. Tratteggiate le onde non diffuse, per confronto.

non diffusa.

Per un potenziale attrattivo con raggio d'azione a invece, l'onda diffusa è in anticipo di fase rispetto a quella non diffusa e $\delta_0 > 0$. L'espressione completa per lo sfasamento è data da

$$\delta_0 = \arctg \left(\sqrt{\frac{E}{E + |V|}} \operatorname{tg} \frac{a\sqrt{2mc^2(E + |V|)}}{\hbar c} \right) - \frac{a\sqrt{2mc^2 E}}{\hbar c} \quad (9.7)$$

Lo sfasamento è quindi positivo e decresce al crescere dell'impulso. Sovrapponendo lo sfasamento associato a un potenziale repulsivo a breve raggio d'azione con quello di un potenziale attrattivo a un maggior raggio d'azione si ottiene quanto illustrato in figura 9.3, dove appunto lo sfasamento effettivo cambia segno così come osservato sperimentalmente.

La relazione fra δ_0 e il potenziale diffusore V è contenuta nelle espressioni 9.6

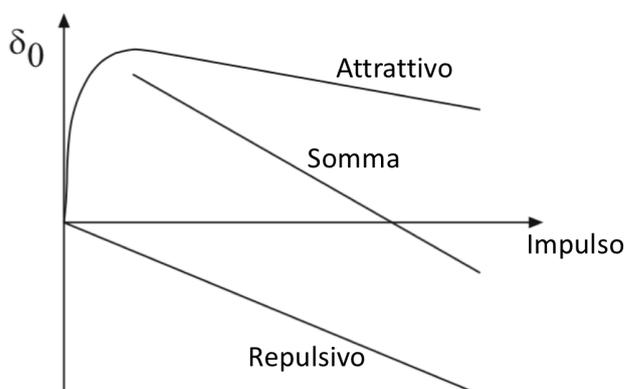


Figura 9.3: Sfasamento risultante dalla sovrapposizione degli effetti di un potenziale repulsivo a breve raggio e di uno attrattivo a raggio più ampio.

e 9.7, visto che nella regione in cui agisce il potenziale, il numero d'onda k dipende dalla forma e dall'entità di quest'ultimo, oltre che dall'energia cinetica E del proiettile.

Un'analisi completa degli sfasamenti conduce al potenziale mostrato in figura 9.4, che descrive un potenziale con un core fortemente repulsivo a breve raggio che diviene rapidamente attrattivo a poco meno di 1 fm, mantenendosi tale ma riducendo enormemente la propria intensità già a circa 2 fm.

Il potenziale nucleone-nucleone

Una forma generale del potenziale nucleone-nucleone si ottiene da opportune considerazioni sulle quantità dinamicamente rilevanti. Si trascura qui la struttura interna dei nucleoni e di conseguenza è chiaro che il potenziale che ne deriverà potrà essere considerato valido per il caso di stati legati nucleone-nucleone e solo per diffusione fra nucleoni a basse energie.

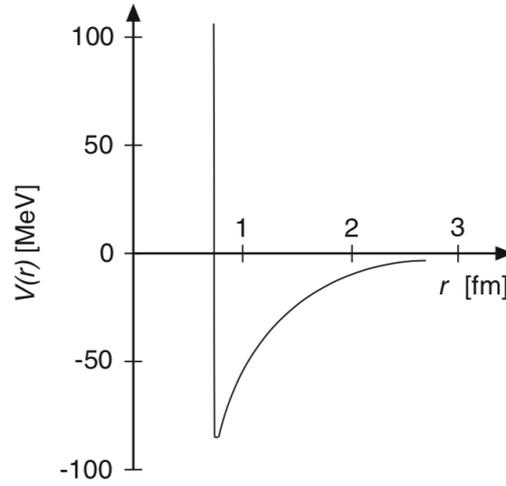


Figura 9.4: Dipendenza radiale del potenziale nucleone-nucleone per $\ell = 0$. Non sono mostrati gli effetti della dipendenza da spin e isospin.

Le quantità che entrano in gioco nel determinare l'interazione sono la separazione spaziale \vec{x} fra i nucleoni, il loro impulso relativo \vec{p} , il momento angolare orbitale totale \vec{L} e le orientazioni relative fra gli spin \vec{s}_1 ed \vec{s}_2 di ogni coppia di nucleoni del sistema. Il potenziale deve poi essere uno scalare e per lo meno invariante per traslazioni e rotazioni. Dovrebbe inoltre risultare simmetrico rispetto allo scambio di due nucleoni.

Queste precondizioni derivano necessariamente dal rispetto di alcune proprietà per la teoria che si delinea, quale ad esempio la conservazione della parità, e pongono delle limitazioni alle caratteristiche dei termini scalari che possono contribuire al potenziale stesso. In definitiva, fissati i valori di isospin, il potenziale assume la forma

$$\begin{aligned}
 V(r) = & V_0(r) + V_{ss}(r) \frac{\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2}{\hbar^2} \\
 & + V_T(r) \frac{[3(\vec{s}_1 \cdot \vec{x})(\vec{s}_2 \cdot \vec{x})/r^2] - s_1 s_2}{\hbar^2} + \frac{V_{LS}(r)(\vec{s}_1 + \vec{s}_2) \cdot \vec{L}}{\hbar^2} \\
 & + \frac{V_{Ls}(r)(\vec{s}_1 \cdot \vec{L})(\vec{s}_2 \cdot \vec{L})}{\hbar^4} + \frac{V_{ps}(r)(\vec{s}_1 \cdot \vec{p})(\vec{s}_2 \cdot \vec{p})}{\hbar^2 m^2 c^2}
 \end{aligned} \tag{9.8}$$

V_0 è un normale potenziale centrale; il secondo termine descrive una pura interazione fra spin mentre il terzo termine, detto potenziale tensore, descrive una componente non-centrale dell'interazione. Questi ultimi due termini hanno la stessa forma dell'interazione fra due dipoli magnetici. Il termine tensoriale è particolarmente interessante in quanto mescola gli stati di momento angolare orbitale.

Il quarto termine deriva dall'interazione di spin-orbita che è a sua volta dovuta all'interazione forte.

I due ultimi termini sono compatibili con le prescrizioni di simmetria, ma essendo quadratici nell'impulso danno comunque un apporto trascurabile rispetto ai termini di tipo spin-orbita.

Gli sforzi per determinare i valori dei termini di questi contributi al potenziale tramite fit sui dati sperimentali non hanno condotto a valori definitivamente univoci per essi; c'è comunque un generale accordo sui primi quattro termini. Andrebbero poi considerati anche contributi di interazioni a più di due corpi.

Il termine centrale del potenziale per $S = 0$ si applica alle interazioni p-p ed n-n a bassa energia, ma la parte attrattiva non è abbastanza intensa da determinare la presenza di stati legati.

Per $S = 1$ invece, con il contributo dei termini tensoriale e di spin-spin, l'intensità risultante permette l'esistenza di uno stato legato, il deutone.

9.1.2 Il deutone

Il deutone è il più semplice fra tutti gli stati legati di nucleoni in quanto non si hanno complicazioni derivanti dall'interazione elettromagnetica (è trascurabile l'interazione puramente magnetica degli spin) e neppure dal principio d'esclusione di Pauli. Questo lo rende adatto per lo studio dell'interazione nucleone-nucleone. Esso è il solo nucleo con $A = 2$ e non presenta stati eccitati. Dagli esperimenti si traggono le seguenti caratteristiche, per lo stato fondamentale del deutone:

- Energia di legame: $B(2,1) = 2.225 \text{ MeV}$
- Spin e parità: $J^P = 1^+$
- Isospin: $I = 0$
- Momento magnetico: $\mu_d = 0.8574 \mu_N$
- Momento di quadrupolo elettrico: $Q = 2.88 \times 10^{-31} \text{ m}^2$

Si osservi che $B(2,1)$ è piccola, a confronto dell'energia media tipica di legame per nucleone dei nuclei più grandi, dell'ordine di 8 MeV.

Inoltre con buona approssimazione si ha

$$\mu_p + \mu_n = 2.793 \mu_N - 1.913 \mu_N = 0.880 \mu_N \simeq \mu_d$$

Questo, assieme al valore unitario dello spin, suggerisce che il momento magnetico del deutone sia dovuto esclusivamente agli spin dei nucleoni costituenti, che questi siano paralleli e che si trovino in uno stato con momento angolare orbitale nullo, ovvero con $\ell = 0$, per cui ci si potrebbe aspettare che lo stato fondamentale del deutone sia uno stato $|^3S_1\rangle$.

Ma quest'ipotesi se rigorosamente vera, condurrebbe all'annullarsi del momento di quadrupolo elettrico del deutone, essendo nullo il valor medio della quantità $\langle ^3S_1 | (3z^2 - r^2) | ^3S_1 \rangle$, data la simmetria sferica dell'autofunzione associata. Siccome però il valore sperimentale del momento di quadrupolo

elettrico del deutone non è zero, se ne conclude che l'ipotesi fatta corrisponde solo approssimativamente alla realtà e che il deutone ha una struttura leggermente deformata rispetto a quella a simmetria sferica. Ciò richiede che la funzione d'onda del deutone contenga anche un piccolo contributo con $\ell = 2$, anch'esso come quello con $\ell = 0$, consistente con la parità del deutone che essendo uno stato legato di due nucleoni deve avere parità -1^ℓ .

Dato che lo spin del deutone è pari a 1 ed esso si trova prevalentemente in uno stato con $\ell = 0$, ne consegue che gli spin dei nucleoni devono essere allineati e paralleli. La possibilità che siano allineati e antiparalleli condurrebbe a un ipotetico stato legato n-p con spin nullo, ma sperimentalmente si sa che il deutone è il solo stato legato n-p, quindi *si deduce che il potenziale che descrive l'interazione fra neutrone e protone dipende dallo spin*.

Se inoltre, come visto in precedenza, l'interazione forte non distingue fra neutroni e protoni (spin isotopico), l'inesistenza di stati legati neutrone-protone con $s = 0$ è consistente con la non esistenza di analoghi stati legati neutrone-neutrone o protone-protone con $s = 0$ ed $\ell = 0$.

Inoltre si ricorda che il principio d'esclusione implica la non esistenza di stati legati n-n o p-p con $s = 1$ ed $\ell = 0$, in quanto la funzione d'onda completa di coppie di fermioni identici deve essere antisimmetrica, ovvero se due fermioni occupano lo stesso livello $\ell = 0$ allora devono avere spin anti-paralleli. Se ne conclude quindi che l'esistenza di uno stato legato n-p e la contemporanea non-esistenza di stati legati p-p ed n-n, sono consistenti col fatto che la forza nucleare non distingue fra neutroni e protoni, ma soltanto se essa dipende dallo spin.

I risultati sperimentali sulla diffusione a bassa energia fra protone e neutrone mettono poi inequivocabilmente in evidenza che il potenziale d'interazione dipende dall'orientazione relativa fra gli spin di protone e neutrone.

Il fatto che esista lo stato con $s = 1$ e non quelli con $s = 0$, potrebbe suggerire anche che la forza nucleare sia di tipo attrattivo per $s = 1$ e repulsivo per $s = 0$, ma ciò non è corretto, la forza nucleare è attrattiva in entrambi i casi, ma solo per $s = 1$ lo è a sufficienza da generare l'esistenza di uno stato legato.

L'autofunzione dello stato fondamentale del deutone è in definitiva una miscela di due stati con uguali numeri quantici J^P

$$|\psi_d\rangle = 0.98 |^3S_1\rangle + 0.02 |^3D_1\rangle \quad (9.9)$$

che comporta una probabilità del 4% di trovare il deutone in uno stato 3D_1 . Dato che le interazioni deboli non conservano la parità, sarebbe possibile una probabilità finita di trovare il deutone anche nello stato 3P_1 , di parità dispari, ma il valore di tale probabilità è quantitativamente trascurabile.

Lo studio del deutone, il più semplice stato legato di due nucleoni, ha però dato interessanti informazioni sul deutone in quanto tale, ma non ha svolto per la fisica nucleare, quello che è stato il ruolo dell'atomo di idrogeno per la fisica atomica.

9.2 Analogia atomico-molecolare

Idealmente si vorrebbe poter interpretare il potenziale nucleone-nucleone in termini della dinamica delle interazioni fondamentali fra quark. Non si è ancora in grado di farlo ma si può ragionare per analogia. In figura 9.5 è schematicamente illustrato l'andamento radiale del potenziale nucleone-nucleone così come dedotto dalla gran messe di dati forniti dallo studio di interazioni elastiche p-p e n-p. È evidente, a meno dei fattori di scala, la so-

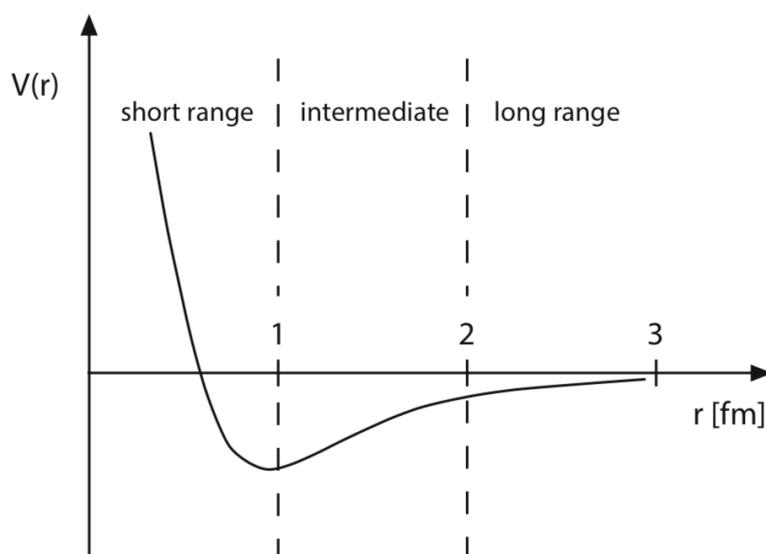


Figura 9.5: Andamento radiale del potenziale nucleone-nucleone in un nucleo.

miglianza col potenziale agente fra due atomi, con una componente repulsiva a distanze compatibili con la sovrapposizione spaziale delle due strutture e una attrattiva a distanze maggiori che poi diminuisce rapidamente al crescere di queste.

Ragionando dunque per analogia col caso delle strutture atomiche e molecolari, si immagina che i quark giochino il ruolo degli elettroni. Vi sono in tal caso alcune possibilità quali interazioni di tipo "ionico", di tipo "van der Waals" o di tipo "covalente".

La prima tipologia può essere subito scartata per il caso nucleare, in quanto richiederebbe il "prestito a lungo termine" di un quark da un nucleone ad un altro nucleone e ciò non è compatibile con le intense forze di confinamento che caratterizzano l'interazione fra quark in un nucleone.

Anche la seconda tipologia va scartata in quanto lo scambio di una coppia di gluoni che ne conseguirebbe dá luogo a un contributo troppo debole per giustificare l'effettiva interazione nucleare a distanze intermedie.

Rimane dunque la forma di legame covalente che nel caso nucleare dovrebbe corrispondere a una forma di compartecipazione di un singolo quark tra due diversi nucleoni. Questi devono tuttavia restare cromaticamente neutri durante la forma di interazione descritta, per cui il quark compartecipato da un nucleone deve essere dello stesso colore di quello compartecipato dall'altro nucleone. L'effetto di ciò, essendoci tre possibili diversi stati di colore, è di ridurre la forza che ne consegue al punto che questo solo meccanismo non è in grado di giustificare la profondità osservata per il potenziale nucleare. Si tenga però presente che in aggiunta ai tre quark di valenza, in un nucleone vi sono anche fluttuazioni di coppie quark-antiquark del mare, e nel caso in cui tali coppie siano cromaticamente neutre potranno anch'esse essere compartecipate fra due nucleoni, contribuendo così all'interazione. Risulta anzi che il loro contributo è maggiore rispetto a quello di singoli quark. I più leggeri fra questi di-quark sono i pioni π , il cui scambio fra nucleoni costituisce il grosso della parte attrattiva della forza nucleare.

In linea di principio la repulsione a breve range potrebbe essere imputata allo scambio di di-quark (mesoni) più pesanti eventualmente in differenti stati di spin totale. Dai dati sperimentali emergono molti candidati mesonici possibili, in accordo con le predizioni del modello a quark, e ogni scambio risulta responsabile di uno specifico contributo al potenziale totale nucleone-nucleone. Modelli che tengono conto di alcuni di questi possibili scambi sono in grado di fornire eccellenti fit dei dati ottenuti da esperimenti di diffusione nucleone-nucleone. Questi modelli di scambio bosonico sono però di tipo "semi-fenomenologico", non in grado quindi di fornire una spiegazione fondamentale della parte repulsiva.

Nel caso di due atomi legati in una stessa molecola, la parte repulsiva a brevi distanze è dovuta al principio d'esclusione di Pauli. Considerando infatti che normalmente gli elettroni dei due atomi occupano i livelli energetici più bassi possibili, si ha che se i due atomi si avvicinano, come nel caso di un urto, e quindi le due nuvole elettroniche iniziano a sovrapporsi spazialmente, allora alcuni degli elettroni che le popolano, dovendo ubbidire al principio d'esclusione, vengono forzatamente eccitati a livelli energetici superiori e ciò non può che avvenire a carico di una frazione dell'energia cinetica disponibile nel canale d'ingresso; è questo che genera l'effetto repulsivo a distanze ridotte.

Anche i quark di un sistema di due nucleoni ubbidiscono al principio d'esclusione, per cui la funzione d'onda che descrive quei 6 quark deve necessariamente essere anti-simmetrica. Il numero di quark che possono occupare lo stato a più bassa energia, con $\ell = 0$, senza violare il principio di Pauli è però pari a 12, in quanto i quark coinvolti si differenziano su tre possibili diversi stati di colore, su due diversi possibili stati di spin e su due diversi possibili stati di isospin (quark *up* e quark *down*). La parte di spin-isospin della funzione d'onda completa deve dunque essere simmetrica in quanto la parte

legata al colore è antisimmetrica e quella spaziale, per $\ell = 0$, è simmetrica. Si ha perciò che il principio d'esclusione non limita, per quanto concerne la funzione d'onda spaziale, la possibilità che i 6 quark costituenti due nucleoni possano occupare il livello energetico più basso ($\ell = 0$); di conseguenza la ragione della presenza del "core" repulsivo va cercata altrove.

Si osservi che l'energia potenziale cresce se tutti i 6 quark restano nello stato con $\ell = 0$ mantenendo gli spin allineati; si confronti ad esempio la massa della risonanza $\Delta(1232)$, i cui tre quark costituenti hanno gli spin allineati, con quella del generico nucleone, più leggero di circa $295 \text{ MeV}/c^2$, in cui una coppia di quark costituenti si trova nella condizione di spin antiparalleli. Nel caso dei 6 quark, se quando i due nucleoni si "sovrappongono" restano tutti nello stato con $\ell = 0$, è chiaro che il numero di coppie di quark con spin paralleli è maggiore rispetto al considerare i nucleoni singolarmente, e quindi l'energia potenziale del sistema aumenta; si trova che l'aumento, per ogni coppia in più di quark con spin paralleli, equivale a metà della differenza in energia fra la massa della Δ e quella del nucleone.

È d'altronde ragionevole che il sistema di due nucleoni cerchi spontaneamente di minimizzare questo contributo alla propria energia massimizzando il numero di coppie di quark con spin anti-paralleli, ma ciò entra in competizione con l'esigenza che la parte di spin-sapore della funzione d'onda sia completamente simmetrica, se tutti i 6 quark restano nello stato con $\ell = 0$. Si trova che il contributo energetico può essere ridotto se almeno una coppia di quark si pone nello stato con $\ell = 1$. L'energia d'eccitazione necessaria a questo è però confrontabile con la diminuzione dell'energia di appaiamento di spin che si ottiene, quindi in ogni caso l'energia potenziale del sistema di due nucleoni aumenta se essi tendono verso una intensa sovrapposizione spaziale mutua.

La repulsione che si osserva a brevi distanze è dunque conseguenza sia dell'aumento dell'energia dovuta agli appaiamenti di spin che dell'eccitazione di coppie di quark a stati con $\ell = 1$.

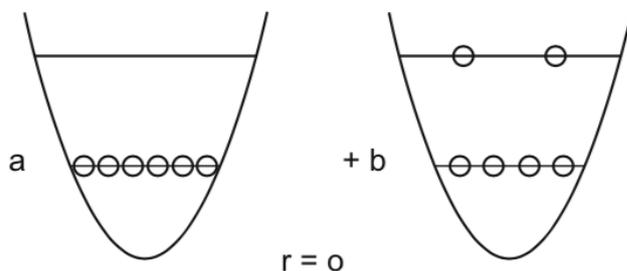


Figura 9.6: Lo stato dei quark per due nucleoni fortemente sovrapposti. In un'approssimazione non adiabatica si trova che domina la configurazione b che diviene però sempre meno importante all'allontanarsi reciproco dei due nucleoni.

Si riescono a dare in tal modo visioni qualitative del modo in cui intervengono le forze fondamentali fra quark nel determinare l'interazione effettiva fra nucleoni in un nucleo.

La forza nucleare viene anche detta "interazione forte *residua*", intendendo come "interazione forte" tout court quella che interviene fra i quark all'interno di ogni nucleone.

9.3 Il potenziale di Yukawa

Si veda ora quello che è stato il primo approccio al problema della forza nucleare in termini di scambio di bosoni, formulato da Yukawa. Egli considerò la questione del raggio d'azione della forza nucleare da una prospettiva nuova, mutuandola dall'approccio che ha condotto a interpretare e spiegare le interazioni elettromagnetiche fra sorgenti del campo elettromagnetico, cioè le cariche elettriche, in termini di scambio, ovvero emissione e assorbimento, di fotoni γ , i quanti mediatori dell'interazione elettromagnetica, che sono bosoni.

La propagazione dei fotoni è descritta dalle equazioni di Maxwell e avviene alla velocità della luce, pari a c nel vuoto. Questo porta, come diretta conseguenza della Relatività Ristretta, a definire il fotone *privo di massa*, $m_\gamma = 0$. Inoltre il potenziale coulombiano è proporzionale all'inverso della distanza dalla sorgente del campo:

$$V_C(r) \propto \frac{1}{r} \quad (9.10)$$

il che determina il lungo raggio d'azione della forza associata.

Immaginando anche la forza nucleare come un tipo di interazione in cui vi sia una particella mediatrice scambiata, sempre un bosone, che possiede però una massa non nulla, Hideki Yukawa⁴, nel 1934, individuò per la forza nucleare un potenziale corrispondente della forma

$$V_Y(r) \propto \frac{e^{-\frac{mc}{\hbar} r}}{r} \quad (9.11)$$

dove m rappresenta la massa della particella mediatrice dell'interazione. Il potenziale di Yukawa, nel limite in cui $m \rightarrow 0$, tende alla forma coulombiana.

È interessante e utile leggere, in figura 9.7, le prime righe dell'articolo in cui Yukawa descriveva l'origine della sua idea, per poi svilupparla. Trascurando la dipendenza dallo spin, il che non pregiudica la comprensione di alcune fondamentali caratteristiche dell'interazione fra nucleoni, il ragionamento di Yukawa può essere così schematizzato.

⁴Hideki Yukawa, "On the interaction of elementary particles I" - Proc. Phys. Math. Soc. Jap. 17 (1935) 48-57

On the Interaction of Elementary Particles. I.

By Hideki YUKAWA.

(Read Nov. 17, 1934)

§ 1. Introduction

At the present stage of the quantum theory little is known about the nature of interaction of elementary particles. Heisenberg considered the interaction of "Platzwechsel" between the neutron and the proton to be of importance to the nuclear structure.⁽¹⁾

Recently Fermi treated the problem of β -disintegration on the hypothesis of "neutrino"⁽²⁾. According to this theory, the neutron and the proton can interact by emitting and absorbing a pair of neutrino and electron. Unfortunately the interaction energy calculated on such assumption is much too small to account for the binding energies of neutrons and protons in the nucleus.⁽³⁾

To remove this defect, it seems natural to modify the theory of Heisenberg and Fermi in the following way. The transition of a heavy particle from neutron state to proton state is not always accompanied by the emission of light particles, i. e., a neutrino and an electron, but the energy liberated by the transition is taken up sometimes by another heavy particle, which in turn will be transformed from proton state into neutron state. If the probability of occurrence of the latter process is much larger than that of the former, the interaction between the neutron and the proton will be much larger than in the case of Fermi, whereas the probability of emission of light particles is not affected essentially.

Figura 9.7: Introduzione dell'articolo di Yukawa.

Si considerino due nucleoni di massa M in quiete nel sistema del laboratorio, per cui l'energia totale del sistema fisico da loro rappresentato è pari a $2Mc^2$. Si supponga che uno dei due nucleoni emetta un bosone di massa m prendendo in qualche modo "a prestito" l'energia di massa mc^2 necessaria e conseguentemente la variazione dell'energia totale del sistema risulta non inferiore a $\Delta E = mc^2$. Questa *fluttuazione energetica* ΔE , che da un punto di vista classico violerebbe il principio di conservazione dell'energia, può aver luogo purchè la sua durata temporale sia vincolata dalla relazione di indeterminazione $\Delta E \Delta t \geq \hbar$. Quindi, come limite superiore conseguente per Δt si ottiene: $\Delta t = \hbar/(mc^2)$.

Supponendo come caso limite che il bosone sia emesso a velocità c , nel-

l'intervallo di tempo Δt concessogli dal principio di indeterminazione può percorrere la distanza

$$a_0 = c\Delta t = \frac{\hbar}{mc} \quad (9.12)$$

che coincide con la cosiddetta *lunghezza d'onda Compton* λ del bosone di massa m e che tende ad ∞ per $m \rightarrow 0$, coerentemente col fatto che il raggio d'azione dell'interazione elettromagnetica risulti infinito. Ne consegue che i due nucleoni possono interagire se la loro distanza mutua r è inferiore ad a_0 , e non interagiscono o interagiscono debolmente se $r > a_0$, che definisce quindi il *raggio d'azione* delle forze nucleari.

Assumendo, per quanto visto in precedenza e noto dai dati sperimentali, ragionevolmente pari a circa $1.4 \cdot 10^{-15}$ m il valore di λ e quindi del raggio d'azione a_0 della forza nucleare, si ottiene per m :

$$\begin{aligned} m &= \frac{\hbar}{\lambda c} \approx \frac{6.583 \times 10^{-22} \times 2.998 \times 10^8}{c \times 1.4 \times 10^{-15}} \frac{\text{MeV s}}{\text{m}} \approx \\ &\approx \frac{1.9736 \times 10^{-13}}{c^2 \cdot 1.410^{-15}} \text{ MeV} \approx 141 \frac{\text{MeV}}{c^2} \end{aligned} \quad (9.13)$$

Nota quindi la massa della particella mediatrice si può predire il raggio d'azione dell'interazione, e viceversa. Si noti che si è anche implicitamente fatta l'ipotesi che l'intensità dell'*accoppiamento* considerato sia la medesima fra la particella mediatrice e qualunque dei due nucleoni considerati.

Nel 1936, studiando i raggi cosmici, fu scoperto il muone μ che avendo una massa di $105.66 \text{ MeV}/c^2$, si pensò potesse essere la particella ipotizzata da Yukawa. Analizzandone il comportamento si osservò però che il muone non era sensibile all'interazione nucleare⁵ e quindi non poteva essere la particella mediatrice cercata.

Questa, chiamata pione π , fu poi effettivamente scoperta nel 1947 da C. Lattes, G. Occhialini e C. Powell analizzando, presso l'Università di Bristol, le tracce lasciate in emulsioni fotografiche dai prodotti di reazioni causate sempre da raggi cosmici⁶.

Il pione era effettivamente la particella mediatrice cercata⁷: esistono tre tipi di pioni, due carichi e uno neutro di masse rispettive

$$\begin{aligned} m_{\pi^+} &= m_{\pi^-} = 139.57 \text{ MeV}/c^2 \\ m_{\pi^0} &= 134.98 \text{ MeV}/c^2 \end{aligned}$$

Si prosegue ora sulla scia di Yukawa per individuare la forma del potenziale cercato. Nel caso dell'interazione elettromagnetica fra due cariche uguali q , l'energia potenziale del campo nelle zone di spazio non occupate dalle

⁵Esperimento di Conversi, Pancini e Piccioni, in Appendice ??

⁶Si veda l'immagine in figura ??

⁷Si veda il paragrafo ??

cariche elettriche, $U_C(r) = q^2/4\pi\epsilon_0 r$, è soluzione dell'equazione differenziale di Laplace nel caso statico

$$\nabla^2 U_C(r) = 0 \quad (9.14)$$

Si può quindi modificare la [9.14](#) considerando forze con raggio d'azione finito fra le sorgenti del campo. La modifica più intuitiva consiste nell'aggiungere una costante che tenda a zero quando il raggio d'azione dell'interazione tende all'infinito, che per motivi dimensionali sia inversamente proporzionale al quadrato di una lunghezza e di segno tale da generare un potenziale che si annulli all'infinito. L'ultima condizione, come si vedrà, richiede una costante definita negativa, per cui è opportuno scriverla come l'opposto del quadrato di qualcosa. La conseguente modifica dell'equazione di Laplace porta alla

$$(\nabla^2 - \mu^2)U(r) = 0 \quad (9.15)$$

detta *equazione di Klein-Gordon statica*, in cui $\mu = 1/a_0$ ha le dimensioni dell'inverso di una lunghezza. Si osservi che al limite $\mu \rightarrow 0$ che equivale ad $a_0 \rightarrow \infty$, e quindi $m \rightarrow 0$, la [9.15](#) si riconduce alla [9.14](#).

Data la simmetria sferica del problema impostato, si consideri la parte radiale del Laplaciano

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} - \mu^2 \right) U(r) = 0 \quad (9.16)$$

che cercando una soluzione del tipo $U(r) = y(r)/r$, diventa

$$\frac{d^2}{dr^2} y(r) - \mu^2 y(r) = 0 \quad (9.17)$$

che ha come integrale generale

$$y(r) = c_0 e^{-r/a_0} + c_1 e^{r/a_0} \quad (9.18)$$

Per evitare che $y(r)$ diverga, per $r \rightarrow \infty$ bisogna porre $c_1 = 0$. Posto poi $c_0 = -g^2/4\pi$ si ottiene l'espressione dell'energia potenziale di Yukawa

$$U_Y(r) = -\frac{g^2}{4\pi} \frac{e^{-r/a_0}}{r} \quad (9.19)$$

che come il potenziale coulombiano diverge per $r \rightarrow 0$, ma tende asintoticamente a zero molto più rapidamente al crescere della distanza fra i due nucleoni, oltre il valore della lunghezza d'onda Compton a_0 del pione π .

La quantità g , omogenea a una carica elettrica, è detta *carica mesonica* e $\alpha_X = g^2/4\pi\hbar c$ rappresenta la *costante d'accoppiamento*⁸ tra i nucleoni e il cosiddetto *campo mesonico*, similmente a come $\alpha = e^2/4\pi\epsilon_0\hbar c$ rappresenta la costante d'accoppiamento tra gli elettroni e il *campo elettromagnetico* o

⁸Si trova che g ha in generale una dipendenza dall'impulso del mesone scambiato.

fotonico.

Espressioni più raffinate del potenziale nucleone-nucleone, ottenibili nell'ambito della *teoria mesonica* delle interazioni nucleari, tengono conto dell'esistenza dei tre tipi di pioni (π^+ , π^0 , π^-) e come accennato nel paragrafo precedente, di altri mesoni più pesanti e delle loro proprietà di simmetria, che determinano la scelta del termine di *sorgente* del campo mesonico, assente nell'equazione di Klein-Gordon qui dedotta e risolta, oltre che dell'indipendenza delle forze nucleari dalla carica elettrica.

Si ricordi in ogni caso che l'interazione nucleare è in realtà il complicato effetto risultante di come agiscono le interazioni forti fondamentali fra le distribuzioni di quark, costituenti e del mare, all'interno di nucleoni fra loro molto vicini.

Capitolo 10

Termodinamica nucleare

Il concetto di temperatura nucleare è stato introdotto da Bethe e Weisskopf in due lavori pionieristici pubblicati nel 1937, nel tentativo di descrivere la formazione e il decadimento del "nucleo composto" che si forma nelle reazioni indotte da proiettili leggeri, il più delle volte neutroni.

Successivamente il concetto fu esteso anche ai casi di reazioni che coinvolgono proiettili di alta energia e ioni pesanti, stimolato dalla ricerca sull'instabilità dei nuclei e sulla possibile esistenza di una transizione di fase liquido-gas per la "materia nucleare". Per conseguire lo scopo si sono sviluppate svariate e complementari tecniche sperimentali che permettessero di estrarre le caratteristiche "termiche" di sistemi nucleari altamente eccitati.

La temperatura T di un sistema costituito da un numero fissato N di particelle ad energia E è generalmente definita, in accordo con la meccanica statistica, dalla

$$\frac{1}{T} = \frac{\partial S(E, N)}{\partial E} = \frac{\partial \ln \rho(E, N)}{\partial E} \quad (10.1)$$

dove S è l'entropia del sistema e ρ la densità degli stati all'energia E .

Per poter applicare questa formula all'ottenimento di una temperatura devono però essere soddisfatte due condizioni:

1. il sistema deve essere in completo equilibrio statistico, ovvero ognuno degli stati inclusi in $\rho(E, N)$ deve essere popolato con ugual probabilità;
2. deve essere conosciuta la densità degli stati.

Per i sistemi nucleari queste due condizioni possono essere critiche da soddisfare. Il grado di raggiungimento dell'equilibrio nelle interazioni fra ioni pesanti ad alte o altissime energie non è a priori conoscibile e l'evoluzione dinamica del sistema è ancora poco compresa. Per quanto concerne le densità degli stati nucleari, le si conosce bene solo a basse energie. Per alte energie d'eccitazione, dove gli effetti dinamici giocano un ruolo importante, la conoscenza delle densità degli stati nucleari è decisamente più lacunosa.

Oltre a questo ci sono alcuni altri problemi che rendono alquanto complicata l'estrazione di un valore per la temperatura nucleare:

- *Il nucleo è un sistema microscopico* - Non si possono utilizzare sonde esterne termometriche, e di conseguenza l'informazione sulla temperatura è ottenuta dallo studio dell'emissione di parti del sistema stesso, assumendo che queste, prima dell'emissione, fossero parte del sistema equilibrato e contribuissero alla densità degli stati dell'intero sistema. Questa è una condizione imprescindibile affinché esse possano essere considerate rappresentative dell'intero sistema in studio (il particolare nucleo).
- *Il nucleo è un sistema isolato* - Dato il breve range dell'interazione nucleare, un nucleo non è in grado di scambiare la propria energia d'eccitazione con l'ambiente circostante. Un sistema nucleare è dunque definito dalle condizioni: $E = \text{cost.}$, $N_{part} = \text{cost.}$, per cui l'unico *ensemble* statistico appropriato per un nucleo è quello microcanonico, utilizzato per i sistemi isolati. Inoltre non è facile, dal punto di vista sperimentale, fissare univocamente il valore dell'energia, in quanto l'entità di energia depositata può variare fortemente in conseguenza delle diverse interazioni nucleari, specialmente nei casi in cui diversi meccanismi di reazione conducono all'emissione degli stessi prodotti finali.
- *Il nucleo è un sistema quantistico Fermionico* - I nucleoni in un nucleo occupano diversi livelli energetici, e il principio di esclusione di Pauli limita il numero di essi che possono ripartirsi l'energia d'eccitazione disponibile. In conseguenza di ciò l'effettivo numero di gradi di libertà dipende dall'energia d'eccitazione che è governata dalla statistica di Fermi-Dirac. Inoltre le proprietà globali di un nucleo mutano dinamicamente con l'energia, come si vede ad esempio per la sua densità che cala in funzione dell'espansione termica.
- *Il nucleo è un sistema elettricamente carico* - L'interazione Coulombiana a lungo range fra i protoni introduce delle instabilità che possono condurre a una riduzione della temperatura critica.
- *Il nucleo si scalda e si raffredda attraverso processi dinamici* - Evidenze diverse possono corrispondere a diverse condizioni o fasi di *freeze-out*, o rappresentare differenti stadi dell'evoluzione dinamica di un nucleo. Vi sono inoltre la produzione di parti per evaporazione che può contribuire alle rese d'emissione di frammenti leggeri, e l'espansione globale che influenza le energie cinetiche dei frammenti.
- *I parametri termodinamici come pressione, volume, potenziale chimico, non sono sotto controllo* - Le fasi sperimentali non danno accesso

diretto ai parametri termodinamici e si è costretti a ricorrere a calcoli di modello per estrarli.

- *Le evidenze sperimentali sono modificate dai decadimenti secondari* - Bisogna poter individuare prodotti finali che siano poco affetti dal problema dei decadimenti secondari, come ad esempio i Frammenti di Massa Intermedia (IMF).

Per cercare di estrarre l'informazione sulla temperatura associabile alla materia nucleare, tenendo conto di quanto elencato, si adottano svariate tecniche, anche in funzione delle entità delle energie d'eccitazione. A seconda degli approcci esse possono essere raggruppate in:

- *Approccio che considera le popolazioni degli stati eccitati del sistema nucleo* - Si basa sul concetto gran-canonic: il valore della temperatura nucleare è estratto dalle rese dei cluster prodotti, assumendo valida una distribuzione alla Boltzmann

$$Y_i \propto e^{-E_i/T} \quad (10.2)$$

Le tecniche più spesso utilizzate consistono nel considerare il doppio rapporto delle rese isotopiche (S. Albergo et al., Nuovo Cim. 89 (1985) 1; J. Pochodzalla et al., Phys.Rev.Lett. 75 (1995) 1040), detto anche termometro isotopico; la popolazione degli stati eccitati, legati oppure no (D.J. Morrissey, Ann.Rev.Nucl.Part.Sci. 44 (1994) 27); le rese isobariche per sorgenti definite.

- *Approccio cinetico* - Si basa sul concetto di *ensemble* canonico. La temperatura è estratta dalle pendenze degli spettri misurati in energia cinetica, e il metodo è detto termometro delle pendenze. I processi per i quali lo studio della temperatura è attuato in questo modo, concernono tipicamente l'evaporazione termica di nucleoni o loro cluster dal nucleo composto, o la brusca disintegrazione di una sorgente equilibrata con l'emissione di nuclei leggeri, nucleoni, particelle, raggi γ .
- *Approccio termico* - L'energia d'eccitazione del sistema al momento del *freeze-out* è estratta dalle misure della cascata d'evaporazione da sorgente termalizzata in funzione del rapporto N/Z . La corrispondente temperatura al momento del *freeze-out* è quindi ottenuta dal valore dedotto per l'energia d'eccitazione. Un esempio è costituito dal termometro di isospin (K.-H. Schmidt et al., Phys.Lett.B 300 (1993) 313)

10.1 Descrizione termodinamica di un nucleo

Fin'ora si è trattato delle proprietà dei nuclei o nel loro stato fondamentale o in stati debolmente eccitati. Si è visto che quanto sperimentalmente os-

servato è da un lato caratterizzato dalle proprietà di un sistema degenere di fermioni e dall'altro da quelle di un insieme numericamente limitato di componenti. In un nucleo la forza nucleare da' luogo, in buona approssimazione, a un campo medio globale nel quale i nucleoni si muovono come particelle quasi libere. Nel modello a shell si tiene in considerazione la dimensione finita dei nuclei e gli stati dei singoli nucleoni sono classificati tramite eccitazioni radiali e momenti angolari. Da un punto di vista termodinamico si assegna temperatura zero al sistema nel suo stato fondamentale.

Si considereranno ora nuclei in condizioni di forte eccitazione, per i quali il cammino libero medio di un loro generico nucleone entro il nucleo stesso è molto ridotto, compatibile con 1 fm. Il nucleo non può in tal caso essere considerato come un sistema fermionico degenere ma piuttosto come una sorta di liquido, tanto più al crescere delle eccitazioni. Viene quindi naturale adottare in tal caso un approccio statistico per descriverne le caratteristiche e il comportamento, e mutuare concetti e osservabili termodinamiche. Lo stato d'eccitazione di un nucleo sarà dunque caratterizzato dalla sua temperatura.

Non bisogna però dimenticare che si può a rigori associare una temperatura soltanto ad un sistema ampio e in equilibrio termico, e neppure i nuclei più pesanti soddisfano bene a questa condizione. Un nucleo eccitato non può dunque a maggior ragione essere pensato come in equilibrio, ma piuttosto in una condizione di raffreddamento rapido tramite emissione di nucleoni e fotoni.

Non si può prescindere da ciò qualunque interpretazione termodinamica si tenti dei risultati sperimentali.

Quando si tratta termodinamicamente di fenomeni nucleari si parla solitamente di *materia nucleare*, piuttosto che di nuclei, sottintendendo che quanto detto va considerato come estrapolato ad ampi sistemi di nucleoni. L'ambito che meglio permette lo studio delle proprietà termodinamiche della materia nucleare è quindi quello relativo alle reazioni che coinvolgono ioni pesanti. In queste tipologie di urti ione-ione i nuclei si fondono (amalgamano) sino a formare, per un breve arco di tempo, un sistema di *materia nucleare* di accresciute densità e temperatura. Nel seguito si darà un'interpretazione del diagramma di fase della materia nucleare sulla base di risultati sperimentali e teorici ottenuti per questa tipologia di reazioni.

I risultati della termodinamica applicata alla materia nucleare sono di grande importanza anche per la cosmologia e l'astrofisica.

Si pensa che l'universo, nei primi stadi della sua esistenza, abbia attraversato fasi nelle quali la temperatura e la densità di materia erano molti ordini di grandezza superiori ai valori dell'universo odierno, e si gli urti a energie relativistiche fra ioni pesanti dovrebbero potere, in piccolo e in parte, permettere di riprodurre in laboratorio le condizioni che hanno caratterizzato la materia in quella fase.

Per energie d'eccitazione al di sopra della soglia di produzione di particelle un nucleo non mostra stati discreti ma soltanto uno spettro continuo. Nella regione di transizione al di sotto o appena sopra la soglia di produzione, vi sono moltissime risonanze strette, che però non danno alcuna informazione strutturale sul nucleo stesso. Quanto un nucleo mostra in queste condizioni viene detto *caos quantistico*.

Lo studio di un nucleo in questi ambiti coinvolge, come detto, metodi statistici, e a questo scopo si comincia con l'introdurre il concetto di *temperatura nucleare*.

Si consideri ad esempio a tal proposito la fissione spontanea del ^{252}Cf , con una vita media di 2.6 anni e il 3.1 % di probabilità di decadere per fissione spontanea. È ragionevole immaginare che durante la fase di separazione fra i due frammenti si attui una sorta di *attrito* fra essi, per cui non tutta l'energia disponibile per il processo di fissione si converte in energia cinetica dei frammenti. Una parte va ad incrementare l'energia interna di questi e quindi li *scalda*.

Il successivo processo di raffreddamento dei frammenti di fissione è schematizzato in figura [10.1](#).

Esso inizia con l'emissione di neutroni lenti, tipicamente 4 con un'energia cinetica media di 2.1 MeV ognuno. Quando i frammenti si sono raffreddati al di sotto della soglia di emissione di neutroni, possono ulteriormente raffreddarsi solo emettendo fotoni.

Lo spettro energetico dei neutroni emessi ha una tipica forma *evaporativa* e può quindi essere descritto da una distribuzione di Maxwell

$$N_n(E_n) \sim \sqrt{E_n} e^{-E_n/kT} \quad (10.3)$$

come mostrato in figura [10.2](#) a meno del fattore $\sqrt{E_n}$ di normalizzazione. La discesa esponenziale dello spettro è caratterizzata dalla temperatura T del sistema, che in questo caso dà $kT = 1.41$ MeV. Si trova che frammenti di fissione emessi da nuclei diversi hanno anche diverse temperature, come ad esempio per ^{236}U , con $kT = 1.29$ MeV.

In figura [10.3](#) si vedono gli spettri dei fotoni emessi durante la diseccitazione dei frammenti di fissione. In questo caso ogni fissione spontanea produce in media 20 fotoni, l'80% dei quali ha energie inferiori a 1 MeV. Si noti anche in questo caso la forte rassomiglianza con un tipico spettro evaporativo. La forte pendenza dello spettro d'emissione dei fotoni, rispetto a quello d'emissione dei neutroni, indica che nella fase d'emissione di fotoni, che ha luogo in condizioni di minor eccitazione nucleare, la temperatura del sistema è significativamente inferiore.

Il successo nell'interpretazione dei due spettri di neutroni e fotoni emessi in conseguenza della fissione testimonia della ragionevolezza dell'approccio statistico seguito. La forma osservata per gli spettri si può dunque derivare dallo studio statistico della densità degli stati di un gas di Fermi degenere.

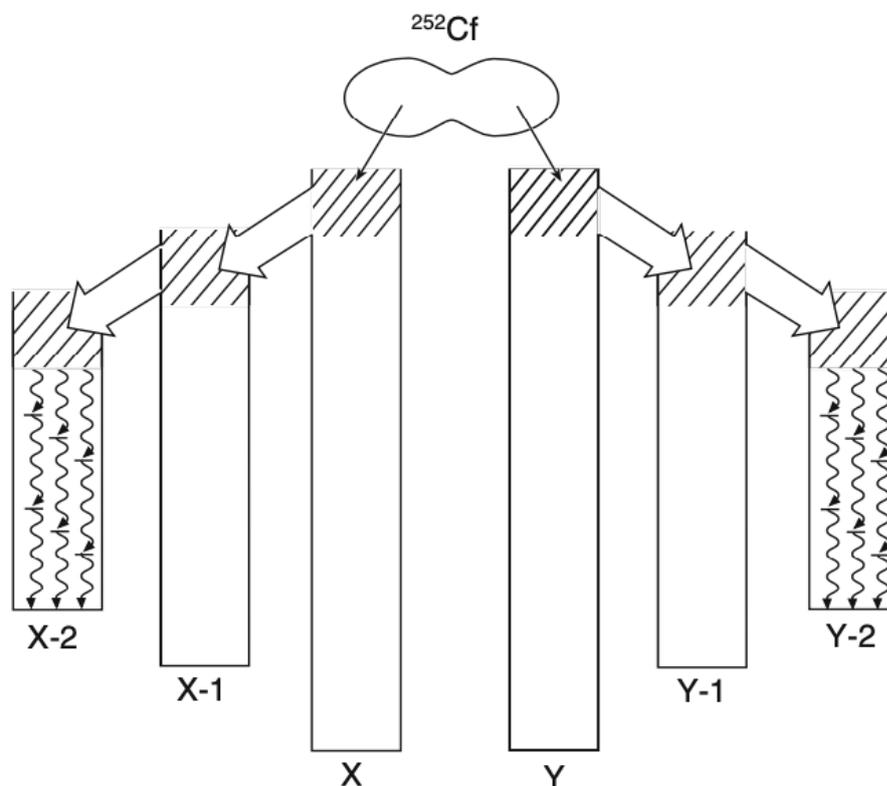


Figura 10.1: Schema del processo di raffreddamento dei frammenti di fissione del ^{252}Cf . Il nucleo genitore si spezza in due frammenti con numeri di massa X ed Y , che si raffreddano poi emettendo dapprima neutroni e quindi fotoni.

10.2 Nucleo composto e caos quantistico

Nella zona di transizione appena sotto e sopra la soglia di produzione di particelle per nuclei pesanti, si individuano molte risonanze. Sono stati discreti, ognuno caratterizzato da un definito set di numeri quantici, il cui decadimento è descrivibile solo statisticamente sulla base della densità degli stati stessi, per cui essi non contengono informazioni specifiche sulla struttura del nucleo.

Nuclei composti

Con la cattura di neutroni da parte di nuclei pesanti si osserva una miriade di risonanze, come si può ad esempio vedere in figura [10.4](#) per la cattura di neutroni sul torio. Si noti che la scala energetica è in eV e quindi la

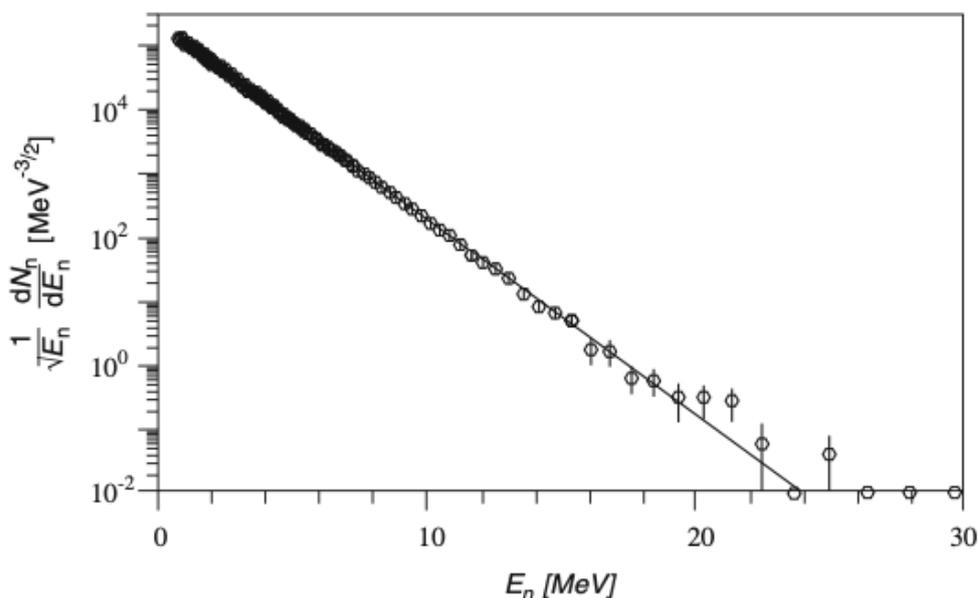


Figura 10.2: Spettro in energia dei neutroni emessi nella fissione spontanea del ^{252}Cf . La linea continua rappresenta il fit con la distribuzione maxwelliana.

separazione energetica fra queste risonanze è 6 ordini di grandezza inferiore alla separazione energetica fra gli stati meno legati del nucleo. Questa osservazione aveva trovato una spiegazione nel modello del *nucleo composto* formulata da Bohr negli anni '30. I neutroni penetrati nel nucleo risultano avere un piccolissimo cammino libero medio, date le forti interazioni con gli altri nucleoni, e quindi distribuiscono molto rapidamente con essi la propria energia cinetica. La probabilità che l'energia venga interamente ceduta ad un solo nucleone del nucleo è irrisoria. I nucleoni non riescono quindi a sfuggire dal nucleo con facilità, dato il basso livello d'eccitazione di ognuno di essi, e ciò conduce ad una relativamente lunga vita media per gli stati di *nucleo composto*, come evidenziato dalla strettezza delle risonanze trovate. La condizione di nucleo composto non viene dunque raggiunta immediatamente dopo la cattura del neutrone, ma piuttosto attraverso urti successivi attraverso una sequenza di stati intermedi di cui il nucleo composto costituisce la condizione limite in equilibrio termico.

Caos quantistico nei nuclei

Nella teoria classica dei sistemi deterministici si distingue fra orbite regolari e caotiche. Le prime sono orbite stabili che non vengono sensibilmente modificate da perturbazioni esterne. Le masse in gioco effettuano moti periodici

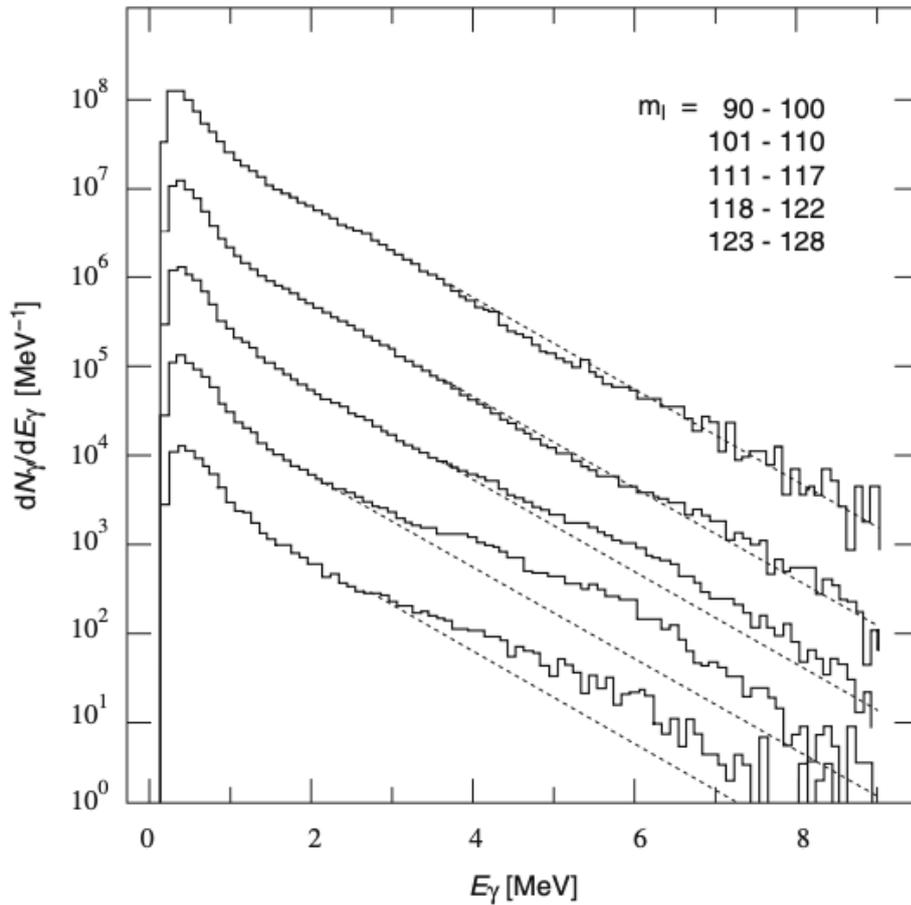


Figura 10.3: Spettri energetici per l'emissione di fotoni nella fissione spontanea del ^{252}Cf . I diversi spettri corrispondono, dall'alto verso il basso, ai diversi gruppi di numeri di massa m_l dei prodotti di fissione. Le linee tratteggiate sono ottenute da fit con funzioni esponenziali.

e la configurazione del sistema riproduce sostanzialmente se stessa.

Il caso di orbite caotiche è molto diverso: esse non sono periodiche e anche piccolissime perturbazioni possono modificarle enormemente. Inoltre mentre predire l'evoluzione di un sistema regolare può essere fatto con accuratezza arbitraria, le incertezze associate alle predizioni legate ad un sistema caotico crescono esponenzialmente.

Dal punto di vista quantomeccanico la presenza di orbite regolari in un sistema (nucleo) corrisponde a stati la cui funzione d'onda può essere calcolata tramite l'equazione di Schrödinger nell'ambito di qualche modello, come ad esempio quello a shell. L'equivalente quantomeccanico del moto caotico classico corrisponde a stati costituiti stocasticamente con funzioni d'onda di singola particella.

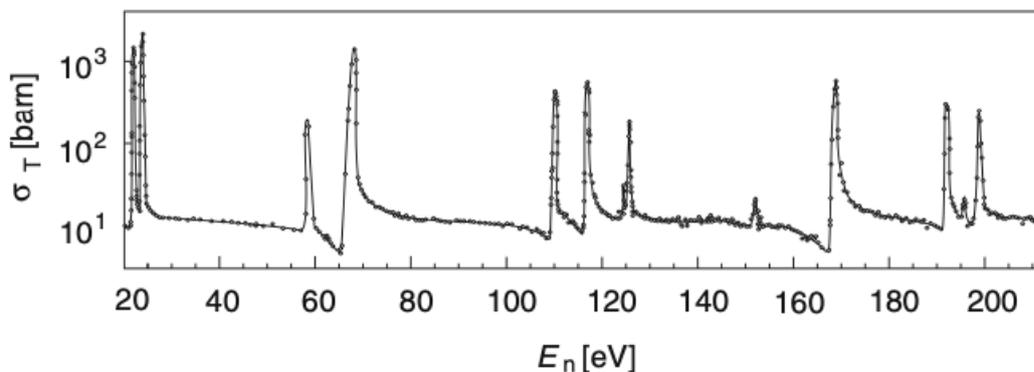


Figura 10.4: Sezione d'urto totale per la reazione $n + {}^{232}\text{Th}$ in funzione dell'energia del neutrone. I picchi stretti corrispondono a risonanze con momento angolare orbitale $\ell = 0$.

Un sistema in uno stato caotico non contiene dunque alcuna informazione sull'interazione fra le particelle che lo compongono, né nel caso classico né in quello quantistico.

La struttura stocastica di un sistema caotico può essere sperimentalmente dimostrata misurando le separazioni energetiche fra gli stati, come ad esempio quelli rappresentati dalle risonanze in figura 10.4. L'approccio statistico è giustificato dalla grande densità degli stati nella regione del *nucleo composto*.

Si nota che gli stati con uguali spin e parità, come ad esempio sempre in figura 10.4, tendono a stare il più possibile lontani gli uni dagli altri. La distanza più probabile fra questi stati è significativamente maggiore della più probabile separazione che avrebbero se fossero distribuiti indipendentemente uno dall'altro in accordo con la distribuzione di Poisson. Questo comportamento degli stati caotici è proprio quanto ci si aspetta se essi sono costituiti da una miscela di stati di particella singola tutti con gli stessi numeri quantici.

10.3 Fasi della materia nucleare

La transizione di fase liquido-gas

Si è constatato che le reazioni periferiche fra ioni pesanti sono molto efficaci per *riscaldare* i nuclei in modo controllato. In un'interazione radente fra due nuclei, come schematizzato in figura 10.5, si producono due frammenti principali che si sono *riscaldati* per effetto dell'*attrito* sviluppatosi durante la reazione. Con questo tipo di reazioni si riescono a misurare piuttosto bene sia la temperatura dei frammenti che l'energia fornita al sistema. L'energia dei frammenti viene solitamente desunta dalle distribuzioni maxwelliane dei

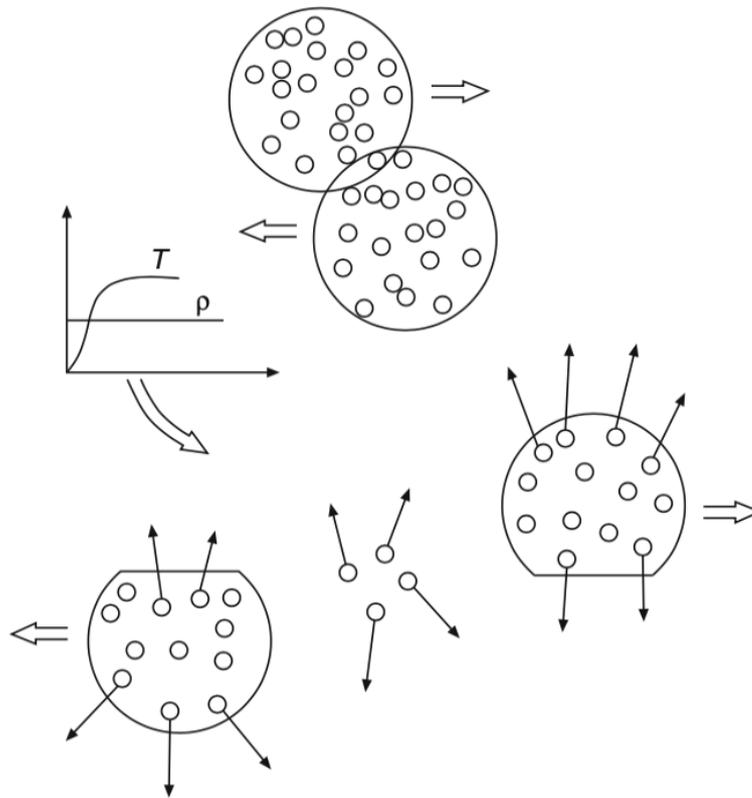


Figura 10.5: Schematizzazione di un urto periferico fra due nuclei osservato nel sistema CM. Il diagramma descrive l'evoluzione temporale della densità ρ e della temperatura T dei frammenti durante l'urto.

prodotti di decadimento mentre l'energia totale si determina dalla rivelazione di tutte e particelle prodotte nello stato finale.

Il frammento principale proveniente dal proiettile si muove sostanzialmente negli stessi direzione e verso del proiettile, e anche i suoi prodotti di decadimento si muovono nello stesso modo e possono quindi essere cinematicamente distinti sia dai prodotti di decadimento del frammento bersaglio che dai nucleoni di evaporazione emessi durante l'interazione radente. Si possono così separare e distinguere i contributi energetici trasportati dai frammenti dall'energia persa per *attrito* durante l'interazione radente.

Si può considerare come esempio un esperimento in cui nuclei di Au con energia di 600 MeV/nucleone sono stati diretti contro un bersaglio solidale col sistema del laboratorio, anch'esso d'oro. I prodotti di reazione sono stati tracciati grazie ad un rivelatore che copriva pressochè l'intero angolo solido attorno al bersaglio.

In figura [10.6](#) è mostrata la dipendenza misurata della temperatura dei fram-

menti dall'energia fornita al sistema. Si noti come per energie d'eccitazione E/A fino a circa 3 MeV/nucleone si osservi una rapida crescita della temperatura. Nella regione per valori di E/A compresi fra circa 3 MeV/nucleone e 10 MeV/nucleone, la temperatura sembra mantenersi sostanzialmente costante, per poi ricominciare a crescere rapidamente per valori superiori a 10 MeV/nucleone. Questo comportamento ricorda il processo di evaporazione

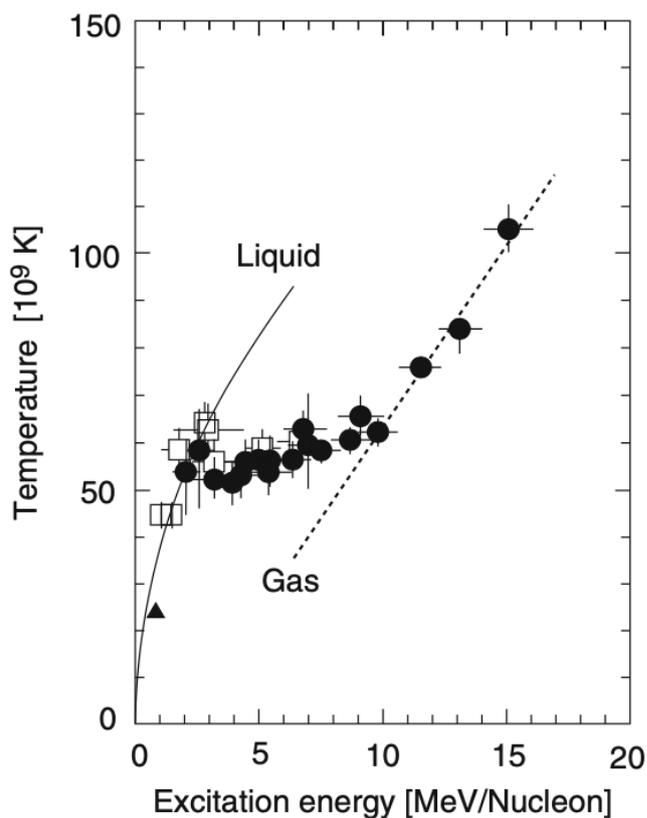


Figura 10.6: Temperatura dei frammenti in un urto periferico fra due nuclei di ^{197}Au in funzione dell'energia d'eccitazione per nucleone.

dell'acqua in prossimità del punto di ebollizione, durante la transizione di fase da liquido a vapore, con la temperatura che resta costante mentre viene fornita energia al sistema finché l'intera quantità di liquido non si è convertita in vapore. Sembra quindi naturale interpretare anche in questo caso la descritta dipendenza della temperatura del sistema dall'energia fornitagli come una *transizione di fase della materia nucleare* dallo stato liquido a quello di vapore-equivalente.

I concetti utilizzati per descrivere il fenomeno sono presi a prestito dalla termodinamica dei sistemi in equilibrio, ovvero termalizzati. In questo spirito si potrebbe quindi dire che una volta raggiunta una temperatura equivalen-

te a $kT \sim 3$ MeV, si forma attorno al nucleo uno strato di nucleoni in fase *vapore/gas* che però non sfugge ma resta in una condizione d'equilibrio con la parte ancora più coesa del nucleo, scambiando con essa nucleoni. Tale gas di nucleoni potrà essere ulteriormente riscaldato soltanto quando tutto il liquido nucleonico sarà nella condizione di *vapore/gas*.

Materia adronica

Per investigare gli urti fra ioni pesanti a piccolo parametro d'impatto, ovvero quelli che si dicono *urti centrali*, si possono ad esempio selezionare gli eventi che presentano un grande numero di pioni carichi e neutri fra i prodotti di reazione, come illustrato in figura [10.7](#). Considerando ad esempio sempre le interazioni $^{197}\text{Au} + ^{197}\text{Au}$, si può pensare a energie dell'ordine o maggiori a 10 GeV/nucleone che danno luogo alla produzione di cospicue quantità di pioni.

A queste energie, l'eccitazione nucleonica che porta alla formazione di una Δ , $N + N \rightarrow \Delta + N$, ha una sezione d'urto di formazione $\sigma = 40$ mb; la corrispondente *lunghezza d'interazione* $\lambda \approx 1/\sigma\rho_N$ nel nucleo è dell'ordine di 1 fm. Questo significa che durante un urto fra ioni pesanti hanno luogo urti multipli e che per energie sufficientemente elevate ogni nucleone coinvolto nell'urto sarà eccitato in media almeno una volta allo stato di barione Δ . Da un punto di vista termodinamico ciò equivale all'apertura di un nuovo grado di libertà. I barioni Δ decadono rapidamente ma vengono continuamente riformati tramite la reazione inversa $\pi + N \rightarrow \Delta$. Creazione e decadimento, $\pi + N \leftrightarrow \Delta$, raggiungono quindi una sorta di equilibrio dinamico. A questa miscela di nucleoni, barioni Δ , pioni ed eventualmente altri mesoni viene dato il nome di *materia adronica*.

I pioni, data la loro relativamente piccola massa, sono i principali responsabili degli scambi energetici entro la materia adronica. La rivelazione e lo studio di questi pioni permettono dunque di risalire alla densità d'energia e alla temperatura della materia adronica prodotta con l'urto fra due ioni. La temperatura viene solitamente desunta dalle distribuzioni energetiche dei pioni emessi ortogonalmente rispetto alla direzione del fascio, o dei fasci in caso di collider. Il loro spettro energetico mostra l'andamento esponenziale atteso di una distribuzione di Boltzman

$$\frac{dN}{dE_{kin}} \propto e^{-E_{kin}/kT} \quad (10.4)$$

con E_{kin} l'energia cinetica del pione. Sperimentalmente si trova che le temperature della *radiazione pionica* non superano mai $kT \simeq 150$ MeV, indipendentemente da quanto crescano le energie dei nuclei collidenti. Una spiegazione di ciò sta nel fatto che la materia nucleare eccitata si espande, e questo la porta a raffreddarsi. Al di sotto di una temperatura $kT \simeq 150$ MeV la probabilità di interazioni adroniche per i pioni, e quindi degli scambi

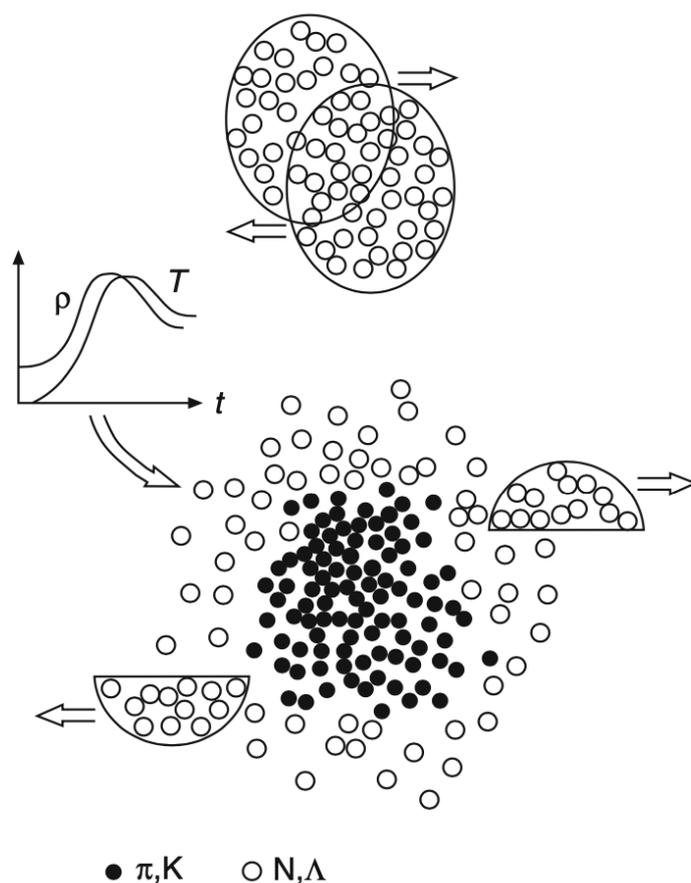


Figura 10.7: Urto centrale fra due nuclei pesanti ad alta energia. Si noti lo *schacciamento* trasversale dei nuclei che riflette la contrazione relativistica delle lunghezze. Le curve mostrano l'incremento di densità ρ e temperatura T nella regione centrale della collisione.

energetici fra essi e le altre particelle presenti, decresce rapidamente. Questo processo viene detto *freezing out* pionico.

Diagramma di fase della materia nucleare

Le varie fasi in cui si può trovare la materia nucleare sono riassunte in figura [10.8](#). Per chiarirne il significato si può fare il parallelo con un diagramma di fase per la materia ordinaria, intesa come composta da atomi e molecole. I nuclei allo stato fondamentale sono freddi, con densità ρ_N e temperatura $kT = 0$. Una stella ai neutroni ha anch'essa temperatura $kT = 0$, ma densità da ~ 5 a 10 volte superiore a quella dei nuclei standard. Se si fornisce gradualmente energia ad un nucleo esso comincia a scaldarsi

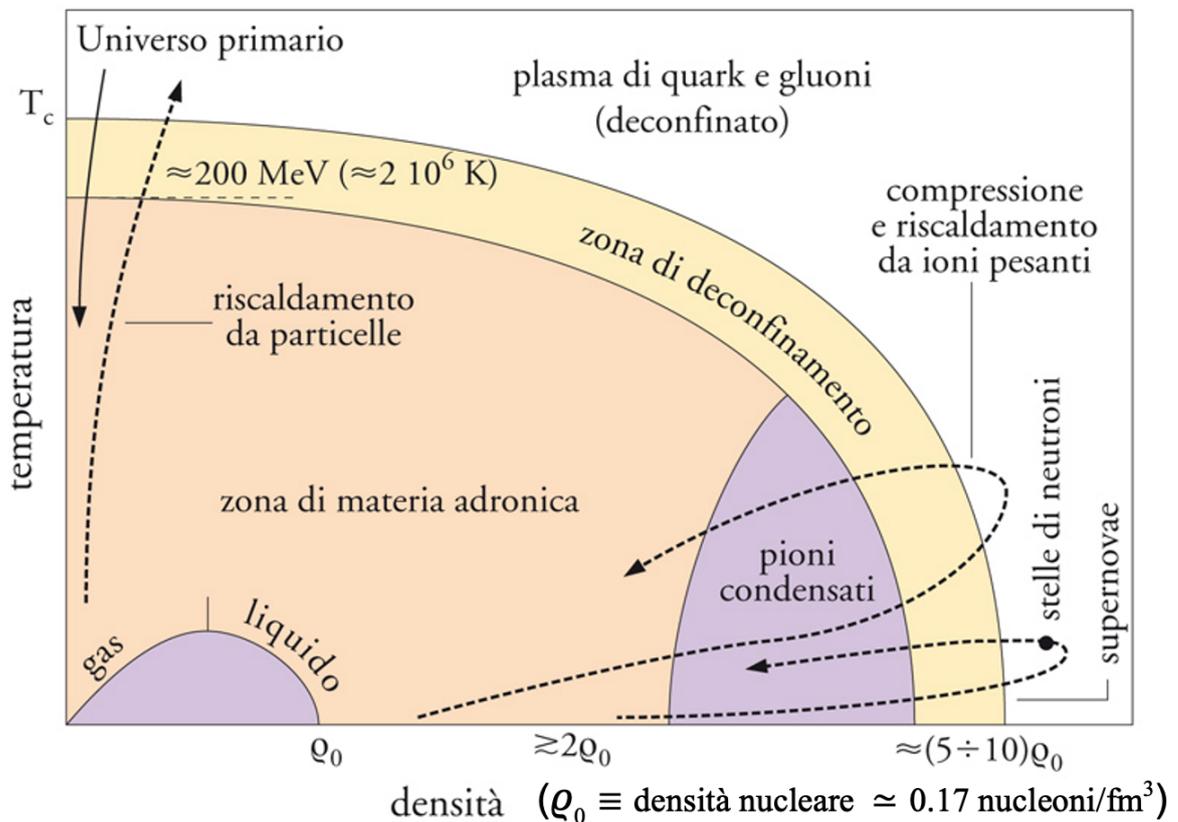


Figura 10.8: Diagramma di fase della materia nucleare.

ed emette quindi nucleoni o piccoli cluster di nucleoni, quali particelle α , similmente a come una goccia di liquido evapora atomi o molecole. Con la materia ordinaria, se la si confina e nel contempo si accresce l'ammontare di energia fornita, ciò porta all'eccitazione di gradi di libertà interni, quali eccitazioni rotazionali o vibrazionali. Nei nuclei i nucleoni possono essere eccitati come risonanze $\Delta(1, 232)$ o stati eccitati d'energie ancora superiori. Il miscuglio di nucleoni, pioni e altro che consegue ai decadimenti è la cosiddetta *materia adronica*.

Quark-Gluon plasma

Il processo di dissociazione completa di un atomo nel suo nucleo e i suoi elettroni, che dà luogo al *plasma atomico*, ha un equivalente nella completa dissociazione dei nucleoni e pioni di un nucleo in quark e gluoni, quello che viene detto *quark-gluon plasma* o QGP. Qualitativamente il posizionamento della zona di transizione di fase corrispondente nel diagramma di fase temperatura-densità può essere capito ragionando come segue.

Nelle condizioni di densità nucleare standard ogni nucleone ha a disposizione

un volume di $\sim 6 \text{ fm}^3$, di cui ne occupa col proprio volume circa $1/3$. Se si immagina di comprimere un nucleo senza riscaldarlo ($T = 0$) fino ad alcune volte la sua densità standard, i singoli nucleoni che lo costituiscono tendono a sovrapporsi l'un l'altro perdendo gradualmente la propria individualità. A questo punto quark e gluoni dovrebbero muoversi in modo sostanzialmente libero nell'intero volume comune costituitosi.

Ma si può immaginare anche di seguire un altro percorso nel diagramma di fase, partendo dalla materia nucleare standard e seguendo una via sostanzialmente parallela all'asse verticale delle temperature, accrescendo di fatto la temperatura senza però modificare la densità. In tal caso, raggiunta una temperatura $kT \approx 200 \text{ MeV}$ dovrebbe risultare disponibile per ogni interazione nucleone-nucleone un'energia sufficiente, per effetto della produzione di pioni, ad accrescere la densità adronica e la frequenza delle mutue collisioni fra essi tanto da rendere impossibile l'assegnare un quark o un gluone ad uno specifico adrone.

Lo stato raggiunto in questo caso è detto *quark-gluon plasma*.

Capitolo 11

Fusione nucleare

Il grafico in figura [11.1](#) mostra un massimo attorno al valore $A \approx 56$, il ferro, cui segue una decrescita lenta per i nuclei più pesanti. Per i nuclei più

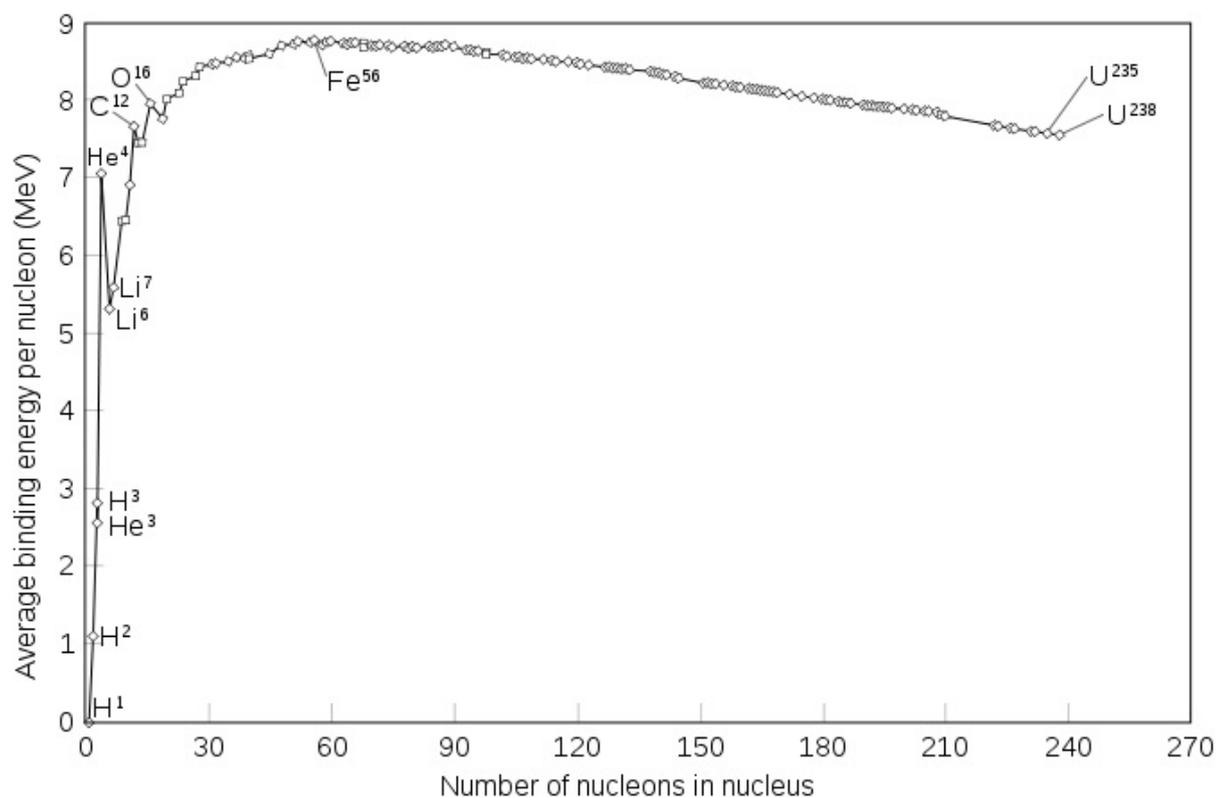


Figura 11.1: Energia media di legame per nucleone $|B/A|$, per la gran parte dei nuclei stabili.

leggeri del ferro la decrescita è più ripida cosicché, ad eccezione dei nuclei "magici", i nuclei più leggeri risultano meno fortemente legati dei nuclei di

taglia intermedia.

In base a ciò quindi, *fondendo* due nuclei leggeri per produrne uno più pesante si produce energia e il nucleo più pesante ottenuto è di conseguenza più fortemente legato. Si tratta di un processo opposto a quello di fissione e come per quest'ultimo l'energia rilasciata coincide con la differenza fra le energie di legame degli stati iniziale e finale. Il processo è detto *fusione nucleare*.

Perchè la fusione tra due nuclei possa aver luogo bisogna riuscire a vincere la repulsione coulombiana fra le loro cariche protoniche; l'energia potenziale coulombiana fra i due nuclei vale

$$U_C = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0 (R_1 + R_2)} \quad (11.1)$$

con Z_1 e Z_2 i numeri atomici dei due nuclei di raggi R_1 ed R_2 . La quantità $(R_1 + R_2)$ rappresenta dunque la distanza classica di massimo avvicinamento possibile fra i due nuclei. Ricordando che si può porre $R = R_0 A^{1/3}$ si ha

$$U_C = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0 R_0 (A_1^{1/3} + A_2^{1/3})} \quad (11.2)$$

Se si considera ad esempio un caso per cui $A_1 \approx A_2 \approx 2Z_1 \approx 2Z_2 = 8$, si ottiene $U_C \approx 4.8$ MeV, per l'ammontare di energia E che dovrebbe essere fornita ai due nuclei onde permettere loro di superare la barriera coulombiana. È una quantità d'energia relativamente ridotta che si può ottenere facilmente accelerando uno dei due nuclei con sistemi elettrostatici quali ad esempio acceleratori di Crockroft-Walton o Van de Graaff. Ciò che si ottiene però al momento dell'urto è che quasi tutti i nuclei interagiscono elasticamente; affinché la fusione abbia luogo è infatti anche necessario che i due nuclei permangano vicini per un certo tempo che può eccedere quello in gioco durante l'urto indotto da fasci accelerati, tranne nei rari casi in cui l'urto che si produce è centrale, ovvero ha luogo con parametro d'urto $b \simeq 0$.

Un modo che la natura ha trovato per ottenere le condizioni che favoriscono la fusione è di riscaldare a sufficienza una miscela "confinata" di nuclei onde fornire loro abbastanza energia termica da permettergli di superare la barriera coulombiana, e ciò ha luogo nella formazione di una stella grazie all'intervento dell'interazione gravitazionale che "confina" e favorisce il "riscaldamento". Si può stimare la temperatura necessaria affinché la fusione possa aver luogo in una stella secondo quanto detto, ricordando il valore della costante k_B di Boltzmann ($k_B = 8.61673324 \times 10^{-11}$ MeV K⁻¹), da cui

$$T \simeq \frac{4.8}{k_B} \simeq 5.6 \times 10^{10} \text{ K} \quad (11.3)$$

che è però un valore molto superiore a quello tipicamente presente all'interno della maggior parte delle stelle che è dell'ordine di $10^7 \div 10^8$ K. Fu proprio

questo semplice risultato che portò molti a rifiutare inizialmente l'idea di A. Eddington che l'energia delle stelle provenisse da reazioni di fusione nucleare al loro interno. Questo fatto rappresenta oltretutto anche uno degli ostacoli maggiori da superare per riuscire ad ottenere la fusione controllata in un reattore.

Le reazioni di fusione hanno in realtà luogo a temperature inferiori a quella stimata e ciò grazie alla combinazione di due fatti.

- Il primo e più importante è l'effetto tunnel, grazie al quale per ottenere la fusione non si deve necessariamente mettere in gioco un'energia superiore a quella dell'intera barriera coulombiana. Ricordando quanto detto a proposito del decadimento α , si ha che la penetrazione della barriera dipende da un certo numero di fattori il più importante dei quali è il fattore G di Gamow che dipende dalle velocità relative e che per due nuclei interagenti con numeri atomici Z_1 e Z_2 e masse m_1 ed m_2 , può essere scritto in funzione dell'energia E come

$$G(E) = \sqrt{\frac{E_G}{E}} \quad \text{con} \quad E_G = 2m_r c^2 (\pi\alpha Z_1 Z_2)^2 \quad (11.4)$$

dove α è la costante di struttura fine ed $m_r = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$, cioè la massa ridotta del sistema dei due nuclei in procinto di fondersi.

La probabilità di attraversamento della barriera, e quindi di fusione tra i due nuclei, è proporzionale ad $e^{-G(E)}$, e quindi aumenta all'aumentare di E . Se la si considera ad esempio per la fusione di due protoni all'interno di una stella tipica alla temperatura di 10^7 K, si ha $E_G \simeq 490$ keV ed $E \simeq 1$ keV, da cui si ottiene una probabilità di fusione estremamente bassa, proporzionale ad $e^{-22} \simeq 10^{-9.55}$.

- Il secondo fatto che unitamente al primo rende ragione dei ratei di processi di fusione all'interno delle stelle, dipende dalla forma maxwelliana delle distribuzioni di energia al loro interno, per cui anche alle temperature di $10^7 \div 10^8$ K, vi sono comunque nuclei con energie cinetiche superiori a quella media della distribuzione, sulla coda alta della stessa e con valori quindi più adatti a favorire la fusione. È la cooperazione tra questi due effetti che favorisce la fusione nucleare in una stella.

Si consideri la fusione fra due tipologie di nuclei a e b , presenti in equilibrio termico alla temperatura T , con densità n_a e n_b in un certo volume definito. Si supponga anche che T sia sufficientemente alta da far sì che i nuclei a e b costituiscano un *plasma* completamente ionizzato. Si assuma anche che le velocità delle due tipologie di nuclei siano distribuite secondo Maxwell-Boltzmann, per cui la probabilità che vi siano due nuclei con velocità relativa

v compresa nell'intervallo $(v + dv)$ è data da

$$P(v) dv = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{m_r}{kT}\right)^{3/2} e^{-mv^2/2kT} v^2 dv \quad (11.5)$$

con m_r la massa ridotta del sistema dei due nuclei.

Detta σ_{ab} la sezione d'urto del processo di fusione si ha dunque, per il rateo R_{ab} delle reazioni di fusione per unità di volume

$$R_{ab} = n_a n_b \langle \sigma_{ab} v \rangle \quad (11.6)$$

con le parentesi $\langle \rangle$ che indicano la media, ovvero

$$\langle \sigma_{ab} v \rangle \equiv \int_0^\infty \sigma_{ab} v P(v) dv \quad (11.7)$$

Tenendo conto che molte sezioni d'urto nucleari a bassa energia mostrano un andamento tipicamente proporzionale all'inverso dell'energia cinetica E del proiettile, e ricordando il ruolo dell'effetto tunnel, si può scrivere la sezione d'urto di fusione come

$$\sigma_{ab}(E) = S(E) \frac{1}{E} e^{-\left(\frac{E_G}{E}\right)^{1/2}} \quad (11.8)$$

dove $S(E)$ è una funzione lentamente variabile di E che esprime i dettagli dei meccanismi nucleari dell'interazione. [1](#)

Sostituendo la [11.5](#) e la [11.8](#) nella [11.7](#) si ha, per il rateo delle reazioni di fusione per unità di volume

$$R_{ab} = n_a n_b \sqrt{\frac{8}{\pi m_r}} \left(\frac{1}{kT}\right)^{3/2} \int_0^\infty S(E) e^{\left[-\frac{E}{kT} - \sqrt{\frac{E_G}{E}}\right]} dE \quad (11.9)$$

Il fatto che $S(E)$ sia lentamente variabile con E implica che il ruolo dominante nell'integrando sia svolto dal termine esponenziale e ne risulta che il termine Maxwelliano, calante con E , si combina con quello crescente con E dovuto all'effetto tunnel, dando luogo ad un massimo nell'integrando, detto *picco di Gamow*, in corrispondenza al valore

$$E = E_0 = \left[\frac{1}{4} E_G (kT)^2\right]^{1/3} \quad (11.10)$$

Il processo di fusione può quindi aver luogo in corrispondenza del ristretto intervallo di energie $E_0 \pm \Delta E_0$, con

$$\Delta E_0 = \frac{4}{2^{1/3} \sqrt{3}} E_G^{1/6} (kT)^{5/6} \quad (11.11)$$

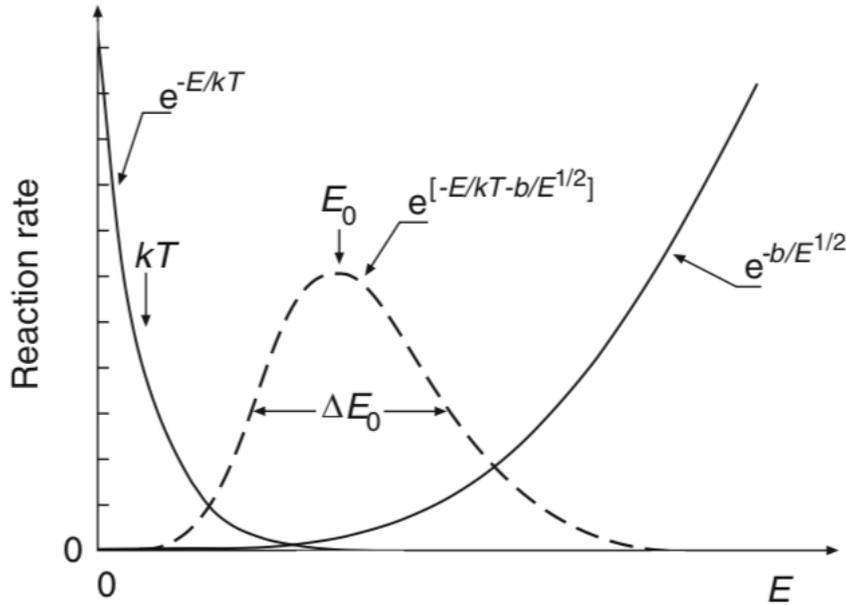
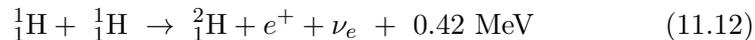


Figura 11.2: Picco di Gamow. In figura $b \equiv E_G$.

come mostrato in figura [11.2](#). Nel caso di due protoni che si fondono alla temperatura $T = 2 \times 10^7$ K (la temperatura interna del Sole è stimata essere $T_\odot \simeq 1.57 \times 10^7$ K), si ha $E_G = 493$ keV, $kT = 1.7$ keV, $E_0 = 7.2$ keV e $\Delta E_0 = 8.2$ keV.

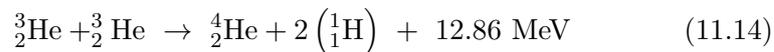
Per tornare quindi all'energia prodotta in una stella, e considerando più precisamente il Sole, si ha che la quasi totalità dell'energia prodotta in esso proviene dal cosiddetto ciclo *protone-protone*, che ha più di un canale possibile, il principale dei quali, detto catena PP-I e illustrato in figura [11.3](#), inizia con la fusione di nuclei di idrogeno e la conseguente produzione di nuclei di deuterio



Il deuterio si fonde quindi con altro idrogeno e produce ${}^3_2\text{He}$



Infine due nuclei di ${}^3_2\text{He}$ si fondono e formano ${}^4_2\text{He}$



¹L'assunzione di lenta variabilità per $S(E)$ implica ad esempio che si esclude la presenza di risonanze.

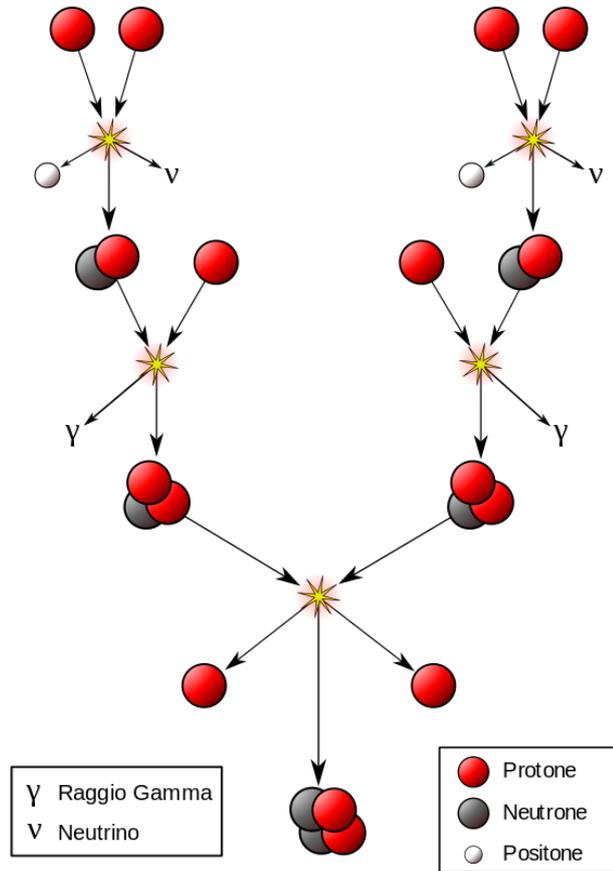
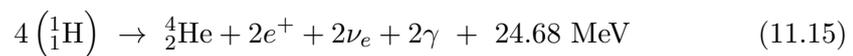


Figura 11.3: Catena PP-I

La notevole quantità d'energia rilasciata nel corso dell'ultima reazione di fusione è dovuta alla grande energia di legame dell' ${}^4_2\text{He}$.

La prima delle reazioni indicate, la [11.12](#), essendo dovuta all'interazione debole, procede con un rateo estremamente basso ed è questo il motivo della lunga *vita media* del Sole!

Il ciclo nella sua completezza può quindi essere descritto come



Dato il valore di T_\odot tutta la materia all'interno del Sole è ionizzata e costituisce un plasma. I positroni prodotti annichilano nel plasma con gli elettroni presenti rilasciando un'ulteriore energia di 1.02 MeV, per cui l'energia totale prodotta in ogni ciclo del tipo [11.15](#) ammonta a 26.72 MeV. Bisogna anche tener però conto che ogni neutrino che sfugge nello spazio porta via mediamente un'energia pari a 0.26 MeV. Ne risulta quindi che per ogni protone

coinvolto nella catena PP-I vengono mediamente irraggiati 6.55 MeV.
La catena PP-I non è però la sola, vi sono altri cicli di fusione che contribuiscono all'energia prodotta in una stella e di cui si tratterà più oltre, accennando alla nucleosintesi degli elementi nelle stelle.

Capitolo 12

Esercizi

12.1 Esercizi Capitolo 2

12.1.1 Esercizio 2 - 1: Spin del protone

Si immagini che lo spin di un protone sia rappresentabile come interamente dovuto al moto "orbitale" di un pione positivo π^+ che si muove a velocità c su un'orbita circolare di raggio $r = 10^{-13}$ cm attorno ad un "centro di rotazione" elettricamente neutro. Si calcoli il momento magnetico associato a tale moto e lo si confronti col valore noto misurato del momento magnetico del protone.

Soluzione:

Siano:

$$\mu_p = 2.793 \times \mu_N \quad \text{con} \quad \mu_N = \frac{e\hbar}{2m_p} \simeq 5.051 \times 10^{-27} \text{ J} \cdot \text{T}^{-1}$$

$$q_\pi = q_p \simeq +1.621 \times 10^{-19} \text{ C} \quad c = 2.998 \times 10^8 \text{ m/s}$$

Il modulo del momento magnetico μ^* associato alla configurazione "orbitale" descritta è dato dal prodotto fra l'intensità I di corrente dovuta al moto orbitale del π^+ e l'area S racchiusa dalla sua orbita

$$\mu^* = IS \tag{12.1}$$

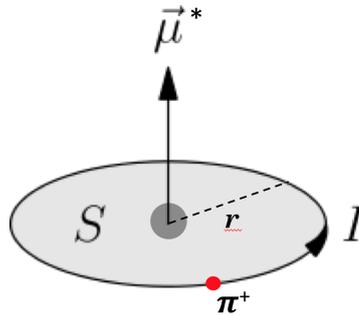
con

$$S = \pi r^2 \simeq 3.1416 \times 10^{-26} \text{ cm}^2 = 3.1416 \times 10^{-30} \text{ m}^2$$

$$I = q_\pi \nu \quad \text{essendo} \quad \nu = c/(2\pi r) \simeq 0.4771 \times 10^{23} \text{ s}^{-1}$$

Si ha dunque, per il modulo del momento magnetico calcolato secondo il modellino ipotizzato

$$\begin{aligned} \mu^* &= IS \simeq 1.621 \times 10^{-19} \times 0.4771 \times 10^{23} \times 3.1416 \times 10^{-30} \simeq \\ &\simeq 2.43 \times 10^{-26} \text{ J} \cdot \text{T}^{-1} \end{aligned} \tag{12.2}$$



Confrontandolo col valore noto misurato si ha

$$\frac{\mu_p}{\mu^*} \simeq \frac{2.793 \times 5.051 \times 10^{-27}}{2.43 \times 10^{-26}} \simeq 0.58 \quad (12.3)$$

Questo semplice modellino sovrastima del 60% circa il valore effettivamente misurato.

12.1.2 Esercizio 2 - 2:

Si determini l'energia di legame di una particella α nel nucleo di ${}^{20}_{10}\text{Ne}$ sapendo che l'energia media di legame di un nucleone nel nucleo di ${}^4_2\text{He}$ è pari a -7.08 MeV.

Cosa si può dire, in base al risultato ottenuto, in merito alla possibilità per il ${}^{20}_{10}\text{Ne}$ di decadere α ?

Soluzione:

Il nucleo di ${}^{20}_{10}\text{Ne}$ e quello di ${}^{16}_8\text{O}$ che si ottiene dal precedente togliendogli due protoni e due neutroni, si trovano entrambi in quella zona dove l'energia di legame di un nucleo può essere ben rappresentata dalla formula di Weizsäcker:

$$\begin{aligned} B_0(A, Z) &= B_V(A) + B_S(A) + B_C(A, Z) + B_{sim}(A, Z) + B_{ac}(A, Z) = \\ &= b_V A + b_S A^{2/3} + b_C \frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}} + b_{sim} \frac{(A-2Z)^2}{A} + b_{ac} \frac{\delta(A, Z)}{A} \end{aligned}$$

con,

$$\begin{cases} b_V = -15.56 & \text{MeV} \\ b_S = +17.23 & \text{MeV} \\ b_C = +0.697 & \text{MeV} \\ b_{sim} = +19.1 & \text{MeV} \\ b_{ac} = +135.0 & \text{MeV} \end{cases}$$

L'analisi fenomenologica delle sequenze isobariche suggerisce di porre $\delta(A, Z) = -1$ se N e Z sono entrambi pari, $\delta(A, Z) = 0$ se N e Z sono l'uno pari e

l'altro dispari, o viceversa, e $\delta(A, Z) = +1$ se N e Z sono entrambi dispari. L'energia di legame della particella α è

$$B(\alpha) = 4 \times -7.08 = -28.32 \text{ MeV}$$

Le energie di legame dei nuclei di ${}^{20}_{10}\text{Ne}$ e ${}^{16}_8\text{O}$, calcolate tramite la formula di Weizsäcker tenendo conto che sono entrambi nuclei pari-pari, risultano

$$B({}^{20}_{10}\text{Ne}) = -(161.14 + 6.75) = -167.89 \text{ MeV}$$

$$B({}^{16}_8\text{O}) = -(124.07 + 8.44) = -132.50 \text{ MeV}$$

L'energia di legame di un'ipotetica particella α formatasi entro un nucleo di neon sarebbe quindi data da

$$B({}^{20}_{10}\text{Ne}) - B({}^{16}_8\text{O}) - B(\alpha) = -167.89 + 132.50 + 28.32 = -7.07 \text{ MeV}$$

Essendo negativa non vi è possibilità che la particella α possa attraversare la barriera coulombiana per effetto tunnel ed essere emessa come radioattività α dal neon.

12.1.3 Esercizio 2 - 3:

La differenza in massa fra i due nuclei ${}^{27}_{14}\text{Si}$ e ${}^{27}_{13}\text{Al}$ è di $6.0 \text{ MeV}/c^2$.

Trascurando la differenza di massa fra protone e neutrone si stimi il raggio dei due nuclei.

Soluzione:

${}^{27}_{14}\text{Si}$ e ${}^{27}_{13}\text{Al}$ sono due nuclei speculari di media grandezza e si può ragionevolmente ascrivere quasi tutta la differenza fra le loro masse al diverso contributo di energia potenziale coulombiana.

Supponendo che i due nuclei abbiano simmetria circa sferica e supponendo altresì di poter considerare uniformemente distribuito in tali sfere il contenuto di carica elettrica per ognuno dei due nuclei, si ha che le energie associate alle due distribuzioni di carica per due nuclei speculari sono rispettivamente

$$E_Z = \frac{3}{5} \frac{(Ze)^2}{4\pi\epsilon_0 R} \quad \text{e} \quad E_{(Z-1)} = \frac{3}{5} \frac{[(Z-1)e]^2}{4\pi\epsilon_0 R}$$

con R il raggio della distribuzione sferica e uniforme di carica considerata, che rappresenta un stima del "raggio" di ognuno dei due nuclei.

Osservando che per ${}^{27}_{14}\text{Si}$ e ${}^{27}_{13}\text{Al}$

$$6.0 \text{ MeV} = E_Z - E_{(Z-1)} = \Delta E = \frac{3}{5} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c} \frac{(2Z-1) \hbar c}{R} = \frac{3}{5} \alpha \frac{(2Z-1) \hbar c}{R}$$

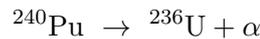
si ottiene

$$R = \frac{1}{10.0} \alpha (2Z-1) \hbar c = \frac{27}{1370} \times 3 \times 10^8 \times 6.582 \times 10^{-22} = 3.89 \times 10^{-15} \text{ m}$$

12.2 Esercizi Capitolo 4

12.2.1 Esercizio 4 - 1: Decadimento α del ^{240}Pu

Il ^{240}Pu decade α secondo lo schema



e le particelle α emesse mostrano uno spettro con due picchi principali associati alle energie cinetiche

$$E_{k,\alpha}^{(1)} \simeq 5.1681 \text{ MeV} \quad E_{k,\alpha}^{(2)} \simeq 5.1236 \text{ MeV}$$

Cosa si può dire in merito alle modalità di decadimento α del ^{240}Pu , dei relativi Q -valori e delle energie cinetiche di rinculo dei nuclei figli, sapendo che le masse degli stati fondamentali dei nuclei coinvolti, espresse in u.m.a., sono rispettivamente

$$\begin{aligned} M(^{240}\text{Pu}) &= 240.053814 \text{ u} \\ M(^{236}\text{U}) &= 236.045568 \text{ u} \\ M(^4\text{He}) &= 4.002602 \text{ u} \end{aligned}$$

Soluzione:

Il fatto che il nuclide genitore mostri uno spettro di decadimento α con più di un picco, suggerisce che il decadimento associato al picco di minor energia cinetica comporti che il nucleo figlio si trova in uno stato eccitato che successivamente decadrà emettendo radiazione elettromagnetica.

Poichè la differenza tra $E_{k,\alpha}^{(1)}$ ed $E_{k,\alpha}^{(2)}$ è inferiore all'1% dei loro rispettivi valori, si desume che di questo stesso ordine di grandezza deva essere l'energia associata alla radiazione elettromagnetica di diseccitazione emessa dal nucleo figlio per diseccitarsi nel caso del decadimento α meno energetico.

Sapendo che $1 \text{ u} \simeq 931.5 \text{ MeV}/c^2$, si desume quindi che la massa del nucleo figlio eccitato sia superiore a quella del nucleo figlio nello stato fondamentale del 2×10^{-7} circa.

Ricordando quanto detto nel paragrafo [5.2](#), dalla seconda delle [5.12](#) si ottiene, per l'energia cinetica di rinculo del nucleo figlio relativamente al decadimento α più energetico

$$E_{k,^{236}\text{U}} = \frac{M(^4\text{He})}{M(^{236}\text{U})} E_{k,\alpha}^{(1)} = 0.0876(5) \text{ MeV}$$

e per quella del nucleo figlio relativamente al decadimento α meno energetico

$$E_{k,^{236}\text{U}^*} = \frac{M(^4\text{He})}{M(^{236}\text{U}^*)} E_{k,\alpha}^{(2)} \approx \frac{M(^4\text{He})}{M(^{236}\text{U})} E_{k,\alpha}^{(2)} = 0.0868(9) \text{ MeV}$$

infatti, in approssimazione non relativistica, dati due nuclei "i" e "j" si ha

$$E_{i,j} = \frac{|\vec{p}_{i,j}|^2}{2m_{i,j}}, \text{ da cui } \frac{E_i}{E_j} = \frac{m_j}{m_i} \text{ e } |\vec{p}_i| = |\vec{p}_j|$$

Per quanto concerne i Q -valori, dalla prima delle [5.12](#) si ha

$$Q_\alpha^{(1)} = \frac{M_\alpha + M_{236\text{U}}}{M_{236\text{U}}} E_k^{(1)} = 5.2557 \text{ MeV}$$

$$Q_\alpha^{(2)} \approx \frac{M_\alpha + M_{236\text{U}}}{M_{236\text{U}}} E_k^{(2)} = 5.2104 \text{ MeV}$$

E l'energia della radiazione di diseccitazione emessa dal nucleo figlio è

$$E_\gamma \approx (Q_\alpha^{(1)} - Q_\alpha^{(2)}) \text{ MeV} = 0.0453 \text{ MeV}$$

coerentemente con quanto trovato sperimentalmente.

12.2.2 Esercizio 4 - 2: Convertitore termoelettrico a plutonio

Il ^{238}Pu decade α , con un tempo di dimezzamento $T_{1/2} \simeq 88.03$ y, rilasciando un'energia cinetica $E = 5.49$ MeV. Il nucleo figlio ^{234}U ha una vita media $\tau_U \simeq 3.5 \times 10^5$ y. L'energia così prodotta può essere convertita in energia elettrica tramite un generatore radiotermico (RTG) e quello che equipaggia la sonda spaziale Voyager 2 ha un'efficienza del 5.5% in questo processo.

Il Voyager 2, lanciato il 20/08/1977, raggiunse la minima distanza da Saturno il 26/08/1981. Saturno dista dal Sole 9.5 U.A., dove 1 U.A. corrisponde alla distanza fra Terra e Sole.

a) Si calcoli con quanto plutonio era stato equipaggiato l'RTG del Voyager 2 sapendo che questo, al momento di massimo avvicinamento a Saturno, disponeva di una potenza elettrica $W_{Sat} = 395$ W.

b) Quale potenza elettrica aveva ancora disponibile il Voyager 2 quando, il 24/08/1989 sorvolò alla minima distanza Nettuno, che dista 30.1 U.A. dal Sole? Quale potenza elettrica ha ancora disponibile oggi Voyager 2?

c) Sapendo che i pannelli solari che equipaggiavano lo Skylab avevano un'area attiva di 730 m² e gli fornivano 10.5 kW, quale area avrebbero dovuto avere pannelli solari equivalenti che avessero equipaggiato Voyager 2, in grado di alimentarlo come ha fatto l'RTG?

Soluzione:

a) Il tempo di dimezzamento $T_{1/2} \simeq 88.03$ y di ^{238}Pu corrisponde ad una vita media

$$\tau_\alpha = T_{1/2}/\ln 2 \simeq 88.03/0.6931 = 127 \text{ y.}$$

Dato che $\tau_\alpha/\tau_U \simeq 3.6 \times 10^{-4} \ll 1$, si può considerare il nucleo figlio ^{234}U come praticamente stabile e trascurare il contributo dei suoi decadimenti al funzionamento del sistema RTG.

Supponendo che l'RTG sia stato caricato di plutonio al momento del lancio del Voyager 2, si associ ad esso il tempo $t_0 = 0$ giorni, e sia $t_1 = 1467$ giorni il tempo associato al sorvolo di Saturno da parte del Voyager 2. Si calcoli ora, tenendo conto dell'efficienza del sistema RTG, il numero $\Delta N(t_1)$ di decadimenti al secondo che garantiscono una potenza di 395 Watt, ricordando che $1 \text{ Watt} = 6.2415 \times 10^{12} \text{ MeV/s}$

$$\Delta N(t_1) = \frac{395 \times 6.2415 \times 10^{12}}{5.49 \times 0.055} \simeq 8.1649 \times 10^{15} \quad (12.4)$$

Lo scopo è però risalire alla massa di plutonio con cui è stato caricato il sistema RTG, ovvero al numero N_0 di atomi di plutonio presenti all'istante t_0 . Si esprime quindi $\Delta N(t_1)$ tenendo conto della [4.1](#), con $\lambda = \tau_\alpha$

$$\begin{aligned} \Delta N(t_1) &= N_0 e^{-t_1/\tau_\alpha} - N_0 e^{-(t_1+1)/\tau_\alpha} = N_0 \left(e^{-t_1/\tau_\alpha} - e^{-t_1/\tau_\alpha} e^{-1/\tau_\alpha} \right) = \\ &= N_0 e^{-t_1/\tau_\alpha} \left(1 - e^{-1/\tau_\alpha} \right) \quad \text{da cui,} \\ N_0 &= \Delta N(t_1) e^{t_1/\tau_\alpha} \left(1 - e^{-1/\tau_\alpha} \right)^{-1} \end{aligned} \quad (12.5)$$

e sostituendo i valori

$$N_0 \simeq 3.37524 \times 10^{25}$$

Quindi, essendo pari a 244.06 g la massa molare del plutonio e ricordando il numero di Avogadro, si ha che la quantità di ^{238}Pu con cui è stato inizialmente caricato il dispositivo RTG ammonta a circa 13.7 kg.

b) Per rispondere alla seconda domanda si ponga $t_2 = 4387$ giorni il tempo associato al sorvolo di Nettuno da parte del Voyager 2. Poichè la potenza disponibile grazie al dispositivo RTG è in qualsiasi momento t_i sempre proporzionale ad $N_0 e^{-t_i/\tau_\alpha} \left(1 - e^{-1/\tau_\alpha} \right)$, si ottiene la potenza disponibile al momento del sorvolo di Nettuno come

$$W_{Net} = W_{Sat} \frac{e^{-t_2/\tau_\alpha}}{e^{-t_1/\tau_\alpha}} \simeq 370.9 \text{ W} \quad (12.6)$$

Similmente, la potenza ancora disponibile al 1 marzo 2018, supponendo immutata l'efficienza del dispositivo RTG, ammonta a circa 296 W.

c) Assumendo ragionevolmente che l'energia luminosa irradiata dal Sole scali come l'inverso del quadrato della distanza dal Sole stesso, detta $A_1 = 730 \text{ m}^2$ l'area attiva delle celle fotovoltaiche che fornivano allo Skylab 10.5 kW a una distanza di 1 U.A. dal Sole, l'area che dovrebbero avere celle equivalenti per fornire a Voyager 2 395 W a 9.5 U.A. (Saturno), equivale ad

$$A_2 = 730 \times \frac{395}{10500} \times 9.5^2 \simeq 2478.5 \text{ m}^2$$

L'area necessaria alla distanza di Nettuno sarebbe invece

$$A_3 = 730 \times \frac{370.9}{10500} \times 30.1^2 \simeq 23361.8 \text{ m}^2$$

quindi circa 9.5 volte maggiore e pari a quella di circa 3.3 campi da calcio.

12.2.3 Esercizio 4 - 3: Radon in un ambiente chiuso

Una sala teatrale con pavimento e soffitto quadrati di 10 m di lato e pareti alte 4 m, non è stata aerata per molti giorni. Misurando in essa l'attività per unità di volume del ^{222}Rn si trova il valore di 100 Bq/m^3 .

a) Si esprima l'attività del ^{222}Rn emesso dal calcestruzzo di pareti, pavimento e soffitto, in funzione delle vite medie del Radon stesso e del capostipite (^{238}U) della catena di decadimenti da cui esso proviene.

b) Si calcoli la concentrazione di ^{238}U nel calcestruzzo tenendo conto che lo spessore attraverso il quale il prodotto di decadimento ^{222}Rn può effettivamente diffondere entro l'ambiente è di 1.5 cm.

Soluzione:

a) Osservando la famiglia radioattiva dell' ^{238}U , riportata in figura 4.3 assieme all'indicazione delle vite medie dei vari nuclidi figli, si nota che la vita media τ_1 del capostipite ^{238}U è molto maggiore di quelle di tutti i prodotti intermedi fino al ^{222}Rn compreso. Supponendo altresì che l' ^{238}U sia presente nei minerali del calcestruzzo da tempi maggiori a quelli caratteristici delle vite medie dei prodotti intermedi, si può considerare di essere nella condizione di "equilibrio secolare" per cui la quantità di ^{222}Rn presente ad un certo istante t è legata a quella del capostipite ^{238}U nello stesso istante dalla relazione

$$N_1(t) \lambda_1 = N_2(t) \lambda_2$$

dove l'indice "1" rappresenta ^{238}U e l'indice "2" il ^{222}Rn , con $\lambda_1^{-1} = \tau_1 \simeq 4.5 \times 10^9 \text{ y}$ (pari a circa $1.41912 \times 10^{17} \text{ s}$), e $\lambda_2^{-1} = \tau_2 \simeq 3.8 \text{ d}$.

Ricordando poi che l'attività $\mathcal{A}_2(t)$ del ^{222}Rn è definita come

$$\mathcal{A}_2(t) = \lambda_2 N_2(t)$$

si ha immediatamente

$$\mathcal{A}_2(t) = \lambda_1 N_1(t) = \lambda_1 N_1(0) e^{-\lambda_1 t}$$

b) Il volume di calcestruzzo efficace nell'emettere per diffusione ^{222}Rn nella sala è pari a $V_0 = (2 \times 10 \times 10 + 4 \times 4 \times 10) \times 0.015 = 5.40 \text{ m}^3$.

Il volume della sala è invece $V_1 = 10 \times 10 \times 4 = 400 \text{ m}^3$, per cui l'attività del ^{222}Rn in essa è pari ad $\mathcal{A}_2 = 100 \times 400 = 4 \times 10^4 \text{ Bq}$, che per la

condizione di equilibrio secolare deve coincidere con quella dell' ^{238}U presente nel calcestruzzo di pareti, pavimento e soffitto. La sua concentrazione nel calcestruzzo sarà quindi data da

$$\rho_{^{238}\text{U}} = \frac{N_1(t)}{5.4} = \frac{A_2(t)}{5.4 \times \lambda_1} \simeq \frac{4 \times 10^4}{5.4 \times 7.04662 \times 10^{-18}} \text{ atomi/m}^3$$

cioè $\rho_{^{238}\text{U}} \simeq 1.0512 \times 10^{21} \text{ atomi/m}^3$, che essendo pari a 238.05 g la massa di una mole di ^{238}U , equivale a circa 0.42 g/m^3 .

12.2.4 Esercizio 4 - 4: Attività specifica di un preparato con ^{89}Sr

Lo ^{89}Sr decade β con un tempo di dimezzamento di 1224 ore.

Quanto ne deve essere aggiunto a 2 mg di Sr stabile per ottenere un preparato con un'attività specifica iniziale di 2740 Ci/g ?

Che attività mostrerà il preparato dopo 35 giorni ?

Soluzione:

Si ricordi che:

$$1 \text{ Ci} = 3.7 \times 10^{10} \text{ bq}$$

$$T_{1/2} = \frac{1}{\lambda} \ln 2 = \tau \ln 2 = 4.4064 \times 10^6 \text{ s}$$

da cui:

$$\tau = \frac{4.4064 \times 10^6}{\ln 2} \text{ s} \simeq 6.3571 \times 10^6 \text{ s}$$

Si indichino con m_0 la massa di stronzio non attivo presente nel preparato ($m_0 = 2 \text{ mg}$), e con Δm la massa di ^{89}Sr che va aggiunta al preparato e che va determinata, per cui la massa totale del preparato è $m = m_0 + \Delta m$.

Detta $\mathcal{A}_{sp}(t=0)$ l'attività specifica iniziale si ha

$$\mathcal{A}_{sp}(t=0) = 2740 \text{ Ci/g} \simeq 1.0138 \times 10^{14} \text{ bq/g}$$

con

$$\mathcal{A}_{sp}(t=0) = \frac{\mathcal{A}(t=0)}{m} = \frac{\mathcal{A}(t=0)}{m_0 + \Delta m} = \frac{N_0 \lambda}{m_0 + \Delta m}$$

dove N_0 rappresenta il numero di nuclei di ^{89}Sr che vanno aggiunti al preparato inizialmente per soddisfare le condizioni del problema. Si ha anche, detto N_A il numero di Avogadro,

$$N_0 = \frac{\Delta m}{A} N_A$$

con $A = 89$ il numero di massa dello ^{89}Sr , ma anche il suo peso atomico in g mol^{-1} .

Sostituendo si ha dunque

$$\mathcal{A}_{sp}(t=0) = \frac{N_0 \lambda}{m_0 + \Delta m} = \frac{\Delta m \lambda N_A}{A(m_0 + \Delta m)}$$

e ricavando Δm

$$\Delta m = \frac{m_0 A \mathcal{A}_{sp}(t=0)}{\lambda N_A - A \mathcal{A}_{sp}(t=0)} = \frac{m_0 A \mathcal{A}_{sp}(t=0)}{T_{1/2}^{-1} N_A \ln(2) - A \mathcal{A}_{sp}(t=0)}$$

Sostituendo infine i valori numerici nelle corrette unità di misura si ottiene

$$\begin{aligned} \Delta m &\simeq \frac{(2 \cdot 10^{-3} \text{ g})(89 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1})(1.0138 \cdot 10^{14} \text{ bq/g})}{(4.406 \cdot 10^6 \text{ s})^{-1}(0.69315)(6.0221 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}) - (89 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1})(1.0138 \cdot 10^{14} \text{ bq/g})} \\ &\simeq 2.1 \cdot 10^{-4} \text{ g} \end{aligned}$$

Tenendo conto che un intervallo $\Delta t = 35$ giorni equivale a $\Delta t = 3.024 \times 10^6$ s si ottiene, per l'attività residua del preparato dopo 35 giorni dalla preparazione

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\Delta t = 3.024 \times 10^6 \text{ s}) &= \mathcal{A}(t=0) e^{-\Delta t/\tau} = \\ &= \frac{N_0}{\tau} e^{-\Delta t/\tau} = \frac{N_A \Delta m}{A\tau} e^{-\Delta t/\tau} = \\ &\simeq \frac{(6.0221 \cdot 10^{23})(2.1 \cdot 10^{-4})}{(89)(6.3571 \cdot 10^6)} e^{-3.024 \cdot 10^6 / 6.3571 \cdot 10^6} = \\ &\simeq 2.235 \cdot 10^{11} \times 0.621 \simeq 1.39 \cdot 10^{11} \text{ bq} \end{aligned}$$

12.2.5 Esercizio 4 - 5: Vite medie dei componenti di una miscela

Si ha un preparato costituito da una miscela di due diverse sostanze radioattive completamente indipendenti l'una dall'altra e si misura sperimentalmente la distribuzione dei tempi d'attesa fra la rivelazione di due suoi successivi prodotti di decadimento. Si suppone che la misura sia stata eseguita con un sistema di rivelazione molto efficiente ma non in grado di riconoscere i prodotti di decadimento di una sostanza da quelli dell'altra.

Si delinei nell'ambito di quali ipotesi e come si potrebbe in pratica cercare di risalire ai valori delle vite medie τ_1 e τ_2 e delle abbondanze iniziali $N_1(0)$ e $N_2(0)$ delle due diverse sostanze radioattive che compongono la miscela che costituisce il preparato.

Soluzione:

Detto $N_*(t) = N_1(t) + N_2(t)$ il numero totale di nuclei radioattivi del preparato non ancora decaduti ad un qualunque istante $t > 0$, con

$$N_1(t) = N_1(0) e^{-t/\tau_1} \quad \text{ed} \quad N_2(t) = N_2(0) e^{-t/\tau_2}$$

si ha:

$$N_*(0) = N_1(0) + N_2(0) \quad \text{ed} \quad N_*(t) = N_1(0) e^{-t/\tau_1} + N_2(0) e^{-t/\tau_2}$$

Si considerino tre casi estremi:

$$\tau_1 \ll \tau_2 \quad ; \quad \tau_1 \simeq \tau_2 \simeq \tau \quad ; \quad \tau_1 \gg \tau_2$$

Si indichi con $N_*^{(sp)}(t_i)$ il numero di eventi raccolti nell' i -mo canale dell'istogramma sperimentale, compreso tra gli istanti t_i e $t_i + \Delta t$.

- Si cominci con l'analizzare il secondo caso: $\tau_1 \simeq \tau_2 \simeq \tau$ e si consideri il logaritmo naturale di $N_*(t)$

$$\begin{aligned} \ln N_*(t) &= \ln [N_1(0) e^{-t/\tau_1} + N_2(0) e^{-t/\tau_2}] \\ &\simeq \ln [N_1(0) e^{-t/\tau} + N_2(0) e^{-t/\tau}] \\ &= \ln \{e^{t/\tau} [N_1(0) + N_2(0)]\} \\ &= -\frac{t}{\tau} + \ln [N_1(0) + N_2(0)] \end{aligned} \tag{12.7}$$

che mostra una dipendenza quasi lineare di $\ln N_*(t)$ da t .

Ponendo in scala semilogaritmica $N_*^{(sp)}(t_i)$ si nota che il suo profilo dovrebbe poter essere approssimato da un andamento rettilineo con pendenza $-1/\tau$ e intercetta sull'asse delle ordinate pari a $\ln [N_1(0) + N_2(0)]$.

Effettuando quindi un "fit a retta" si riescono a stimare $\tau \simeq \tau - 1 \simeq \tau_2$ e la somma $[N_1(0) + N_2(0)]$ delle abbondanze iniziali, ma non le singole abbondanze $N_1(0)$ e $N_2(0)$.

- Si supponga ora che sia $\tau_2 \gg \tau_1$.

In tal caso ci si aspetta che per tempi $t \gg \tau_1$ la legge di decadimento sia dominata dai prodotti di decadimento della sostanza 2, come si vede anche in figura ...

Se quindi si effettua un fit sui valori di $\ln [N_*^{(sp)}(t_i)]$ per valori di $t \gg \tau_1$, ovvero per $t \geq t'$ con $t' \gg \tau_1$, si dovrebbe ottenere una legge

$$N_2^{(fit)}(t) = N_2^{(fit)}(0) e^{-t/\tau_2^{(fit)}}$$

in grado di riprodurre la corretta legge di decadimento $N_2(0) e^{-t/\tau_2}$ tanto meglio quanto più vale $t' \gg \tau_1$, ovviamente sempre che per $t \geq t'$ ci siano a disposizione abbastanza valori sperimentali sui quali fare un fit affidabile.

In quest'ipotesi si può dunque sottrarre a $N_*^{(sp)}(t_i)$ per ogni valore di t_i , quanto dato da $N_2^{(fit)}(t_i)$, e quanto resta, $N_1^*(t_i)$, dovrebbe essere compatibile con la distribuzione dovuta ai decadimenti della sola sostanza 1:

$$[N_*^{(sp)}(t_i) - N_2^{(fit)}(t_i)] \propto N_1^*(t_i) \approx N_1(t_i)$$

Effettuando quindi un fit sui valori rappresentati da $N_1^*(t_i)$ si ottengono stime anche per $N_1(0)$ e per τ_1 .

- Il caso $\tau_2 \ll \tau_1$ è chiaramente simmetrico a quello ora discusso.

Si osservi anche che un ulteriore fattore che influenza quanto bene la procedura indicata permetta di risalire a stime di $N_1(0)$, $N_2(0)$, τ_1 , τ_2 è il rapporto N_1/N_2 , peraltro non conoscibile a priori.

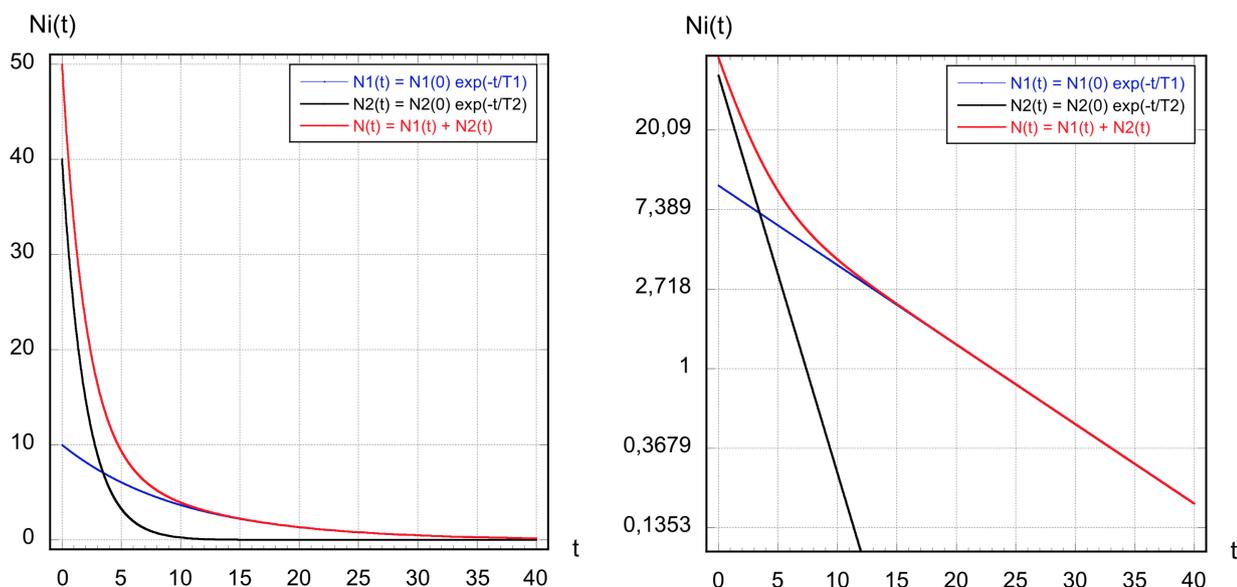


Figura 12.1: A sinistra, in scala lineare, gli andamenti di $N_1(t)$, $N_2(t)$ e la loro somma, nell'ipotesi che $N_1(0) = 10$, $N_2(0) = 40$, $\tau_1 = 10$ e $\tau_2 = 10$; a destra lo stesso in scala semi-logaritmica.

12.2.6 Esercizio 4 - 6: Intensità di un fascio di neutroni in funzione della distanza dalla sorgente

Si ha un fiotto di neutroni di energia cinetica E_n pari a 0.025 eV che percorre un certo tragitto. Quale frazione di neutroni sarà decaduta dopo 5.0 m di percorso?

E se i neutroni fossero relativistici?

Soluzione:

Si osservi come prima cosa che dato il valore di E_n i neutroni considerati sono termici e quindi si possono utilizzare le formule non-relativistiche per risolvere il problema. Si ha dunque

$$E_n = \frac{1}{2} m_n v_n^2 \quad \text{da cui: } v_n = \sqrt{\frac{2E_n}{m_n}}$$

e ricordando che $m_n \simeq 9.39565 \times 10^8 \text{ eV}/c^2$, con $c \simeq 2.9979 \times 10^8 \text{ m/s}$, si ha

$$v_n \simeq 2.187 \times 10^3 \text{ m/s}$$

il che riconferma la "termicità" dei neutroni considerati.

Il tempo Δt loro necessario per percorrere il tragitto $l = 5 \text{ m}$ è quindi dato da

$$\Delta t_l = \frac{l}{v_n} = \frac{5}{2187} \simeq 0.0022862 \text{ s}$$

L'espressione che dá il numero $N(t)$ di neutroni liberi presenti ad un certo istante t , sapendo che ce n'erano $N(0)$ all'istante iniziale $t = 0$, è

$$N(t) = N(0) e^{-\frac{t}{\tau_n}}$$

La quantità $\Delta N(t_l)$ di neutroni decaduti dopo un tempo $\Delta t_l = (t_l - 0) = t_l$, a partire dall'istante iniziale è quindi data da

$$N(0) - N(t) = \Delta N(t_l) = N(0) (1 - e^{-t_l/\tau_n})$$

Quindi la frazione di neutroni decaduta dopo un certo tempo t_l è

$$f_n(t_l) = \frac{\Delta N(t_l)}{N(0)} = (1 - e^{-t_l/\tau_n})$$

Il fatto di non essere in condizioni di "regime relativistico" permette sostanzialmente di considerare, per la vita media τ_n del neutrone, il suo valore a riposo, ovvero $\tau_n = 886,8 \text{ s}$. Sostituendo i valori dati o calcolati per t_l e τ_n si ha infine

$$f_n(t_l) \simeq (1 - 0.99999742) \simeq 2.58 \times 10^{-6}$$

Nel caso in cui i neutroni fossero relativistici si dovrebbero usare le corrette formule relativistiche, per cui

$$E_n = \gamma m_n c^2, \quad \gamma = \frac{E_n}{m_n c^2} = \frac{1}{\sqrt{1 - v_n^2/c^2}}$$

da cui

$$1 - \frac{v_n^2}{c^2} = \frac{m_n^2 c^4}{E_n^2} \quad \Leftrightarrow \quad v_n = c \sqrt{1 - \frac{m_n^2 c^4}{E_n^2}}$$

ottenendo

$$\Delta t_\ell(\text{osserv.}) = \frac{\ell}{c \sqrt{1 - \frac{m_n^2 c^4}{E_n^2}}}$$

$$\text{e infine} \quad f_n(t_\ell) = \left[1 - e^{-\Delta t_\ell(\text{osserv.})/\gamma \tau_n} \right]$$

12.2.7 Esercizio 4 - 7: Vita media del ^{239}Pu

La vita media per decadimento α del ^{239}Pu è stata determinata immergendo in azoto liquido una sfera di ^{239}Pu di massa 120.1 g, in modo che lo strato d'azoto che circondava la sfera immersa fosse sufficiente a trattenere tutte le particelle α emesse, e misurando conseguentemente il tasso di evaporazione dell'azoto liquido. Si è trovato che il tasso di evaporazione corrispondeva a una potenza $W_{ev} = 0.231 \text{ W}$.

Si calcoli il tempo di dimezzamento del ^{239}Pu , tenendo conto che l'energia cinetica delle particelle α di decadimento è $E_\alpha = 5.144 \text{ MeV}$.

Soluzione:

Si ricordino i seguenti fattori di conversione:

$$1 \text{ MeV} = 1.60206 \times 10^{-13} \text{ J}$$

$$1 \text{ u.m.a.} = 1.66 \times 10^{-24} \text{ g}$$

Il decadimento avviene secondo lo schema



Per valutare il tasso di decadimenti dN/dt , da cui si dedurrà poi il tempo di dimezzamento $T_{1/2} = \tau \times \ln 2$, nota la potenza W_{ev} erogata dai decadimenti e associata al tasso di evaporazione, resta da determinare l'energia totale E_{tot} erogata, e assorbita dall'azoto liquido, per ogni singolo decadimento α . A tale scopo bisogna tenere conto anche dell'energia cinetica E_U associata al rinculo del nucleo di ^{235}U dopo il decadimento α del "genitore" ^{239}Pu .

Per calcolarla si ricordi che la conservazione dell'impulso nel C.M. dà:

$$|\vec{p}_U| = |\vec{p}_\alpha| \quad (12.9)$$

Per cui

$$E_U = \frac{p_U^2}{2M_U} = \frac{p_\alpha^2}{2M_U} = \frac{2M_\alpha E_\alpha}{2M_U} = \frac{4}{235} E_\alpha \quad (12.10)$$

esprimendo le masse in unità di masse atomiche. Quindi

$$E_{tot} = E_\alpha + E_U = \frac{4 + 235}{235} E_\alpha = 5.232 \text{ MeV} \quad (12.11)$$

Per il numero N di nuclei di ^{239}Pu presenti nella massa di 120.1 g si ha

$$N = \frac{120.1}{239 \times 1.66 \times 10^{-24}} = 3.027 \times 10^{23} \quad (12.12)$$

Per il tasso di decadimenti dN/dt si ha, come rapporto fra la potenza totale erogata e l'energia totale associata ad ogni singolo decadimento

$$\frac{dN}{dt} = \frac{0.231}{5.232 \times 1.60206 \times 10^{-13}} = 2.756 \times 10^{11} \text{ s}^{-1} \quad (12.13)$$

Per il tempo di dimezzamento cercato del ^{239}Pu si ha quindi

$$\begin{aligned} T_{1/2} &= \frac{N \times \ln 2}{dN/dt} = \frac{3.027 \times 10^{23} \times 0.6931}{2.756 \times 10^{11}} = \\ &= 7.61 \times 10^{11} \text{ s} \simeq 2.41 \times 10^4 \text{ y} \end{aligned} \quad (12.14)$$

12.2.8 Esercizio 4 - 8:

Il $^{210}_{84}\text{Po}$ ha un tempo di dimezzamento per decadimento α pari a $T_{1/2} = 138$ giorni. Sapendo che l'energia cinetica della particella α prodotta in ogni suo decadimento è pari a $E_{k,\alpha} = 5.3$ MeV, e che il nucleo figlio risultante è praticamente sempre prodotto nel suo stato fondamentale, si deduca la quantità di calore generata da 5 mg di ^{210}Po in un tempo pari alla sua vita media.

Si esprimano le masse in gioco come il prodotto fra il numero di nucleoni costituenti ogni struttura considerata ed il valore dell'unità di massa atomica $m_U \simeq 931.49$ MeV/ c^2 .

Si ricordi che $1 \text{ J} \simeq 6.242 \times 10^{18} \text{ eV}$.

Soluzione:

Il decadimento considerato è: $^{210}_{84}\text{Po} \rightarrow ^{206}_{82}\text{Pb} + ^4_2\text{He}$, e si conosce l'energia cinetica della particella α emessa: $E_{k,\alpha} = 5.3$ MeV.

Per la descrizione del moto della particella α e del nucleo di rinculo si può in questo caso ricorrere all'approssimazione non relativistica e in base alla conservazione dell'impulso l'energia cinetica del nucleo prodotto nel decadimento è quindi esprimibile come

$$E_{k,nuc} \simeq E_{k,\alpha} \frac{m_\alpha}{M_{nuc}}$$

Conseguentemente, l'energia complessiva liberata in un decadimento radioattivo del tipo considerato è data da

$$E_\alpha \equiv E_{k,\alpha} + E_{k,nuc} \simeq E_{k,\alpha} \left(1 + \frac{m_\alpha}{M_{nuc}} \right) \simeq 5.3 \cdot \frac{210}{206} \text{ MeV} \simeq 5.4 \text{ MeV}$$

Il numero medio $n_d(\tau)$ di decadimenti che si verificano in un intervallo di tempo pari alla vita media $\tau = (T_{1/2}/\ln 2) \simeq 199$ giorni, del nucleo $^{210}_{84}\text{Po}$ è dato da

$$n_d(\tau) = N_0 - N(\tau) = N_0 (1 - e^{-\lambda\tau}) = N_0 \left(1 - \frac{1}{e} \right)$$

dove N_0 è il numero di nuclei radioattivi presenti all'istante iniziale ($t = 0$), con $N(t)$ il numero di nuclei radioattivi presenti al generico istante t e $\lambda =$

$1/\tau$ la costante di decadimento del nucleo ${}_{84}^{210}\text{Po}$.
 N_0 è a sua volta dato da

$$N_0 = N_A \frac{m_{\text{Po}}}{A_{\text{Po}}}$$

con N_A il numero di Avogadro, $m_{\text{Po}} = 5 \text{ mg}$ la massa di ${}_{84}^{210}\text{Po}$ isotopicamente puro inizialmente presente e $A_{\text{Po}} \simeq 210 \text{ g mol}^{-1}$ è il peso atomico dell'isotopo radioattivo considerato.

La quantità di calore $Q(\tau)$ prodotta nell'intervallo temporale compreso fra $t = 0$ e $t = \tau$ è quindi data da

$$\begin{aligned} Q(\tau) &= n_d(\tau) E_\alpha = N_0 \left(1 - \frac{1}{e}\right) E_\alpha = N_A \frac{m_{\text{Po}}}{A_{\text{Po}}} \left(1 - \frac{1}{e}\right) E_\alpha \simeq \\ &\simeq 6.022 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1} \frac{5 \times 10^{-3} \text{ g}}{210 \text{ g mol}^{-1}} \left(1 - \frac{1}{e}\right) \times 5.4 \text{ MeV} \simeq \\ &\simeq 4.9 \times 10^{19} \text{ MeV} \simeq \\ &\simeq 7.9 \times 10^6 \text{ J} \end{aligned}$$

12.2.9 Esercizio 4 - 9:

Si consideri un muone prodotto nell'atmosfera, all'altezza di 8.5 km, dall'interazione fra un raggio cosmico primario e l'atmosfera stessa. Sapendo che dopo prodotto il muone viaggia verso il suolo inclinato di 18 gradi rispetto alla verticale con un impulso di 4.8 GeV/c, e trascurando ogni possibile interazione significativa tra il muone e l'atmosfera, si calcoli la probabilità che esso raggiunga il suolo prima di decadere.

Si ricordi che la vita media del muone è $\tau_\mu \simeq 2.2 \mu\text{s}$ e che la sua massa è $m_\mu \simeq 106 \text{ MeV}/c^2$.

Soluzione:

Un muone, una volta prodotto alla quota z , per giungere al suolo con traiettoria rettilinea inclinata di un angolo ϑ_μ rispetto alla verticale, percorre un tragitto di lunghezza

$$\Delta z_0 = \sqrt{z^2 (1 + \text{tg}^2 \vartheta_\mu)} = \frac{z}{\cos \vartheta_\mu}$$

Lo spazio s percorso dal muone in funzione del suo impulso è dato da

$$s = \gamma v t = \frac{m_\mu \gamma v}{m_\mu} t = \frac{p_\mu}{m_\mu} t$$

Il tempo necessario al muone per raggiungere il suolo nel proprio sistema di riferimento è quindi

$$t_0 = \frac{\Delta z_0 m_\mu}{p_\mu} = \frac{m_\mu z}{p_\mu \cos \vartheta_\mu}$$

La probabilità P che il muone raggiunga il suolo è data dalla probabilità che decada solo dopo aver percorso almeno una distanza pari a Δz_0 , quindi

$$\begin{aligned}
 P &= \frac{\int_{t_0}^{+\infty} e^{-t/\tau_\mu} dt}{\int_0^{+\infty} e^{-t/\tau_\mu} dt} = \frac{-\tau_\mu [e^{-t/\tau_\mu}]_{t_0}^{+\infty}}{-\tau_\mu [e^{-t/\tau_\mu}]_0^{+\infty}} = e^{-\frac{m_\mu z}{\tau_\mu p \cos\vartheta_\mu}} = \\
 &\simeq e^{\left[-\frac{106 \text{ MeV}/c^2 \times 8.5 \times 10^3 \text{ m}}{2.2 \times 10^{-6} \text{ s} \times 4.8 \times 10^3 \text{ MeV}/c^2 \times 0.951} \right]} = \\
 &\simeq e^{\left[-\frac{89.72 \times 10^6 \text{ m}}{c \text{ s}} \right]} \simeq e^{-0.299} \simeq 0.74
 \end{aligned}$$

La probabilità che il muone raggiunga il suolo prima di decadere è quindi del 74%, nell'ipotesi che le sue interazioni con i gas dell'atmosfera siano \approx trascurabili.

12.2.10 Esercizio 4 - 10:

Un fascio di muoni percorre un anello di raggio $r = 14 \text{ m}$, sottoposto a un campo magnetico uniforme di intensità $B = 0.5 \text{ T}$, orientato ortogonalmente al piano dell'anello.

Si calcolino l'impulso dei muoni, il loro periodo di rivoluzione e la frazione di essi che decade nell'arco di tempo di un periodo.

A quanto si riduce l'intensità iniziale I_0 del fascio di muoni dopo 100 giri nell'anello?

(Si ricordi che la massa m_μ di un muone è pari a $105 \text{ MeV}/c^2$, e che la sua vita media τ_μ vale $2.2 \times 10^{-6} \text{ s}$)

Soluzione:

- Impulso -

Impostando l'uguaglianza tra forza centripeta e forza di Lorentz sul muone, e ricordando l'equivalenza Joule $\%$ eV, si ottiene $p = 2.1 \text{ GeV}/c$.

- Periodo di rivoluzione -

Osservando che un muone da $2.1 \text{ GeV}/c$ è praticamente relativistico e che quindi la sua velocità è praticamente pari a c , si trova il periodo banalmente come $T = \frac{2\pi r}{c}$ per cui $T = 2.9 \times 10^{-7} \text{ s}$.

Si può anche partire da $p = m_\mu \gamma v$, ricordando che $\gamma = 1/\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$, per

ottenere $v = \sqrt{\frac{p^2/m_\mu^2}{1 - p^2/m_\mu^2 c^2}}$, da cui $v/c \simeq 0.99875 c$.

- Frazione di μ che decadono nell'arco di un periodo T -

Il numero $N(t)$ di muoni presenti al tempo t è dato dalla legge $N(t) = N_0 e^{-t/\tau_\mu}$.

Detta $f(T)$ la frazione di muoni che decade in un periodo T si ha:

$$f(T) = [N(t) - N(t + T)]/N(t) = (1 - e^{-T/\tau}).$$

Ma la vita media da considerarsi è quella τ_μ^* dilatata del fattore γ dei muoni di impulso p , cioè $\gamma = \sqrt{1 + p^2/m_\mu^2 c^2}$. Per muoni da 2.1 GeV/c si ha $\gamma \simeq 14.82$ e quindi $\tau_\mu^* \simeq 3.26 \times 10^{-5}$ s.

Se ne deduce quindi: $f(T) \simeq 0.0088$ ovvero lo 0.88%.

Detta ora I_0 l'intensità iniziale ($t = 0$) del fascio di muoni, dopo un giro nell'anello essa si sarà ridotta a

$$I_0^{(1)} = I_0[1 - f(t)] = I_0(1 - 0.0088)$$

Dopo n giri nell'anello l'intensità residua è quindi

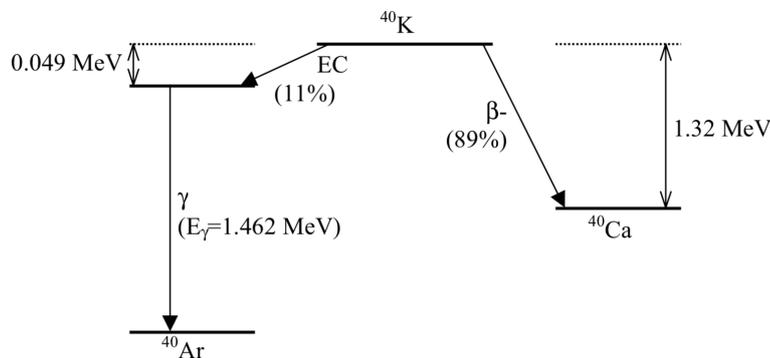
$$I_0^{(n)} = I_0[1 - f(t)]^n$$

che per $n = 100$ da': $I_0 \simeq 0.431 \times I_0$

12.2.11 Esercizio 4 - 11:

Un importante nucleo radioattivo non appartenente a catene di decadimenti in cascata è l'isotopo ^{40}K del potassio, presente in molti minerali utilizzati come materiali per costruzioni, oltre che in alcuni frutti come le banane.

Esso decade β^- e per cattura elettronica K secondo lo schema



Sapendo che il tempo di dimezzamento del ^{40}K è $T^{1/2} = 1.27 \times 10^9$ anni,

che l'abbondanza naturale di tale isotopo del potassio è pari allo 0.0118 %, e che la composizione isotopica del potassio naturale è $\sim 93\%$ di ^{39}K e $\sim 7\%$ di ^{41}K , si calcoli l'attività specifica del potassio naturale.

Soluzione:

Il tempo di dimezzamento del ^{40}K , pari a $T^{1/2} = 1.27 \times 10^9$ anni $\simeq 4.01 \times 10^{16}$ s è così lungo a confronto delle scale temporali direttamente accessibili sperimentalmente che l'attività \mathcal{A} del ^{40}K può con buona approssimazione essere considerata costante.

Detti $\lambda = \ln 2 / T^{1/2}$ la costante di decadimento del ^{40}K ed N il numero di isotopi di ^{40}K in un campione naturale di potassio di massa m , l'attività specifica cercata a è

$$a \equiv \frac{\mathcal{A}}{m} = \frac{\lambda N}{m}$$

essendo

$$N = N_A \frac{m^*}{A} = N_A \frac{f m}{A}$$

con N_A il numero di Avogadro, m^* la massa di ^{40}K presente in un campione naturale di potassio di massa m , $f = 0.0118 \%$ la frazione di ^{40}K presente nel campione considerato, essendo $A = (39 \times 0.93 + 41 \times 0.07) \text{ g mol}^{-1}$ il peso atomico del potassio nella sua composizione naturale ($\sim 93 \%$ di ^{39}K , $\sim 7 \%$ di ^{41}K).

Per l'attività specifica a del potassio naturale si ha quindi

$$\begin{aligned} a &= \frac{\ln 2 N_A f m}{m A T^{1/2}} = \frac{\ln 2 N_A f}{A T^{1/2}} \simeq \\ &\simeq \frac{(6.022 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1})(1.18 \times 10^{-4})}{(39.14 \text{ g mol}^{-1})(4.01 \times 10^{16} \text{ s})} \simeq \\ &\simeq 31.4 \text{ s}^{-1} \text{ g}^{-1} = 31.4 \text{ Bq g}^{-1} \end{aligned}$$

per cui l'attività specifica del potassio naturale è pari a circa 0.85 nCi g^{-1} .

12.2.12 Esercizio 4 - 12:

Si inietta nel flusso sanguigno di una persona una piccola quantità di una soluzione contenente ^{24}Na , che decade β^- con $T_{1/2} = 14.96 \text{ h}$, e un'attività iniziale $A_0 = 2.00 \times 10^3 \text{ Bq}$.

Prelevando alla stessa persona, dopo 5 ore, un campione di sangue di 1 cm^3 , l'attività in esso riscontrata risulta $A = 16 \text{ min}^{-1}$.

Qual'è il volume sanguigno totale della persona?

Soluzione:

Si ricordi che $T_{1/2} = \tau \ln 2$ e che per l'attività si ha

$$A(t) = \left| \frac{dN}{dt} \right| = N(t)\lambda = N_0\lambda e^{-\lambda t} = A_0 e^{-\lambda t} \quad (12.15)$$

Indicando con Δt l'intervallo di 5 ore dopo il quale si preleva il sangue alla persona si ha dunque: $A(\Delta t) = A_0 e^{-\lambda \Delta t}$.

Sia poi $a(\Delta t) = A(\Delta t)/V$ l'attività per unità di volume sanguigno, da cui si ottiene:

$$V = \frac{A(\Delta t)}{a(\Delta t)} = \frac{A_0}{a(\Delta t)} e^{-\lambda \Delta t} = \frac{A_0}{a(\Delta t)} e^{-\frac{\Delta t \ln 2}{T_{1/2}}} \quad (12.16)$$

Sostituendo opportunamente i valori forniti nel testo, tenuto conto che $a = 16 \text{ min}^{-1} \simeq 0.267 \text{ s}^{-1} \text{ cm}^{-3}$, si ha:

$$V \simeq \frac{2.00 \times 10^3}{0.267} e^{-\frac{5 \ln 2}{14.96}} \simeq 5.94 \times 10^3 \text{ cm}^3 = 5.94 \text{ l} \quad (12.17)$$

12.3 Esercizi Capitolo 5

12.3.1 Esercizio 5 - 1:

Si ha un nucleo pesante di massa M^* , inizialmente a riposo nel sistema di riferimento del Laboratorio, che si diseccita verso lo stato fondamentale di massa M emettendo un fotone γ .

Si determini in seconda approssimazione l'energia E_γ del fotone.

Si immagini una possibile tecnica per sopprimere quasi totalmente lo shift δE_γ in energia dovuto alla conservazione dell'impulso.

Soluzione:

Si indica con ϵ la differenza in energia tra i livelli energetici fondamentale ed eccitato del nucleo, per cui:

$$M^*c^2 = Mc^2 + \epsilon \quad (12.18)$$

Si supponga ragionevolmente che sia

$$\frac{\epsilon}{Mc^2} \ll 1 \quad (12.19)$$

(Tipicamente le transizioni nucleari producono γ con energie dell'ordine 0.1 ÷ 1 MeV).

Si ha quindi

$$Mc^2 + \epsilon = E_\gamma + \sqrt{M^2c^4 + E_\gamma^2} \simeq E_\gamma + Mc^2 + \frac{E_\gamma^2}{2Mc^2} \quad (12.20)$$

Si assume inoltre che sia ragionevolmente $\epsilon \approx E_\gamma$, per cui

$$E_\gamma \simeq \epsilon - \frac{E_\gamma^2}{2Mc^2} \simeq \epsilon - \frac{\epsilon^2}{2Mc^2} = \epsilon \left(1 - \frac{\epsilon}{2Mc^2} \right) \quad (12.21)$$

L'energia E_γ del fotone \simeq quindi diminuisce di una frazione $\delta E_\gamma = \epsilon/2Mc^2$, a causa dell'energia di rinculo del nucleo.

Aumentando M si riduce il termine $\epsilon/2Mc^2$ e quindi la frazione di energia di rinculo trasportata dal nucleo. Un modo per aumentare M è avere l'atomo col nucleo di massa M inglobato in un reticolo cristallino con energia di legame dello stesso nel reticolo maggiore di $\epsilon^2/2Mc^2$. In tal modo la massa efficace che dovrebbe rinculare contro l'emissione del γ sarebbe praticamente tutta quella macroscopica del cristallo in cui \simeq inglobato il nucleo che si sta per decadere γ (Effetto Mossbauer).

12.3.2 Esercizio 5 - 2:

Un nucleo di ${}^6\text{He}$ a riposo decade β^- nello stato fondamentale del ${}^6\text{Li}$.

Le masse dei due nuclei sono rispettivamente: $M({}^6\text{He}) = 5605.538 \text{ MeV}/c^2$;

$$M(^6\text{Li}) = 5601.519 \text{ MeV}/c^2.$$

Si valuti l'energia cinetica massima ammissibile $E_{e,max}^{(k)}$ per l'elettrone di decadimento, giustificando il risultato.

Soluzione:

Trascurando la massa dell'antineutrino l'energia totale rilasciata nel decadimento ${}^6\text{He} \rightarrow {}^6\text{Li} + e^- + \bar{\nu}_e$, è

$$Q = \left[M(^6\text{He}) - \left(M(^6\text{Li}) + m_e \right) \right] c^2 = 5605.538 - (5601.519 + 0.511) = 3.508 \text{ MeV} \quad (12.22)$$

Il decadimento è a tre corpi per cui le energie cinetiche dei prodotti di decadimento non sono univocamente determinate dalle masse presenti negli stati iniziale e finale.

Avendo assunto $m_{\bar{\nu}_e} \simeq 0$, l'elettrone raggiungerà l'energia massima consentita $E_{e,max}^{(k)}$ in concomitanza col nucleo figlio ${}^6\text{Li}$ ($E_{{}^6\text{Li},max}^{(k)}$), e ciò avverrà quando al limite tende a zero l'energia dell'antineutrino. In tal caso

$$Q = E_{e,max}^{(k)} + E_{{}^6\text{Li},max}^{(k)} \quad (12.23)$$

In questa ben precisa condizione cinematica anche il modulo dell'impulso dell'antineutrino tende a zero e dalla conservazione dell'impulso si ha

$p_{e,max} = p_{{}^6\text{Li},max}$, e poichè

$$p = \frac{1}{c} \sqrt{E^2 - m^2 c^4} = \frac{1}{c} \sqrt{E^{(k)} [E^{(k)} + 2mc^2]} \quad (12.24)$$

si ha

$$E_{e,max}^{(k)} \left(E_{e,max}^{(k)} + 2m_e c^2 \right) = E_{{}^6\text{Li},max}^{(k)} \left[E_{{}^6\text{Li},max}^{(k)} + 2M(^6\text{Li})c^2 \right] \quad (12.25)$$

da cui si ottiene

$$E_{e,max}^{(k)} = \frac{Q [M(^6\text{He}) + M(^6\text{Li}) - m_e]}{2M(^6\text{He})} \quad (12.26)$$

$$E_{{}^6\text{Li},max}^{(k)} = \frac{Q [M(^6\text{He}) + m_e - M(^6\text{Li})]}{2M(^6\text{He})}$$

Essendo $M(^6\text{Li}) \gg m_e$, ne deriva che $E_{{}^6\text{Li},max}^{(k)} \ll E_{e,max}^{(k)}$ infatti dalle (5) si ha

$$\frac{E_{e,max}^{(k)} - E_{{}^6\text{Li},max}^{(k)}}{Q} = \frac{M(^6\text{Li}) - m_e}{M(^6\text{He})} \quad (12.27)$$

quindi dall'essere $\frac{M(^6\text{Li})}{M(^6\text{He})} \simeq 1 \gg \frac{m_e}{M(^6\text{He})}$ segue

$$E_{e,max}^{(k)} - E_{{}^6\text{Li},max}^{(k)} \simeq Q \quad (12.28)$$

Dovendo quindi valere contemporaneamente sia la (7) che la (2), si ha

$$E_{e,max}^{(k)} \simeq Q = 3.508 \text{ MeV}$$

12.4 Esercizi Capitolo 6

12.4.1 Esercizio 6 - 1: Sezione d'urto in funzione del parametro d'urto "b"

Si calcoli la sezione d'urto totale per la diffusione coulombiana di particelle α con energia cinetica $E_k = 10$ MeV su nuclei di piombo e si discuta il risultato in funzione dei diversi possibili parametri d'impatto b .

Soluzione a:

Dato il basso valore di E_k , rispetto all'equivalente energetico della massa del proiettile α , dell'ordine di $4 \text{ GeV}/c^2$, e del bersaglio, dell'ordine di oltre $200 \text{ GeV}/c^2$, si può in prima approssimazione trattare il problema classicamente e non tener conto degli effetti legati allo spin che conducono alla sezione d'urto di Mott.

La lunghezza d'onda di De Broglie associata a una particella α da 10 MeV è

$$\begin{aligned}\lambda_\alpha(10 \text{ MeV}) &= \frac{2\pi\hbar}{p} = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2m_\alpha E_k + E_k/c^2}} \simeq \\ &\simeq \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2m_\alpha E_k}} \simeq 4.5 \times 10^{-15} \text{ m} = 4.5 \text{ fm}\end{aligned}$$

quindi dello stesso ordine di grandezza delle dimensioni lineari di un nucleo di piombo, che sono circa

$$R_{Pb} = r_0 A_{Pb}^{1/3} \simeq 1.2 \times 5.9 \times 10^{-15} \text{ m} \simeq 7.1 \times 10^{-15} \text{ m} = 7.1 \text{ fm}$$

per cui si può immaginare che quanto più centrale è l'urto, ovvero con piccoli valori di b , tanto più si sentono gli effetti delle dimensioni finite di proiettile e bersaglio e dell'interazione nucleare.

Le sezione d'urto differenziale di Rutherford è data dalla (7.64)

$$\frac{d\sigma_{Ruth}}{d\Omega} = \left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{16\pi\epsilon_0 E_k} \right)^2 \frac{1}{\text{sen}^4\vartheta/2}$$

La sezione d'urto totale per la diffusione coulombiana si ottiene integrando su ϑ fra $\vartheta = 0$ e $\vartheta = \pi$

$$\begin{aligned}\sigma_{Tot}^{(Coul)} &= \int \frac{d\sigma_{Ruth}}{d\Omega} d\Omega = 2\pi \int_0^\pi \text{sen } \vartheta \frac{d\sigma_{Ruth}}{d\Omega} d\vartheta = \\ &= 2\pi \left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{16\pi\epsilon_0 E_k} \right)^2 \int_0^\pi \frac{\text{sen}\vartheta d\vartheta}{\text{sen}^4(\vartheta/2)} = \\ &= 2\pi \left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{16\pi\epsilon_0 E_k} \right)^2 \int_0^\pi \frac{2\text{sen}(\vartheta/2)\cos(\vartheta/2) d\vartheta}{\text{sen}^4(\vartheta/2)} = \\ &= 8\pi \left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{16\pi\epsilon_0 E_k} \right)^2 \int_0^1 \frac{d(\text{sen}(\vartheta/2))}{\text{sen}^3(\vartheta/2)}\end{aligned}$$

Questo integrale però diverge! Si tenga quindi conto che nella realtà una particella α incidente su un nucleo di carica (Z_2e) "vede" tale carica sempre più schermata dagli elettroni del nucleo stesso quanto più cresce il parametro d'urto b . A distanze maggiori di quelle tipiche atomiche l'effetto schermante dovrebbe essere ormai quasi completo. Questo autorizza a considerare effettivamente dei diversi limiti d'integrazione; si può considerare ad esempio $b_{\max} \simeq 10^{-10}$ m, ovvero dell'ordine del raggio atomico.

Si ricordi la (7.61) che esprime il legame fra parametro d'urto e angolo di diffusione per un urto coulombiano

$$b_{\max}(\vartheta) = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{8\pi\epsilon_0 E_k} \cotg(\vartheta_{b_{\max}}/2)$$

Si può poi ragionevolmente prevedere che $\vartheta_{b_{\max}}$ sia molto piccolo, tanto da poterlo confondere col suo seno, per cui si ha, per i nuovi limiti d'integrazione

$$\begin{aligned} \sigma_{Tot}^{(Coul)}(b_{\max}) &\simeq 8\pi \left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{16\pi\epsilon_0 E_k} \right)^2 \int_{\vartheta_{b_{\max}}}^1 \frac{d(\text{sen}(\vartheta/2))}{\text{sen}^3(\vartheta/2)} = \\ &= 8\pi \left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{16\pi\epsilon_0 E_k} \right)^2 \frac{1}{2} [\text{cosec}^2(\vartheta_{b_{\max}}/2) - 1] = \\ &= 4\pi \left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{16\pi\epsilon_0 E_k} \right)^2 \cotg^2(\vartheta_{b_{\max}}/2) = \\ &= \pi \left[\frac{Z_1 Z_2 e^2}{8\pi\epsilon_0 E_k} \cotg^2(\vartheta_{b_{\max}}/2) \right]^2 = \pi b_{\max}^2 \end{aligned}$$

da cui, sostituendo $b_{\max} \simeq 10^{-10}$ m,

$$\sigma_{Tot}^{(Coul)}(b_{\max}) \simeq 3.14 \times 10^{-20} \text{ m}^2$$

Soluzione b:

Allo stesso risultato si poteva giungere anche osservando che

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{d(\text{sen}(\vartheta/2))}{\text{sen}^3(\vartheta/2)} &= \int_0^1 \frac{(1/2) \cos(\vartheta/2) d\vartheta}{\text{sen}(\vartheta/2) \text{sen}^2(\vartheta/2)} = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \cotg(\vartheta/2) \frac{d\vartheta}{\text{sen}^2(\vartheta/2)} = \frac{1}{2} \int_0^1 \cotg(\vartheta/2) \text{cosec}^2(\vartheta/2) d\vartheta \end{aligned}$$

Sempre ricordando la (7.61) si ha

$$\frac{db(\vartheta)}{d\vartheta} = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{8\pi\epsilon_0 E_k} \frac{d[\cotg(\vartheta/2)]}{d\vartheta} = \frac{-Z_1 Z_2 e^2}{8\pi\epsilon_0 E_k} \text{cosec}^2(\vartheta/2)$$

per cui

$$\sigma_{Tot}^{(Coul)}(b_{\max}) = 2\pi \int_0^{b_{\max}} b(\vartheta) d\vartheta = \pi b_{\max}^2$$

12.4.2 Esercizio 6 - 2: Fattore di forma elastico per un nucleo

Si consideri un nucleo con una distribuzione di carica sferica uniforme, $\rho(\vec{r}) = \rho(r) = 3/4\pi R^3$ per $r \leq R$ e $\rho(\vec{r}) = \rho(r) = 0$ per $r > R$, con $R = 2$ fm. Assumendo che la sensibilità sperimentale al raggio finito di tale nucleo si possa esprimere come una deviazione del 5 % del fattore di forma elastico dall'unità, si determini, nell'ipotesi di processi d'urto fra elettroni e nucleo, per quale impulso minimo si raggiunge tale sensibilità.

Si esprima il fattore di forma

$$F(q) = \int \rho(\vec{r}) e^{\frac{i\vec{q} \cdot \vec{r}}{\hbar}} d\vec{r}$$

tenendo conto della simmetria della distribuzione di carica e si assuma che $qR \ll \hbar$, per cui il fattore di forma stesso si può ricondurre ad una opportuna approssimazione.

Così facendo che peso avrebbe il successivo termine d'approssimazione trascurato ?

Soluzione

Data la supposta simmetria sferica della distribuzione di carica nel nucleo, ovvero $\rho(\vec{r}) = \rho(r)$, integrando l'espressione del fattore di forma sugli angoli si ottiene

$$\begin{aligned} \int \rho(\vec{r}) e^{\frac{i\vec{q} \cdot \vec{r}}{\hbar}} d\vec{r} &= \int_0^\infty r^2 dr \int_0^\pi \sin\vartheta d\vartheta \int_0^{2\pi} e^{\frac{i|\vec{q}|r\cos\vartheta}{\hbar}} \rho(r) d\varphi = \\ &= 2\pi \int_0^\infty \rho(r)r^2 dr \int_{-1}^1 e^{\frac{i|\vec{q}|r\cos\vartheta}{\hbar}} d(\cos\vartheta) = \left(\text{con } y = \frac{i|\vec{q}|r\cos\vartheta}{\hbar} \right) \\ &= 2\pi \int_0^\infty \frac{\hbar \rho(r)}{i|\vec{q}|r} r^2 dr \int_{\frac{-i|\vec{q}|r}{\hbar}}^{\frac{i|\vec{q}|r}{\hbar}} e^y dy \\ &= 4\pi \int_0^\infty \rho(r)r^2 \frac{e^{\frac{i|\vec{q}|r}{\hbar}} - e^{\frac{-i|\vec{q}|r}{\hbar}}}{2i|\vec{q}|r/\hbar} dr \\ &= 4\pi \int_0^\infty \rho(r)r^2 \frac{\text{sen}(|\vec{q}|r/\hbar)}{|\vec{q}|r/\hbar} dr = 4\pi \int_0^\infty \rho(r)r^2 \frac{\text{sen}(qr/\hbar)}{qr/\hbar} dr \end{aligned}$$

Data l'approssimazione indicata si ha $qr < qR \ll \hbar$ e di conseguenza si può espandere il seno in serie di Taylor fino al secondo termine non nullo

$$\frac{\text{sen}(qr/\hbar)}{qr/\hbar} = \frac{1}{qr/\hbar} \left[qr/\hbar - \frac{(qr/\hbar)^3}{6} + \dots \right] = 1 - \frac{(qr/\hbar)^2}{6} + \dots$$

Sostituendo si ottiene, per il fattore di forma

$$F(q) = 4\pi \int_0^R \frac{3}{4\pi R^3} \frac{\text{sen}(qr/\hbar)}{qr/\hbar} r^2 dr \simeq \frac{3}{R^3} \int_0^R \left[1 - \frac{(qr/\hbar)^2}{6} \right] r^2 dr$$

e integrando

$$F(q) \simeq 1 - \frac{(qR/\hbar)^2}{10}$$

Sostituendo il valore di R , esprimendo c in "fm/s" e ricordando che $\hbar \simeq 6.582 \times 10^{-16}$ eV/s, ovvero $\hbar \simeq 197.5$ (MeV \times fm)/(s \times c) si ha quindi, per il valore minimo dell'impulso che garantisce la sensibilità richiesta alla valutazione del raggio del nucleo

$$0.95 = F(q) \simeq 1 - \frac{(qR/\hbar)^2}{10} \quad \text{da cui, } q \simeq 0.71 \frac{\hbar}{R}$$

ovvero, sostituendo nelle opportune unità di misura,

$$q \simeq \frac{0.71 \times 197.5}{2} = 70 \frac{\text{MeV}}{c}$$

Il terzo termine dell'espansione in serie di Taylor del fattore di forma è

$$\frac{(qR/\hbar)^4}{280}$$

e poichè $qR/\hbar \simeq 0.71$, si ha che esso è circa 55 volte inferiore al precedente.

12.4.3 Esercizio 6 - 3:

Nel corso di questo esercizio si supponrà $c = 1$. Una particella carica, di massa ignota M e impulso \vec{p} molto maggiore della massa m_e dell'elettrone, attraversa un rivelatore. Ad una certa profondità all'interno del materiale attivo del rivelatore, un elettrone atomico viene urtato dalla particella entrante. Vengono misurati l'angolo polare dell'elettrone θ_e rispetto a p e la sua energia E_e . Si mostri che la massa M può essere stimata con la formula:

$$M = |\vec{p}| \left[\frac{E_e + m_e}{E_e - m_e} \cdot \cos^2 \theta_e - 1 \right]^{\frac{1}{2}}$$

(Suggerimento: si trascuri il fattore $m_e/|\vec{p}|$).

Soluzione:

Siano P, P' il quadri-impulso della particella sconosciuta, e k, k' il quadri-momento dell'elettrone, prima e dopo l'urto. Con una scelta opportuna del sistema di riferimento:

$$P = (\sqrt{|\vec{p}|^2 + M^2}, |\vec{p}|, 0, 0)$$

$$k = (m_e, 0, 0, 0)$$

$$k' = (E_e, \sqrt{E_e^2 - m_e^2} \cos \theta_e, \sqrt{E_e^2 - m_e^2} \sin \theta_e, 0)$$

$$P' = P + k - k'$$

A partire dall'ultima equazione:

$$P'^2 = P^2 + 2Pk - 2Pk' + k^2 + k'^2 - 2kk'$$

$$M^2 = M^2 + 2(m_e - E_e)\sqrt{|\vec{p}|^2 + M^2} + 2|\vec{p}|\sqrt{E_e^2 - m_e^2} \cos \theta_e + 2m_e(m_e - E_e)$$

$$0 = \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + M^2} - |\vec{p}|\sqrt{\frac{E_e + m_e}{E_e - m_e}} \cos \theta_e + m_e$$

$$0 = \sqrt{1 + \frac{M^2}{|\vec{p}|^2}} - \sqrt{\frac{E_e + m_e}{E_e - m_e}} \cos \theta_e + \frac{m_e}{|\vec{p}|}$$

$$M \approx |\vec{p}| \left[\frac{E_e + m_e}{E_e - m_e} \cos^2 \theta_e - 1 \right]^{\frac{1}{2}}$$

dove il fattore $m_e/|\vec{p}|$ è stato trascurato.

12.4.4 Esercizio 6 - 4:

In un acceleratore circolare di lunghezza $L = 300$ m scorre un fascio di anti-protoni di impulso $|\vec{p}| = 6$ GeV/c che produce una corrente di intensità pari ad $I = 0.16$ mA.

A ogni rivoluzione il fascio incontra un bersaglio di idrogeno gassoso di densità superficiale $\delta = 10^{14}$ cm⁻².

Si valuti la luminosità integrata in un intervallo di tempo $\Delta t = 10$ min.

Si valuti l'energia di fascio che sarebbe stata necessaria per ottenere la stessa energia nel sistema del centro di massa all'interno di un collisore protoni-antiprotoni.

Soluzione:

Per la velocità degli antiprotoni del fascio si ha

$$|\vec{v}| = \frac{|\vec{p}|c^2}{\sqrt{|\vec{p}|^2c^2 + m_p^2c^4}} \simeq 0.988 c$$

che è inferiore a c dell' 1% circa. Si ha quindi, per la frequenza di rivoluzione degli antiprotoni nell'anello dell'acceleratore:

$$\nu_r = \frac{|\vec{v}|}{L} \approx \frac{3 \times 10^8}{300} [\text{s}^{-1}] = 1.0 \text{ MHz}$$

da cui si ottiene il numero $n_{\bar{p}}$ di antiprotoni circolanti col fascio

$$n_{\bar{p}} = \frac{I}{e \cdot \nu_r} = \frac{0.16 \times 10^{-3}}{1.6 \times 10^{-19} \times 10^6} = 1.0 \times 10^9$$

Gli atomi di idrogeno del bersaglio gassoso possono essere considerati praticamente in quiete, a confronto delle velocità degli antiprotoni incidenti, per cui la luminosità sarà data dall'espressione

$$L = \Phi_{\bar{p}} \cdot \delta = \frac{I}{e} \cdot \delta = \frac{0.16 \times 10^{-3} \times 10^{14}}{1.6 \times 10^{-19}} \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1} = 10^{29} \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$$

La luminosità integrata dopo un tempo $\Delta t = 10 \text{ min}$ è quindi

$$L_{int} = L \cdot \Delta t = 10^{29} \times (10 \times 60) \text{ cm}^{-2} = 60 \mu\text{b}^{-1}$$

ricordando che $1 \text{ cm}^2 = 10^{24} \text{ b}$.

Per quanto concerne l'energia di fascio necessaria nel caso di un collider con fasci di protoni e antiprotoni, per disporre nel centro di massa della stessa energia ottenibile nel caso di bersaglio gassoso sopra citato, si ricordi che la quantità s è un invariante relativistico che nel caso di bersaglio fisso si scrive:

$$\sqrt{s} = \sqrt{m_p^2 c^4 + m_{\bar{p}}^2 c^4 + 2E_p m_p c^2} = \sqrt{2m^2 c^4 + 2E_p m c^2}$$

essendo E_p l'energia cinetica dei protoni nel Laboratorio ed $m = m_p = m_{\bar{p}}$. Nel caso di collider si trova che $\sqrt{s} = 2E^*$, essendo E^* l'energia sia delle particelle del fascio di p che di quello di \bar{p} . Si ha quindi:

$$\sqrt{s} = 2E^* = \sqrt{2m^2 c^4 + 2E_p m c^2} = \sqrt{2m^2 c^4 + 2m c^2 (|\vec{p}|^2 + m^2 c^4)^{1/2}}$$

e sostituendo i valori per $m c^2$ e per $|\vec{p}|$ si ottiene $E^* \simeq 1.81 \text{ GeV}$.

12.4.5 Esercizio 6 - 5:

La reazione $d + {}^3\text{H} \rightarrow n + {}^4\text{He}$, con un Q -valore $Q = 17.6 \text{ MeV}$, è utilizzata spesso per produrre fasci etichettati di neutroni di energia definita, tramite la rivelazione della particella carica (${}^4\text{He}$) associata.

Si consideri un fascio di deutoni incidenti con un'intensità $i = 2 \mu\text{A}$ e un'energia $E_d = 2.5 \text{ MeV}$ su un bersaglio fisso di tritio di densità $\delta = 0.2 \text{ mg/cm}^2$.

Sapendo che a quest'energia la sezione d'urto differenziale σ_{30° della reazione considerata vale 13 mb/sr all'angolo azimutale $\vartheta = 30^\circ$, si calcoli l'intensità Φ_n del flusso di neutroni che attraversa un rivelatore di 1 cm^2 posto alla distanza di 1 m dal bersaglio, all'angolo $\vartheta = 30^\circ$ rispetto al fascio incidente.

Soluzione:

Essendo $q_e \simeq 1.6022 \times 10^{-19} \text{ C}$ la carica elettrica di un singolo deutone, l'intensità di fascio di $2 \mu\text{A}$ corrisponde ad un numero dn_d/dt di deutoni incidenti al secondo pari a

$$\frac{dn_d}{dt} \simeq \frac{2 \mu\text{A}}{1.6022 \times 10^{-19} \text{ C}} = \frac{2 \times 10^{-6} \text{ C/s}}{1.6022 \times 10^{-19} \text{ C}} = 1.2483 \times 10^{13} \text{ d/s}$$

La massa atomica del tritio è pari a $M(t) = 3.01605$ u, quindi una mole di tritio, che contiene un numero di Avogadro $N_A = 6.0221 \times 10^{23}$ di nuclei di tritio, ha una massa di 3.01605 g.

Ne consegue che la densità del bersaglio di tritio espressa in (nuclei di tritio)/cm² è

$$\delta_t = \frac{2 \times 10^{-4} \times 6.0221 \times 10^{23}}{3.01605} = 3.9934 \times 10^{19} \text{ t/cm}^2$$

L'angolo solido $\Delta\Omega$ sotteso dal rivelatore si ottiene moltiplicando 4π per il rapporto fra l'area del rivelatore e quella della superficie sferica di raggio $r = 1$ m

$$\Delta\Omega = 4\pi \times \frac{1}{4\pi \times 10^4} = 10^{-4} \text{ sr}$$

Data la piccola entità di $\Delta\Omega$ si possono supporre trascurabili le variazioni in esso del valore assegnato per la sezione d'urto differenziale, che quindi si assume costante su tutto $\Delta\Omega$. Per l'intensità Φ_n del flusso cercato di neutroni si ha quindi

$$\begin{aligned} \Phi_n &= \frac{dn_d}{dt} \times \Delta\Omega \times \delta_t \times \sigma_{30^\circ} = \\ &= 1.2484 \times 10^{13} \times 10^{-4} \times 3.9934 \times 10^{19} \times 1.3 \times 10^{-26} = 648 \text{ s}^{-1} \end{aligned}$$

12.5 Esercizi Capitolo 11

12.5.1 Esercizio 11 - 1:

L'energia di legame del nucleo di deuterio ${}^2_1\text{H}$ è di 2.23 MeV e quella del nucleo di tritio ${}^3_1\text{H}$ è di 8.48 MeV.

Quale energia serve per portare due nuclei di deuterio alla distanza di 1.44×10^{-13} cm? (Si giustifichi la risposta).

Se una volta raggiunta questa configurazione ha luogo la reazione di fusione



si calcolino la temperatura corrispondente e l'energia prodotta nella fusione e si dica a quale particella corrisponde X.

(Si ricordi che la costante di Boltzman vale: 8.6×10^{-11} MeV/K)

Soluzione:

Assumendo per il deutone "d" un raggio medio $\langle R_d \rangle$ dato dalla relazione $R = R_0 A^{1/3}$ per il raggio dei nuclei, con $R_0 = 1.16 \times 10^{-15}$ m, si nota che alla distanza di 1.44×10^{-13} cm l'interazione fra i due nuclei di deuterio è praticamente ancora tutta elettromagnetica, di fatto elettrostatica.

Per calcolare l'energia cinetica necessaria a portarli a quella distanza reciproca, basta quindi valutare l'energia elettrostatica E_{el} di due cariche protoniche q puntiformi poste a quella stessa distanza, con velocità relativa nulla:

$$E_{el} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{\langle R_d \rangle} = \frac{\alpha \hbar c}{\langle R_d \rangle}$$

e ricordando che:

$$\alpha = 1/137.036,$$

$$\hbar = 6.582 \times 10^{-22} \text{ MeV}\cdot\text{s},$$

$$c = 2.998 \times 10^8 \text{ m/s}$$

si ottiene:

$$E_{el} \simeq 1 \text{ MeV}$$

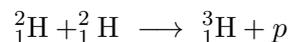
Per stimare la temperatura T alla quale si trova il sistema di due nuclei di deuterio nella configurazione descritta si ponga

$$E_{el} = k T \quad \text{da cui} \quad T = \frac{E_{el}}{k}$$

da cui sostituendo i valori per k ed E_{el}

$$T \simeq 1.16 \times 10^{10} \text{ K}$$

La particella X che viene prodotta assieme al tritio nel processo di fusione dei due deutoni è un protone. Applicando quindi la conservazione dell'energia alla reazione



e ricordando che

$$m_p \simeq 938.27 \text{ MeV}/c^2 \quad \text{ed} \quad m_n \simeq 939.56 \text{ MeV}/c^2$$

si ha,

$$2(m_p + m_n) c^2 - 2 \times 2.23 \text{ (MeV)} = (2m_n + m_p) c^2 + m_p c^2 - 8.48 \text{ (MeV)} + Q$$

da cui, sostituendo

$$Q = 4.02 \text{ MeV}$$

che è il Q -valore della reazione, ovvero l'energia prodotta nella fusione.