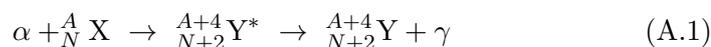


Appendice A

La scoperta del neutrone

Nel 1930, W.Bothe ed H.Becker osservarono che se le particelle α emesse dal polonio con energie cinetiche dell'ordine dei 5 MeV¹, vengono fatte incidere su alcuni elementi leggeri quali ${}^9_4\text{Be}$, ${}^{11}_5\text{B}$ o ${}^7_3\text{Li}$, si osservava la produzione di una inusuale radiazione molto penetrante. Il berillio risultava il bersaglio più efficace in quanto, a parità di intensità di particelle α incidenti, forniva i fasci più intensi della nuova radiazione.

Questa non risultava poi sensibile all'azione di campi elettrici e per questo si pensò potesse trattarsi di radiazione γ , secondo uno schema di reazione



ma non si conoscevano radiazioni γ così penetranti, e vi erano inoltre dei dettagli dei risultati sperimentali di difficile interpretazione, supponendo si trattasse di raggi γ .

Due anni dopo I.Joliot-Curie e F.Joliot mostrarono che tale nuova radiazione era in grado di attraversare spessori di materiali pesanti quali il piombo, anche tre volte superiori a quanto potessero fare i raggi γ più energetici emessi dalle sorgenti radioattive note. Ponendo inoltre paraffina o altri bersagli idrogenati sul percorso della radiazione penetrante sconosciuta, questa estraeva da tali bersagli, protoni con energie cinetiche fino a ≈ 5.3 MeV.

Ciò poteva apparire non inconsistente con l'ipotesi di γ incidenti che diano luogo a diffusione Compton, ma le energie richieste a tali γ dovrebbero essere irrealisticamente grandi, dell'ordine di circa 50 MeV, per estrarre dai nuclei protoni con energie cinetiche fino a ≈ 5.3 MeV, ovvero con impulsi fino a ≈ 100 MeV/c. Ettore Majorana congetturò che il tipo di interazione che aveva luogo fra la nuova radiazione e i protoni, richiedeva che la prima fosse costituita da particelle neutre e non da γ .

Sulla scorta dei risultati ottenuti dai coniugi Joliot-Curie, J.Chadwick riprodusse le misure con paraffina e con altri bersagli idrogenati, quindi ricchi di

¹L'isotopo ${}^{208}\text{Po}$, con una vita media di 2.9 anni, emette α da 5.21 MeV; l'isotopo ${}^{209}\text{Po}$, con una vita media di 103 anni, emette α da 4.98 MeV; l'isotopo ${}^{210}\text{Po}$, con una vita media di 138.4 giorni, emette α da 5.41 MeV.

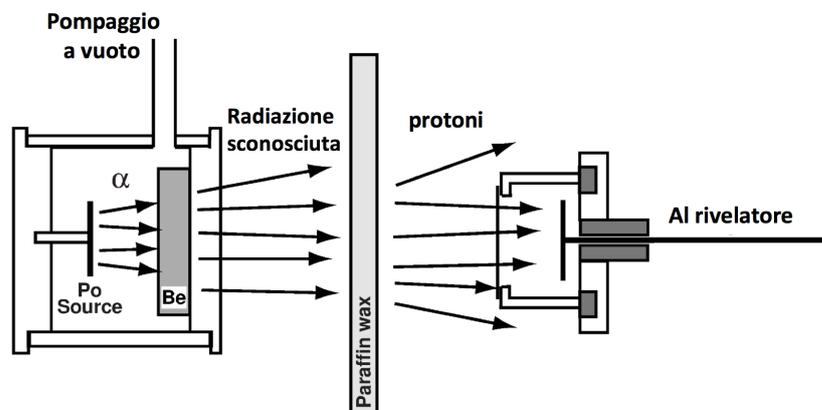


Figura A.1: Schema delle misure dei coniugi Joliot-Curie e di Chadwick.

protoni bersaglio, misurando il range dei protoni prodotti.

Egli osservò che l'ipotesi di avere γ da ≈ 50 MeV contrastava con l'applicazione della conservazione dell'energia alle reazioni coinvolte nelle misure sperimentali



in quanto

$$c^2 \left[M_\alpha + M({}^9_4\text{Be}) - M({}^{13}_6\text{C}) \right] \simeq 3727.4 + 8392.8 - 12109.6 \simeq 11 \text{ MeV} \quad (\text{A.3})$$

mentre invece le conservazioni di energia e impulso risultavano soddisfatte ipotizzando che nella reazione fosse prodotta una particella neutra di massa simile a quella del protone



per cui

$$\begin{aligned} c^2 \left[M_\alpha + M({}^9_4\text{Be}) - M({}^{12}_6\text{C}) - M_n \right] &\simeq \\ &\simeq 3727.4 + 8392.8 - 11175.0 - M_n c^2 \simeq (945.2 - M_n c^2) \text{ MeV} \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

da cui si ottiene che se $M_n = M_p$ allora l'energia cinetica massima della particella neutra n prodotta è pari a $\simeq 6$ MeV.

Chadwick provò così che i risultati ottenuti non erano consistenti col fatto che la nuova radiazione fosse costituita da raggi γ , in quanto ciò avrebbe comportato la violazione della conservazione di energia e impulso, mentre erano invece consistenti con l'avvenuta produzione di particelle di massa sostanzialmente equivalente a quella dei protoni, ma elettricamente neutre, come congetturato da Majorana, ovvero i neutroni.

Appendice B

Momenti elettrici dei nuclei

Si deducono ora i momenti elettrici di una distribuzione classica di carica che simuli quella possibile per un nucleo, assumendo come direzione di riferimento z quella di un opportuno campo elettrico esterno.

Il potenziale elettrostatico nel punto P, posto a distanza s dal centro di massa O del nucleo e dovuto a un protone situato a distanza r da O è, come desumibile dalla figura [B.1](#)

$$V(r, \vartheta) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e}{L(r, \vartheta)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} e (s^2 + r^2 - 2rs \cos\vartheta)^{-1/2} \quad (\text{B.1})$$

Sviluppando il termine $\frac{1}{L(r, \vartheta)}$ nell'ipotesi che sia $r/s \ll 1$, si ha

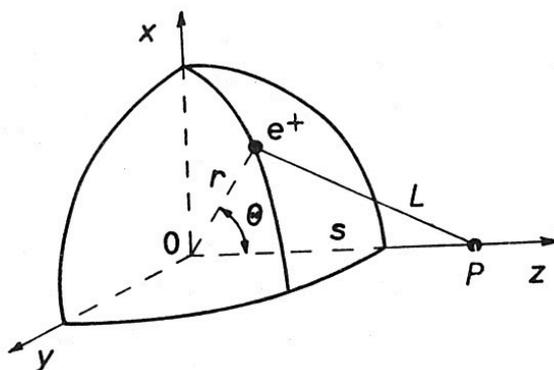


Figura B.1: Configurazione geometrica per il calcolo del multipolo elettrico.

$$\frac{1}{L(r, \vartheta)} = \frac{1}{s} \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{2r}{s} \cos\vartheta - \frac{r^2}{s^2} \right) + \dots \right] \quad (\text{B.2})$$

e raccogliendo opportunamente, la [B.1](#) diventa

$$V(r, \vartheta) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e r^n}{s^{n+1}} P_n(\cos\vartheta) \quad (\text{B.3})$$

dove $P_n(\cos\vartheta)$ sono i polinomi di Legendre, come in [7.16](#) Per $n = 0$, $V(r, \vartheta)$ si riduce al potenziale coulombiano nel punto P dovuto alla carica protonica $+e$ posta nell'origine O . Ogni termine corrispondente ad $n \neq 0$ nella [B.3](#) rappresenta il potenziale elettrostatico classico di 2^n -polo

$$V^{(n)}(r, \vartheta) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e r^n}{s^{n+1}} P_n(\cos\vartheta) \quad (\text{B.4})$$

Dalla [B.3](#) si ha dunque che il potenziale in P dovuto a una carica elettrica posta nel punto (r, ϑ) rispetto all'origine O , coincide con la somma del potenziale prodotto dalla stessa carica come se fosse in O con quello dovuto a un sistema di 2^n -poli. Il valor medio di $V(r, \vartheta)$ coincide col potenziale coulombiano $V_C(r) = e/4\pi\epsilon_0 s$, in quanto per $n \neq 0$, si ha

$$\langle V^{(n)} \rangle = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{e r^n}{s^{n+1}} \int_0^\pi P_n(\cos\vartheta) \sin\vartheta d\vartheta = 0 \quad (\text{B.5})$$

I momenti classici di dipolo ($n = 1$) e di quadrupolo ($n = 2$) dovuti a una singola carica elettrica sono definiti come

$$\begin{aligned} d(r, \vartheta) &= er P_1(\cos\vartheta) = ez \\ q(r, \vartheta) &= e2r^2 P_2(\cos\vartheta) = e(3z^2 - r^2) \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

Nel caso della distribuzione $\rho_Z(\vec{r})$ di carica di un nucleo con Z protoni normalizzata in modo che

$$\int \rho_Z(\vec{r}) d\vec{r} = Ze \quad (\text{B.7})$$

si ha, per i relativi momenti di dipolo e quadrupolo,

$$\begin{aligned} D &= \int z' \rho_Z(\vec{r}') d\vec{r}' \\ Q &= \int (3z'^2 - r'^2) \rho_Z(\vec{r}') d\vec{r}' \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

dove l'apice indica che le variabili coprono il volume strettamente occupato dalla carica. Quindi il momento di dipolo elettrico è una quantità omogenea a una lunghezza, tipicamente espresso in fermi (fm), e quello di quadrupolo è omogeneo a una superficie, tipicamente espresso in barn.

Si veda ora "classicamente" la relazione esistente tra la forma della distribuzione di carica del nucleo e il suo momento elettrico. Si supponga a tale scopo, sempre classicamente che lo spin \vec{J} del nucleo sia completamente orientato nella direzione dell'asse z e che per il moto di rotazione la forma del nucleo, diversa da quella sferica, sia riconducibile almeno in prima approssimazione, a quella di un ellissoide di rotazione di equazione

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1 \quad (\text{B.9})$$

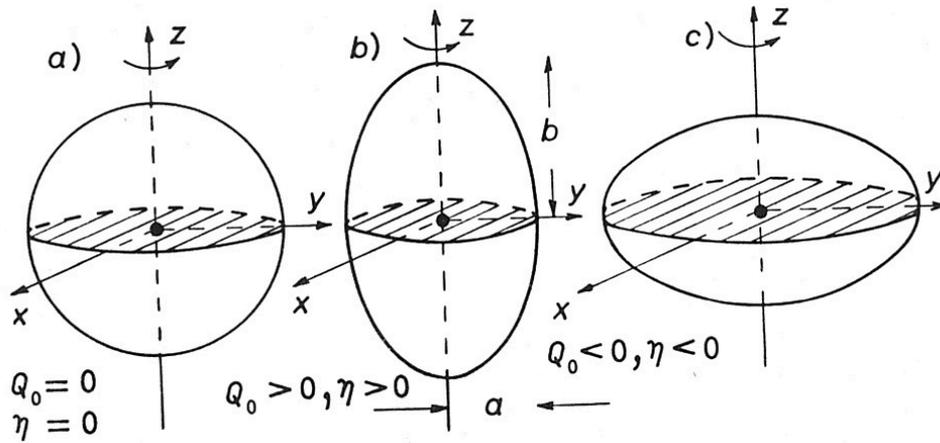


Figura B.2: Possibili deformazioni per una distribuzione di carica.

come illustrato in figura [B.2](#). Si supponga anche che la carica elettrica del nucleo sia uniformemente distribuita nel volume $V = 4\pi a^2 b/3$ dell'ellissoide di rotazione, per cui la densità si esprime classicamente come

$$\begin{cases} \rho_Z(\vec{r}) = \frac{Ze}{V} = \frac{3Ze}{4\pi a^2 b} & , \text{ per } -a \leq x \leq a \quad -a \leq y \leq a \quad -b \leq z \leq b \\ \rho_Z(\vec{r}) = 0 & , \text{ per } x > a \quad y > a \quad z > b \end{cases} \quad (\text{B.10})$$

e sostituendo per i momenti di dipolo e quadrupolo si ottiene

$$\begin{aligned} D_c &= \frac{3Ze}{4\pi a^2 b} \int z' d\vec{r}' = 0 \\ Q_c &= \frac{3Ze}{4\pi a^2 b} \int (3z'^2 - r'^2) d\vec{r}' = \frac{2}{5} Ze (b^2 - a^2) \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

dove il pedice "c" sottolinea che i risultati sono in ambito classico. Ponendo

$$R = \frac{1}{2}(b+a) \quad , \quad \eta = \frac{1}{2}(b-a)$$

si riscrive il momento di quadrupolo come

$$Q_c = \frac{8}{5} Ze\eta R \quad (\text{B.12})$$

da cui: se $\eta = 0$ allora $a = b$, il nucleo ha simmetria sferica e possiede momento di quadrupolo nullo; se $\eta > 0$ allora $b > a$, il momento di quadrupolo è positivo e il nucleo ha la forma di un ellissoide allungato secondo l'asse di rotazione; se $\eta < 0$ allora $b < a$, il momento di quadrupolo è negativo e il nucleo ha la forma di un ellissoide schiacciato rispetto all'asse di rotazione, come mostrato nelle figure [B.2](#) a), b) e c).

Quanto indicato dalla prima delle [B.11](#), ovvero che sia nullo il momento di dipolo elettrico per una distribuzione di carica, e quindi per un nucleo, con simmetria sferica rispetto al piano equatoriale $z = 0$, è classicamente ovvio, dato che la densità di carica è una funzione pari della posizione $\rho_Z(\vec{r}) = \rho_Z(-\vec{r})$, mentre z è dispari su tutto lo spazio in cui si integra per il calcolo di D .

I risultati sperimentali non contraddicono quanto trovato con l'approccio classico, ma ve ne sono che non trovano una spiegazione classica, in particolare si trova che il livello fondamentale di un nucleo può avere momento di quadrupolo elettrico nullo anche se la sua distribuzione di carica non ha simmetria sferica, ovvero se il suo momento angolare totale \vec{J} non è nullo. Si trova infatti che è nullo il momento di quadrupolo elettrico anche per i nuclei con $J = 1/2$.

Per una corretta trattazione quantistica da cui discenda anche questo risultato si definisca il valore del multipolo elettrico di un nucleo come il valor medio dell'operatore di multipolo elettrico, calcolato sullo stato che possiede il massimo valore possibile della proiezione J_z del momento angolare totale lungo la direzione z del campo esterno di riferimento.

Classicamente si è trovato che momenti di dipolo o di quadrupolo diversi da zero implicano una simmetria non sferica per la distribuzione di carica, ovvero richiedono $\vec{J} \neq 0$. Quantisticamente i diversi momenti di multipolo elettrico di un nucleo sono proporzionali a

$$Ze \int \psi_J^{*m}(\vec{r}') r'^\ell P_\ell(\cos\vartheta') \psi_J^m(\vec{r}') d\vec{r}' \quad (\text{B.13})$$

con $\psi_J^m(\vec{r})$ autofunzione del momento angolare sul valore massimo possibile $m = J$. Se dunque le forze nucleari conservano la parità, un nucleo con stato fondamentale non degenere ¹ deve avere momento di dipolo elettrico nullo, come si era visto anche classicamente.

Da quanto detto è anche chiaro che un nucleo con $\vec{J} = 0$ non può avere neppure momento di quadrupolo elettrostatico, infatti in questo caso $\ell = 2$ ed $m = 0$, e di conseguenza $|\psi_0^0|^2$ ha simmetria sferica, per cui

$$\begin{aligned} Q &\propto Ze \int |\psi_0^0|^2 r'^2 P_2(\cos\vartheta') d\vec{r}' = \\ &= Ze \int_0^\infty r'^4 |\psi_0^0|^2 \int P_2(\cos\vartheta') d\Omega' dr' = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

e anche questo combacia col risultato classico.

Si ricordi che per $\ell \neq 0$ si ha anche $\int P_\ell(\cos\vartheta') d\Omega' = 0$.

¹La funzione d'onda di uno stato degenere è esprimibile come combinazione lineare di autovettori differenti e linearmente indipendenti, quindi di fatto mescola stati diversi.

Quantisticamente si può però verificare che il momento di quadrupolo elettrico di un nucleo sia nullo anche nel caso in cui $J = 1/2$, risultato classicamente non prevedibile. Lo si può capire intuitivamente immaginando di cercare di fare in modo che l'integrale in $d\Omega'$ risulti $\neq 0$. L'integrando contiene $P_2(\cos\vartheta')$, che corrisponde al momento angolare orbitale $\ell = 2$. Per rendere non nullo l'integrale in $d\Omega'$ bisogna riuscire a costruire uno scalare, ovvero un invariante per rotazioni, utilizzando $\vec{\ell}$ e i momenti angolari totali delle funzioni d'onda iniziale e finale, che valgono entrambi \vec{J} , bisogna cioè che possa essere

$$\vec{\ell} + \vec{J} + \vec{J} = 0 \quad (\text{B.15})$$

Poichè però $\ell = 2$ e $J = 1/2$, $2J$ può al massimo valere 1, e di conseguenza $1 \leq (\ell + 2J) \leq 3$, escludendo la possibilità che sia $L + 2J = 0$. Quindi i nuclei pari-pari ($J = 0$), assieme ai pari-dispari e ai dispari-pari con $J = 1/2$, hanno momento di quadrupolo elettrico nullo, anche se ciò non significa necessariamente che i nuclei con $J = 1/2$ abbiano una distribuzione di carica a simmetria perfettamente sferica, ma semplicemente che è nulla la massima componente osservabile del loro momento di quadrupolo Q .

Quindi un nucleo mostra momenti di quadrupolo elettrici non nulli solo per valori $J \geq 1$.

Quanto qui discusso vale per i cosiddetti momenti "statici" dei nuclei, quelli cioè che caratterizzano un nucleo nel suo stato fondamentale. Quando diversamente si considerano i casi di nuclei in condizioni eccitate che effettuano transizioni radiative fra diversi livelli energetici, non valgono le stesse condizioni restrittive.

Appendice C

Calcolo della probabilità di decadimento α

L'altezza della barriera coulombiana per nuclei con $A \simeq 200$ è dell'ordine di $20 \div 25$ MeV, e particelle α con energie cinetiche dell'ordine di pochi MeV, come quelle emesse per decadimento alfa, non riescono a superarla e avvicinarsi sufficientemente al nucleo da interagire con esso tramite interazione nucleare.

D'altro canto se si immagina una particella α di bassa energia cinetica legata in un nucleo, anch'essa vede questa stessa barriera coulombiana ma dall'interno del nucleo, e nondimeno riesce talvolta ad uscire dal nucleo. Come ciò possa succedere costituisce un notevole rompicapo, finchè non si capì che l'emissione di particelle α da un nucleo è un fenomeno squisitamente quantistico.

La prima formulazione di una teoria capace di corrette previsioni quantitative fu del 1929, dai lavori di G. Gamow e di R. Gurney ed E. Condon.

C.1 Trasmissione attraverso una barriera rettangolare

Si consideri dapprima il caso di una barriera di potenziale rettangolare monodimensionale, distinguendo tre regioni

$$\begin{aligned} \text{I : } & V = 0 & -\infty < x < 0 \\ \text{II : } & V = U & 0 < x < b \\ \text{III : } & V = 0 & b < x < \infty \end{aligned}$$

Per una particella con energia cinetica $E < U$ la barriera risulta classicamente impenetrabile. Dal punto di vista quantistico essa ha invece una *trasparenza* non nulla.

Si tratti la particella come un'onda di lunghezza d'onda ridotta $\lambda = \hbar/mv =$

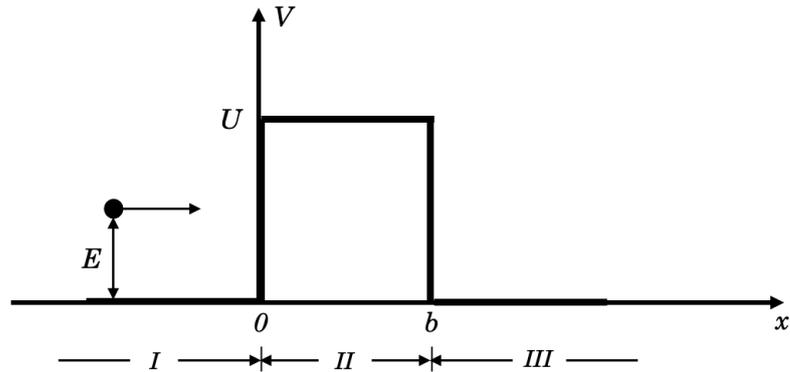


Figura C.1: ...

$\hbar/\sqrt{2mE}$, con m la massa ridotta del sistema, e ampiezza A_1 . Una parte dell'onda, con ampiezza B_1 , è riflessa dalla barriera in $x = 0$ e una parte, con ampiezza A_2 , trasmessa. Similmente in $x = b$, una parte dell'onda

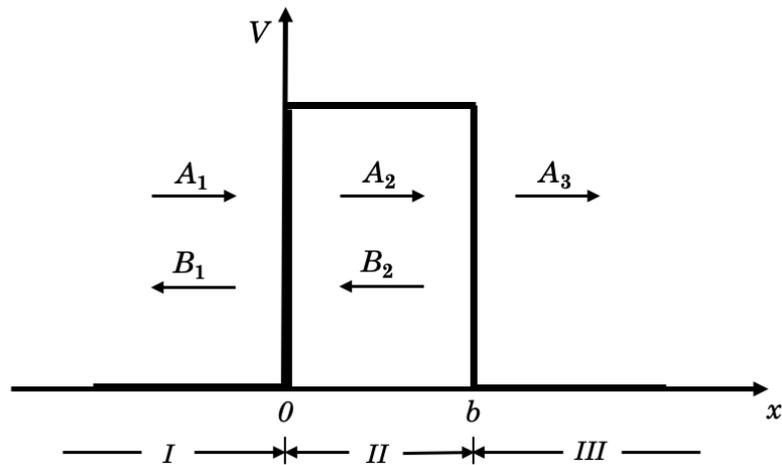


Figura C.2: ...

penetrata nella barriera è riflessa con ampiezza B_2 e la parte restante emerge dall'altra parte della barriera con ampiezza A_3 . Si definisce *fattore di penetrazione della barriera* il rapporto

$$P = \frac{|A_3|^2}{|A_1|^2} \quad (\text{C.1})$$

e *trasparenza*, o *coefficiente di trasmissione della barriera*, il rapporto

$$T = \frac{|A_3|^2 k_{III}}{|A_1|^2 k_I} \quad (\text{C.2})$$

con k_{III} e k_I i numeri d'onda $1/\lambda$ nelle regioni III e I .
Le funzioni d'onda della particella nelle diverse regioni si ottengono come soluzioni dell'equazione di Schrödinger unidimensionale

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (E - V) \psi = 0 \quad (\text{C.3})$$

Come funzioni d'onda per la particella incidente nella regione I nella direzione positiva di x , e per la riflessa sempre nella regione I ma nella direzione negativa di x , si scelgono onde piane

$$\begin{aligned} & A_1 e^{ik_I x} \\ & B_1 e^{-ik_I x} \end{aligned}$$

per cui la funzione d'onda totale nella regione I si ottiene come sovrapposizione lineare di queste due componenti

$$\psi_I = A_1 e^{ik_I x} + B_1 e^{-ik_I x} \quad (\text{C.4})$$

con numero d'onda

$$k_I = \frac{1}{\lambda_I} = \frac{\sqrt{emE}}{\hbar} \quad (\text{C.5})$$

Similmente per la regione III

$$\psi_{III} = A_3 e^{ik_{III} x}, \quad \text{con} \quad k_{III} = k_I, \quad \text{in questo caso specifico.} \quad (\text{C.6})$$

ψ_I e ψ_{III} sono soluzioni dell'equazione di Schrödinger per le regioni I e III

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2} E \psi = 0 \quad (\text{C.7})$$

Nella regione II il termine energetico dell'equazione di Schrödinger è

$$E - V = E - U = -E_B \quad (\text{C.8})$$

dove $E_B > 0$ svolge il ruolo di un'energia di legame. La soluzione anche in questo caso è una sovrapposizione lineare di componenti relative a moti progressivi e regressivi nella direzione x

$$\psi_{II} = A_2 e^{ik_{II} x} + B_2 e^{-ik_{II} x}, \quad \text{con} \quad k_{II} = \frac{\sqrt{2m(E-U)}}{\hbar} = \frac{\sqrt{-2mE_B}}{\hbar} \quad (\text{C.9})$$

Per $E < U$ il numero d'onda k_{II} è immaginario puro, conviene quindi introdurre un numero d'onda reale k'_{II} definito come

$$k'_{II} = ik_{II} = \frac{\sqrt{2mE_B}}{\hbar}$$

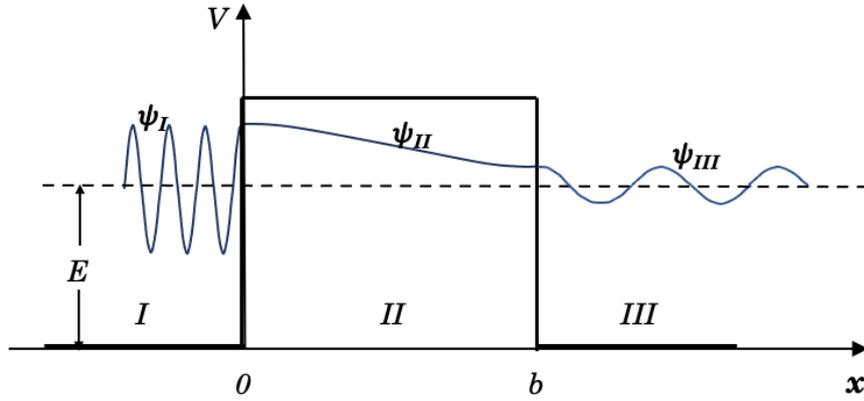


Figura C.3: Fig₁.

La funzione d'onda nella regione *II* diventa così

$$\psi_{II} = A_2 e^{k'_{II} x} + B_2 e^{-k'_{II} x} \quad (C.10)$$

Le equazioni per ψ_I , ψ_{II} e ψ_{III} contengono un'ampiezza nota A_1 (che può essere normalizzata ad 1) e quattro ampiezze incognite B_1 , A_2 , B_2 e A_3 che devono essere determinate per calcolare la trasparenza T .

I quattro coefficienti B_1 , A_2 , B_2 e A_3 devono avere valori tali da rendere soddisfatta la condizione di continuità delle funzioni d'onda e delle loro derivate prime in $x = 0$ e in $x = b$.

La funzione ψ_{II} non è periodica in quanto k_{II} è immaginario.

Le condizioni di continuità danno quattro equazioni

$$\begin{aligned} \psi_I(0) = \psi_{II}(0) &\rightarrow A_1 + B_1 = A_2 + B_2 \\ \psi_{II}(b) = \psi_{III}(b) &\rightarrow A_2 e^{k'_{II} b} + B_2 e^{-k'_{II} b} = A_3 e^{ik_{III} b} = A_3 e^{ik_I b} \end{aligned} \quad (C.11)$$

e

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \psi_I}{\partial x}\right)_{x=0} = \left(\frac{\partial \psi_{II}}{\partial x}\right)_{x=0} &\rightarrow ik_I(A_1 - B_1) = k'_{II}(A_2 - B_2) \\ \left(\frac{\partial \psi_{II}}{\partial x}\right)_{x=b} = \left(\frac{\partial \psi_{III}}{\partial x}\right)_{x=b} &\rightarrow k'_{II}(A_2 e^{k'_{II} b} - B_2 e^{-k'_{II} b}) = ik_{III} A_3 e^{ik_{III} b} \end{aligned} \quad (C.12)$$

Posto

$$p = \sqrt{2mE}, \quad q = \sqrt{2mE_b}, \quad k = k_I = k_{III} = \frac{p}{\hbar}$$

e moltiplicando la prima per ip/\hbar e sommando poi membro a membro con la terza si ottiene

$$A_1 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{q}{ip}\right) A_2 + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{q}{ip}\right) B_2 \quad (C.13)$$

Moltiplicando la seconda per $k'_{II} = q/\hbar$ e sommando poi membro a membro con la quarta si ottiene

$$A_2 = \frac{1}{2} A_3 e^{ikb} \left(1 + \frac{ip}{q}\right) e^{-qb/\hbar} \quad (\text{C.14})$$

mentre sottraendo

$$B_2 = \frac{1}{2} A_3 e^{ikb} \left(1 - \frac{ip}{q}\right) e^{qb/\hbar} \quad (\text{C.15})$$

Sostituendo nella [C.13](#) si ha

$$A_1 = \frac{1}{4} A_3 e^{ikb} \left[\left(1 + \frac{q}{ip}\right) \left(1 + \frac{ip}{q}\right) e^{-qb/\hbar} + \left(1 - \frac{q}{ip}\right) \left(1 - \frac{ip}{q}\right) e^{qb/\hbar} \right] \quad (\text{C.16})$$

Si ottiene quindi per il coefficiente di trasmissione della barriera

$$T = \frac{|A_3|^2 k_{III}}{|A_1|^2 k_I} = \frac{4 k_I^2 k'_{II}{}^2}{(k_I^2 + k'_{II}{}^2)^2 \sinh^2 k'_{II} b + 4 k_I^2 k'_{II}{}^2} \quad (\text{C.17})$$

Ricordando che

$$k_I^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}, \quad e \quad k'_{II}{}^2 = \frac{2mE_B}{\hbar^2} = \frac{2m(U-E)}{\hbar^2}$$

si può scrivere T in termini dell'energia

$$T = \left\{ 1 + \frac{U^2}{4E(U-E)} \left[\frac{1}{4} (e^{2k'_{II}b} + e^{-2k'_{II}b}) - \frac{1}{2} \right] \right\}^{-1} \quad (\text{C.18})$$

Al limite con barriere rettangolari spesse per cui $k'_{II}b \gg 1$ il termine in parentesi quadra si riduce in prima approssimazione a $(e^{2k'_{II}b}/4)$ e quindi

$$T \longrightarrow \left[\frac{U^2}{4E(U-E)} \frac{1}{4} e^{2k'_{II}b} \right]^{-1} = \frac{16E(U-E)}{U^2} e^{-2b\sqrt{2m(U-E)}/\hbar} \quad (\text{C.19})$$

Si ha quindi

$$T \approx e^{\frac{-2b\sqrt{2m(U-E)}}{\hbar}} \quad (\text{C.20})$$

che è sostanzialmente la *formula di Gamow*.

Questa si può ricavare anche partendo dalla [C.16](#), facendo la semplificazione

$$k_I \simeq k'_I I \quad \text{per cui} \quad E \simeq U - E \equiv E_B$$

e supponendo, come fatto sopra, che $k'_{II}b \gg 1$, in tal caso si ha infatti $p/q = \sqrt{E/E_B} \simeq 1$, per cui

$$A_1 \approx \frac{1}{2} A_3 e^{ikb} e^{qb/\hbar} \quad (\text{C.21})$$

Per la trasparenza si ha dunque

$$T = \frac{|A_3|^2}{|A_1|^2} \approx 4 |e^{-ikb} e^{qb/\hbar}|^2 = 4 e^{-2qb/\hbar} \approx e^{-2b\sqrt{2m(U-E)}/\hbar} \quad (\text{C.22})$$

e si vede che essa è maggiore per particelle di massa m piccola, potenziali $(U - E)$ non troppo elevati e ridotti spessori b , di conseguenza si può dedurre che gli elettroni dovrebbero superare agevolmente barriere di potenziale. Nel limite classico invece, ovvero per $\hbar \rightarrow 0$, la trasparenza tende a zero.

Nel caso di una barriera di forma arbitraria la trasparenza si ottiene generalizzando in modo approssimato la formula di Gamow, sostituendo la barriera effettiva con una barriera rettangolare *equivalente* che abbia un'altezza U_{eff} e una larghezza $(b - a)$ opportune e tali che

$$\sqrt{\frac{2m(U_{eff} - E)}{\hbar^2}} = \frac{\int_a^b \sqrt{\frac{2m[V(x) - E]}{\hbar^2}} dx}{b - a} \quad (\text{C.23})$$

per cui la trasparenza si scrive come

$$T \approx e^{-2 \sqrt{\frac{2m(U_{eff} - E)}{\hbar^2}} (b - a)} = e^{-2 \int_a^b \sqrt{\frac{2m[V(x) - E]}{\hbar^2}} dx} \quad (\text{C.24})$$

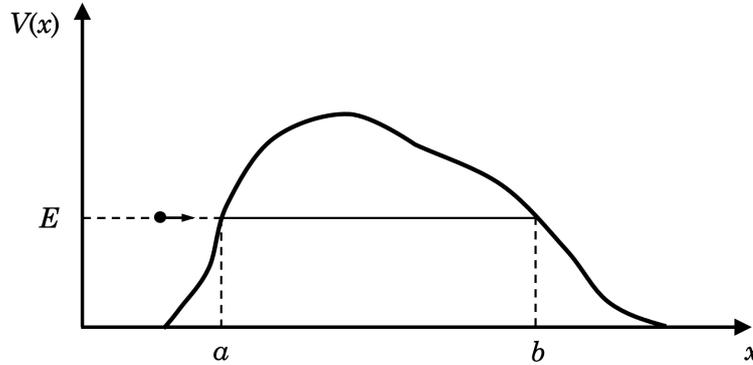


Figura C.4: Fig₁.

C.2 Trasmissione attraverso la barriera di potenziale nucleare

Si tratta ora il problema più realistico di una barriera di potenziale a simmetria sferica che rappresenti quello sentito da una particella carica entro

un nucleo.

Data la simmetria assunta per il potenziale, si può fattorizzare la funzione d'onda espressa in coordinate polari sferiche r, ϑ, φ , nelle singole variabili

$$\psi(r, \vartheta, \varphi) = f(r) \Theta(\vartheta) \Phi(\varphi) = f(r) Y(\vartheta, \varphi) \quad (\text{C.25})$$

Come per l'atomo di idrogeno, l'equazione di Schrödinger del sistema può essere scissa in due parti, una dipendente dalla sola variabile radiale r , e una dalle sole variabili angolari ϑ e φ

$$\left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \text{sen} \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\text{sen} \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{r^2 \text{sen}^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] \psi + \frac{2m}{\hbar^2} (E_{tot} - V) \psi = 0 \quad (\text{C.26})$$

Uguagliando le due parti a una medesima costante $\ell(\ell+1)$, con ℓ un numero positivo o nullo, si ottengono due equazioni differenziali, quella angolare e quella radiale.

L'equazione angolare

$$\frac{1}{\text{sen} \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\text{sen} \vartheta \frac{\partial Y}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{\text{sen}^2 \vartheta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \varphi^2} + \ell(\ell+1) Y = 0 \quad (\text{C.27})$$

ha come soluzioni le armoniche sferiche

$$Y_{\ell m}(\vartheta, \varphi) = (-1)^m \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi} \frac{(\ell-|m|)!}{(\ell+|m|)!}} P_{\ell}^m(\cos \vartheta) e^{im\varphi} \quad (\text{C.28})$$

con $P_{\ell}^m(\cos \vartheta)$ le funzioni associate di Legendre.

L'equazione radiale

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left[r^2 \frac{df(r)}{dr} \right] + \frac{2m}{\hbar^2} \left[(E_{tot} - V) - \frac{\ell(\ell+1)\hbar^2}{2mr^2} \right] f(r) = 0 \quad (\text{C.29})$$

contiene la fisica del problema, in quanto contiene l'energia totale E_{tot} ed il potenziale $V = V(r)$ del sistema fisico *nucleo + particella*.

Introducendo la funzione d'onda radiale modificata $u(r) = rf(r)$, la C.29 diventa

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{2m}{\hbar^2} \left[(E_{tot} - V) - \frac{\ell(\ell+1)\hbar^2}{2mr^2} \right] u = 0 \quad (\text{C.30})$$

che confrontata con l'equazione di Schrödinger per il caso unidimensionale, mostra sostanzialmente la presenza di un ulteriore termine di energia potenziale, ovvero

$$\frac{\ell(\ell+1)\hbar^2}{2mr^2} \quad (\text{C.31})$$

che corrisponde ad un *potenziale centrifugo*, essendo sostanzialmente espresso come il quadrato di un operatore *momento angolare* fratto un operatore *momento d'inerzia*.

La [C.2](#) è quindi una sorta di energia rotazionale quanto-meccanica associata al moto delle particelle collidenti intorno al loro comune centro di massa, ed ha l'effetto di aumentare la barriera di potenziale di un nucleo ogniqualvolta è presente un momento angolare orbitale relativo.

In tal modo sostanzialmente, il moto relativo tridimensionale di due particelle interagenti con potenziale $V(r)$ è ricondotto ad un moto unidimensionale nella coordinata r , pur di assumere come potenziale di interazione la somma

$$V(r) + \frac{\ell(\ell+1)\hbar^2}{2mr^2}$$

La *barriera centrifuga* interviene quindi ogniqualvolta in cui in una disintegrazione o in un urto si abbia $\ell \neq 0$, anche per particelle elettricamente neutre, come si verifica quando un neutrone penetra la barriera nucleare. Essa agisce quindi nel senso di ridurre la probabilità di penetrazione della barriera.

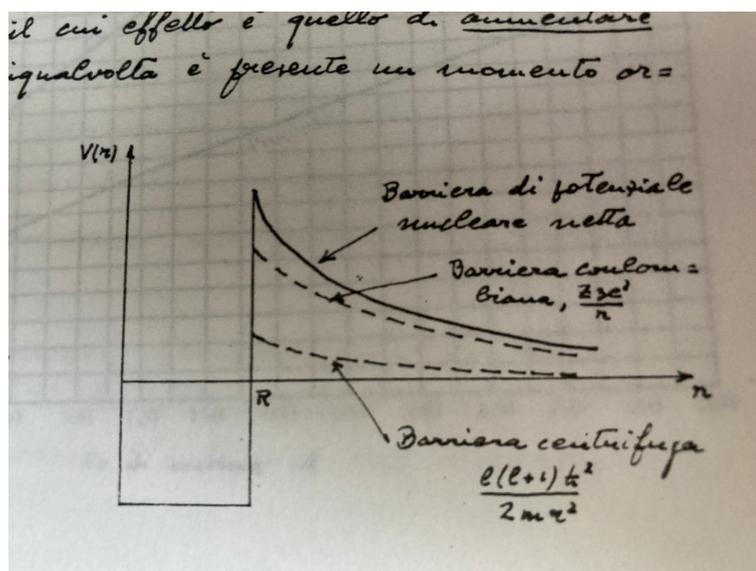


Figura C.5: Fig1.

C.3 Costante di decadimento α

Si ricava ora la relazione fra la trasparenza T e la costante λ_α di decadimento α . Si immagina un gran numero di uguali nuclei α -attivi visti ognuno come l'insieme del nucleo figlio e della particella α costretta a restare nel nucleo dalla presenza di una barriera di potenziale. Ciò è equivalente a considerare un fascio di particelle α , rappresentabile da un'onda di intensità I_0 , all'interno della barriera.

Si supponga che all'istante $t = 0$ ogni particella α incida sulla barriera del suo nucleo e che una frazione T di esse la attraversi. Si potrà esprimere quindi l'intensità dell'onda riflessa dalla barriera verso l'interno del nucleo dopo questo primo tentativo come $(1 - T)I_0$. Dopo n tentativi successivi l'intensità è

$$I_n = (1 - T)^n I_0 = I_0 e^{n \ln(1-T)} \quad (\text{C.32})$$

che per T molto piccolo si riduce a

$$\lim_{T \rightarrow 0} I_n = I_0 e^{-nT} \quad (\text{C.33})$$

Detta v la velocità media della particella α nel nucleo di raggio R , il tempo medio Δt fra due successivi tentativi di attraversamento della barriera è dato da $\Delta t = 2R/v$. Il numero medio n di tentativi nel tempo t è quindi $n = tv/2R$. Di conseguenza

$$I_n = I_0 = I_0 e^{-T \frac{v}{2R} t} \quad (\text{C.34})$$

Il numero medio di tentativi per unità di tempo dn/dt , considerata realisticamente un'energia cinetica di 8 MeV per la particella α nel nucleo, risulta dell'ordine di 10^{21} quindi così alto da poter esprimere I_n come una funzione praticamente *continua* del tempo

$$I_n \longrightarrow I(t) = I_0 e^{-\lambda_\alpha t} \quad (\text{C.35})$$

con

$$\lambda_\alpha = T \frac{v}{2R} = T \frac{dn}{dt} = T \lambda_0 \quad (\text{C.36})$$

la costante di decadimento.

Si osservi che λ_0 non cambia molto da nucleo a nucleo, ed è quindi praticamente sempre dell'ordine di 10^{21} s^{-1} , mentre T può variare molto da nucleo a nucleo.

Considerando ad esempio ^{238}U , con $\lambda_0 \simeq 10^{21} \text{ s}^{-1}$, il numero n di tentativi nell'arco di una vita media $\tau = 6.5 \times 10^9$ anni, risulta pari a circa 10^{39} . Considerando ora la trasparenza T relativamente all'equazione radiale, nell'ipotesi di un nucleo genitore a simmetria sferica e integrando fra $r = R$ ed $r = b$ per un potenziale a forma di barriera coulombiana (fig [C.6](#))

$$\begin{aligned} T &= e^{-2 \int_R^b \sqrt{\frac{2m[V(r) - E]}{\hbar^2}} dr} = e^{-2 \int_R^b \sqrt{\frac{2m[(zZe^2/4\pi\epsilon_0 r) - E]}{\hbar^2}} dr} = \\ &= e^{\sqrt{\frac{2mzZe^2}{\pi\epsilon_0\hbar^2}} \int_R^b \sqrt{\frac{1}{b} - \frac{1}{r}} dr} = e^{\sqrt{\frac{2mzZe^2 b}{\pi\epsilon_0\hbar^2}} \left(\sqrt{\frac{R}{b} - \frac{R^2}{b^2}} - \arccos\sqrt{\frac{R}{b}} \right)} \end{aligned} \quad (\text{C.37})$$

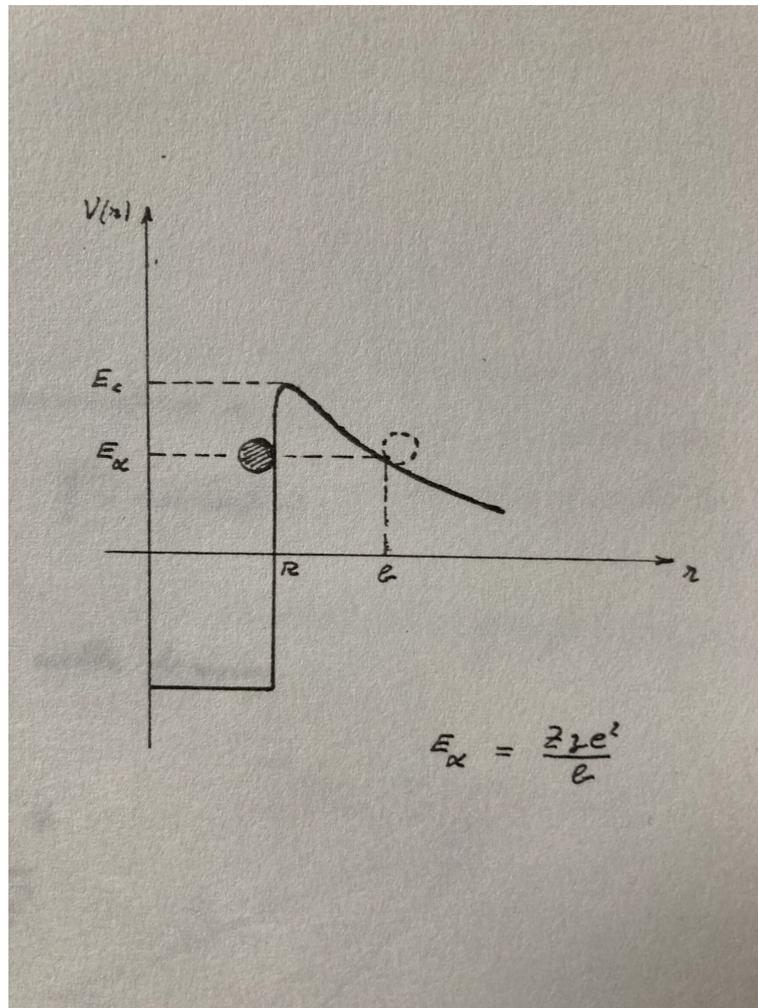


Figura C.6: Fig₁.

dove

$$G = \sqrt{\frac{2mzZe^2b}{\pi\epsilon_0\hbar^2}} \left(\arccos\sqrt{\frac{R}{b}} - \sqrt{\frac{R}{b} - \frac{R^2}{b^2}} \right) \quad (\text{C.38})$$

è detto *fattore di Gamow*, per cui

$$\lambda_\alpha = \lambda_0 e^{-G} \quad (\text{C.39})$$

Se $E_{k,\alpha} \ll E_C$, allora $b \gg R$ e in prima approssimazione il termine in parentesi della C.38 si riduce a $\pi/2 - \sqrt{R/b}$. Il fattore di Gamow pu'ò allora essere scritto come

$$G \simeq A + B\sqrt{R} \quad (\text{C.40})$$

con A e B indipendenti da R

$$A = \sqrt{\frac{\pi m z Z e^2 b}{2 \epsilon_0 \hbar^2}} \quad , \quad B = \sqrt{\frac{2 m z Z e^2 b}{\pi \epsilon_0 \hbar^2}} \quad (\text{C.41})$$

Una ancor più grezza approssimazione, con tolleranza entro il 30%, pone $\pi/2 - \sqrt{R/b} \approx 1$, da cui

$$G \approx \sqrt{\frac{2 m z Z e^2 b}{\pi \epsilon_0 \hbar^2}} \quad , \quad \text{con} \quad b = \frac{z Z e^2}{4 \pi \epsilon_0 E} \quad (\text{C.42})$$

Si consideri l'esempio reale



L'energia cinetica delle particelle α osservate è in questo caso $E_{k,\alpha} = 4.05$ MeV, con una vita media $\tau_{232\text{Th}} = 1.39 \times 10^{10}$ y.

Per il raggio del torio si ottiene $R_{232\text{Th}} \simeq 1.2 \times 10^{-15} A^{1/3} \simeq 7.4 \times 10^{-15}$ m. Prendendo $M_\alpha \simeq 4$ GeV, $E_{k,\alpha} = 4.5$ MeV, $V_0 = 14$ MeV e $U_0 \simeq 40$ MeV [\[1\]](#), si ha

$$T \simeq 4 \times 10^{-40} \quad (\text{C.44})$$

La particella α ha dunque una probabilità estremamente piccola di penetrare la barriera. Questo spiega oltretutto perchè particelle α di bassa energia non siano assorbite da nuclei pesanti neppure grazie all'effetto tunnel.

Per una particella α legata in un nucleo la situazione è però diversa. La sua energia cinetica nella buca è dell'ordine di

$$E'_{k,\alpha} \simeq U_0 + E_{k,\alpha} \simeq 44 \text{ MeV} \quad (\text{C.45})$$

e la corrispondente velocità si può dunque ottenere dall'espressione non relativistica

$$v_\alpha = \sqrt{\frac{2E'_{k,\alpha}}{M_\alpha}} \simeq 0.15 c \quad (\text{C.46})$$

Essendo confinata nella piccola regione di spazio associata al volume del nucleo essa sbatterà quindi contro la barriera di potenziale con una frequenza data approssimativamente da

$$\frac{v_\alpha}{R_0 A^{1/3}} \simeq 6.0 \times 10^{21} \text{ s}^{-1} \quad (\text{C.47})$$

Si deduce una probabilità al secondo per la particella α di sfuggire pari a

$$P(\text{emissione } \alpha) \simeq \frac{v_\alpha}{R_0 A^{1/3}} T \simeq 2.4 \times 10^{-18} \text{ s}^{-1} \quad (\text{C.48})$$

¹Si tenga presente che il calcolo è poco sensibile alla profondità del potenziale nucleare

che coincide con la costante di decadimento λ_α cui corrisponde una vita media

$$\tau_\alpha = \frac{1}{\lambda_\alpha} \simeq 0.4 \times 10^{18} \text{ s} \simeq 1.3 \times 10^{10} \text{ y} \quad (\text{C.49})$$

valore molto prossimo a quello osservato sperimentalmente per il ^{232}Th . La probabilità di emissione dipende quindi sensibilmente dalla massa e dall'energia della particella emessa, e questo ha un risvolto importante anche nel fenomeno della fissione spontanea. Il fatto poi che la probabilità di emissione risulti proporzionale ad $E_{k,\alpha}^{1/2}$, e che quindi la vita media per decadimento α si accorci al crescere di $E_{k,\alpha}$, è consistente con quanto ci si attende anche intuitivamente.

Appendice D

Teoria di Fermi del decadimento β

Si parte dalla considerazione che in un decadimento β l'elettrone e il neutrino vengono formati al momento del decadimento e della loro emissione dall'atomo. Siano ψ_e e ψ_ν le funzioni d'onda che descrivono gli stati nei quali sono state create le due particelle e si assuma che siano rappresentabili da due onde piane di impulsi rispettivamente \vec{p}_e e \vec{p}_ν

$$\psi_e = N_e e^{i\vec{p}_e \cdot \vec{r}/\hbar} \quad , \quad \psi_\nu = N_\nu e^{i\vec{p}_\nu \cdot \vec{r}/\hbar} \quad (\text{D.1})$$

dove N rappresenta un fattore di normalizzazione. ψ_e è in realtà più complicata di quanto detto in quanto sente l'influenza della carica nucleare Ze . Considerarla un'onda piana è una buona approssimazione se l'energia dell'elettrone è molto maggiore dell'energia media di legame degli elettroni del nucleo di numero atomico Z . Per elettroni di bassa energia, dell'ordine ad esempio di 200 KeV, e in prossimità di un nucleo con alto valore di Z , risulta che ψ_e è fortemente perturbata.

Fermi assunse che la probabilità d'emissione dipenda dalla probabilità per l'elettrone e il neutrino di essere "creati" contemporaneamente e nello stesso punto¹, coincidente con le coordinate del centro di massa O del nucleo, che si considera anche come origine del sistema di riferimento. La probabilità d'emissione dipende quindi dal prodotto $|\psi_e(O)|^2 |\psi_\nu(O)|^2$, ma anche da altri fattori "la cui natura è incerta".

Un fattore è il modulo quadro dell'elemento di matrice \mathcal{M} fra gli stati iniziale e finale del nucleo. Questo elemento di matrice è analogo a quello usato nella descrizione dell'emissione di fotoni per la quale, nel caso di radiazione

¹Con questa assunzione Fermi ipotizzò sostanzialmente che non vi fosse necessità di particella mediatrice per questo processo, essendo puntuale, e come si vedrà più avanti parlando delle interazioni deboli, questa assunzione è una approssimazione valida purchè le energie in gioco non siano troppo alte.

da dipolo, si ha

$$\mathcal{M} = \int \psi_{fin}^* (\text{mom. el.}) \psi_{in} d\tau$$

Nel caso dell'interazione β , \mathcal{M} non è noto esattamente. Per la trasformazione $n \rightarrow p$, la forma più semplice da scegliere, se si assume che nel processo sia coinvolto un solo nucleone del nucleo, è

$$\mathcal{M} = \int \psi_p^* \psi_n d\tau \quad (\text{D.2})$$

dove ψ_n e ψ_p rappresentano rispettivamente lo stato iniziale e finale del nucleone coinvolto. Se si tiene anche conto dei possibili stati di spin, allora \mathcal{M} diventa un vettore la cui generica componente è

$$\mathcal{M}_i = \int \psi_p^* \sigma_i \psi_n d\tau \quad (\text{D.3})$$

dove σ_i è l' i -ma componente di un operatore relativistico di spin, per cui

$$|\mathcal{M}|^2 = \sum_{i=1}^3 |\mathcal{M}_i|^2 \quad (\text{D.4})$$

Si può mostrare come la scelta di \mathcal{M} determini regole di selezione per i decadimenti β del tipo di quelle evidenziabili dai diagrammi di Sargent.

L'espressione per la probabilità d'emissione include anche un fattore "costante" g^2 che rappresenta l'intensità dell'accoppiamento che dà luogo all'emissione e gioca il ruolo di una costante universale per la quale si trova sperimentalmente

$$10^{-48} \text{ g m}^3 \text{ s}^{-2} \lesssim g \lesssim 10^{-49} \text{ g m}^3 \text{ s}^{-2} \quad (\text{D.5})$$

Tenendo quindi conto di tutto quanto detto e usando la Regola d'Oro n.2 si ha, per la probabilità d'emissione

$$\frac{2\pi}{\hbar} (|\psi_e(O)| |\psi_\nu(O)| |\mathcal{M}| g)^2 \frac{dn}{dE} \quad (\text{D.6})$$

con dn/dE la densità energetica degli stati finali e O che come detto, indica il "punto in cui avviene" il decadimento, assunto come il centro di massa del nucleo genitore.

Le funzioni d'onda ψ sono normalizzate sul volume V in modo che

$$\int_V \psi^* \psi d\tau = 1 \quad , \text{ per cui: } \quad N = \frac{1}{\sqrt{V}} \quad (\text{D.7})$$

e

$$\psi_e = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\vec{p}_e \cdot \vec{r}/\hbar} \quad , \quad \psi_\nu = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\vec{p}_\nu \cdot \vec{r}/\hbar} \quad (\text{D.8})$$

Ha senso dire che il nucleo è posizionato in $\vec{r} = 0$ solo se ψ cambia poco sulle dimensioni del nucleo stesso.

Per valori dell'impulso p tipici dei decadimenti β , il "passo" con cui si hanno sensibili variazioni di ψ è dato da $\lambda = \hbar/p \simeq 10^{-13}$ m, quindi grande se confrontato con le dimensioni nucleari, dell'ordine di 10^{-14} m, cui sono estesi gli integrali che compaiono nell'elemento di matrice. Ha quindi abbastanza senso considerare il nucleo in buona approssimazione "puntiforme" in $\vec{r} = 0$. In tal caso le [D.8](#) si riducono a

$$\psi_e(O) = \frac{1}{\sqrt{V}} \quad , \quad \psi_\nu(O) = \frac{1}{\sqrt{V}} \quad (\text{D.9})$$

Si consideri ora la densità degli stati finali. Il numero dn' di stati d'onda piana con valore dell'impulso compreso fra p e $p + dp$, considerando la particella dovunque in V è

$$\frac{dn'}{dp} dp = \frac{V p^2 dp}{2\pi^2 \hbar^3} \quad (\text{D.10})$$

quindi si ha, per dn

$$dn = \frac{p_e^2 dp_e}{2\pi^2 \hbar^3} \frac{p_\nu^2 dp_\nu}{2\pi^2 \hbar^3} V^2 = \frac{p_e^2 p_\nu^2}{4\pi^4 \hbar^6} V^2 dp_e dp_\nu \quad (\text{D.11})$$

con $dp_e dp_\nu = J dp_e dE$, essendo "J" lo Jacobiano che trascurando l'energia di rinculo del nucleo rispetto alle energie di elettrone e neutrino, e assumendo nulla la massa del neutrino, $m_\nu = 0$, può essere calcolato partendo dalla relazione $E = cp_\nu + E_e$, ottenendo² $J = 1/c$. Quindi:

$$\frac{dn}{dE} = \frac{p_e^2 p_\nu^2}{4\pi^4 \hbar^6 c} V^2 dp_e \quad (\text{D.12})$$

In base quindi alla [D.6](#) si ottiene la probabilità d'emissione per unità di tempo $P(p_\nu, p_e) dp_e$ in funzione della sola variabile misurata, cioè l'impulso p_e dell'elettrone

$$P(p_\nu, p_e) dp_e = \frac{2\pi}{\hbar} \left(\frac{1}{V} |\mathcal{M}| g \right)^2 \frac{p_e^2 p_\nu^2 V^2 dp_e}{4\pi^4 \hbar^6 c} \quad (\text{D.13})$$

Sempre nell'ipotesi $m_\nu = 0$ si ha anche, detta E_{tot} l'energia totale a disposizione nello stato finale del decadimento, che coincide praticamente quasi con l'estremo superiore $E_{e,max}$ della distribuzione in energia degli elettroni emessi: $E_\nu = p_\nu c = E_{tot} - E_e$, da cui: $p_\nu = (E_{tot} - E_e)/c$, che sostituito dá, per la probabilità d'emissione

$$P(p_e) dp_e = \frac{g^2 |\mathcal{M}|^2}{2\pi^3 \hbar^7 c^3} (E_{tot} - E_e)^2 p_e^2 dp_e \quad (\text{D.14})$$

$$^2 J = \begin{vmatrix} \frac{\partial p_e}{\partial p_e} & \frac{\partial p_e}{\partial E} \\ \frac{\partial p_\nu}{\partial p_e} & \frac{\partial p_\nu}{\partial E} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \frac{\partial p_e}{\partial E} \\ 0 & \frac{1}{c} \end{vmatrix} = \frac{1}{c}$$

Esprimendo infine $p_{e,max}$ dalla $E_{e,max} = \sqrt{m^2 c^4 + p_{e,max}^2 c^2} \simeq E_{tot}$, si ha:

$$P(p_e) dp_e = \frac{g^2 |\mathcal{M}|^2}{2\pi^3 \hbar^7 c^3} \left(\sqrt{m^2 c^4 + p_{e,max}^2 c^2} - \sqrt{m^2 c^4 + p_e^2 c^2} \right)^2 p_e^2 dp_e \quad (\text{D.15})$$

che rappresenta sostanzialmente la distribuzione dello spazio delle fasi nel decadimento a tre corpi in cui la massa del nucleo residuo è molto maggiore di quella dell'elettrone, la cui massa è a sua volta molto maggiore di quella del neutrino.

Per trovare ora la vita media τ_β bisogna integrare su tutti i possibili valori di p_e

$$\lambda_\beta = \frac{1}{\tau_\beta} = \frac{g^2 |\mathcal{M}|^2}{2\pi^3 \hbar^7 c^3} \int_0^{p_{e,max}} \left(\sqrt{m^2 c^4 + p_{e,max}^2 c^2} - \sqrt{m^2 c^4 + p_e^2 c^2} \right)^2 p_e^2 dp_e \quad (\text{D.16})$$

Dalla misura della vita media τ_β si può quindi ottenere il valore del prodotto fra la costante d'accoppiamento e l'elemento di matrice $g |\mathcal{M}|$.

Per risolvere l'integrale conviene ridefinire gli impulsi in unità di mc , rendendo così esplicita la dipendenza dalla massa dell'elettrone e ottenendo le due quantità $\eta = p_e / (mc)$ ed $\eta_0 = p_{e,max} / (mc)$, tramite le quali si riesprime l'integrale della [D.16](#), chiamandolo $F(\eta_0)$:

$$\frac{1}{\tau_\beta} = \frac{g^2 |\mathcal{M}|^2 m^5 c^4}{2\pi^3 \hbar^7} F(\eta_0) \quad (\text{D.17a})$$

$$F(\eta_0) = \int_0^{\eta_0} \left(\sqrt{1 + \eta_0^2} - \sqrt{1 + \eta^2} \right)^2 \eta^2 d\eta \quad (\text{D.17b})$$

Integrando la [D.17b](#) si ottiene

$$\begin{aligned} F(\eta_0) &= -\frac{1}{4}\eta_0 - \frac{1}{12}\eta_0^3 + \frac{1}{30}\eta_0^5 + \frac{1}{4}\sqrt{1 + \eta_0^2} \ln \left(\eta_0 + \sqrt{1 + \eta_0^2} \right) \\ &= -\frac{1}{4}\eta_0 - \frac{1}{12}\eta_0^3 + \frac{1}{30}\eta_0^5 + \frac{1}{4}\sqrt{1 + \eta_0^2} \operatorname{senh}^{-1}\eta_0 \end{aligned} \quad (\text{D.18})$$

Sviluppando il logaritmo e ottenendo termini con potenze di η_0 che cancellano quelli delle potenze inferiori a η_0^7 nell'espressione per $F(\eta_0)$, si individuano quindi per $F(\eta_0)$ le seguenti forme limite :

$$\eta_0 \gg 1 : F(\eta_0) \longrightarrow \frac{1}{30} \eta_0^5 \quad (\text{D.19a})$$

$$\eta_0 \ll 1 : F(\eta_0) \longrightarrow \frac{2}{105} \eta_0^7 \quad (\text{D.19b})$$

Nella prima, relativa ai decadimenti β in cui $E_{tot} \approx E_{e,max}$ è abbastanza maggiore di $m_e c^2$, la vita media dipende dunque dalla quinta potenza di

E_{tot} , in accordo con le osservazioni di Sargent.

Le approssimazioni fatte finora sono un pó drastiche, sia per quanto concerne l'elemento di matrice che per le funzioni d'onda dell'elettrone o positrone emessi. Considerare queste ultime delle semplici onde piane porta infatti a trascurare l'interazione coulombiana fra l'elettrone o il positrone e il nucleo. Per tenerne conto si introduce, nell'espressione integranda per ottenere λ_β , un fattore $f(\pm Z, \eta_0)$ dipendente dal nucleo e dall'energia dell'elettrone. La funzione integrata risultante dipende anch'essa da Z e si scrive $F(\pm Z, \eta_0)$, che per piccoli valori di Z si riduce alla $F(\pm Z, \eta_0) \approx F(\eta_0)$ introdotta sopra. Si ha quindi per λ_β

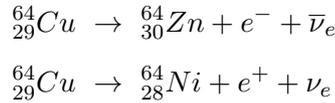
$$\lambda_\beta = \frac{1}{\tau_\beta} = \frac{g^2 m^5 c^4}{2\pi^3 \hbar^7} |\mathcal{M}|^2 F(\pm Z, \eta_0) \quad (\text{D.20})$$

Nei decadimenti β con $E_{tot} \gg m_e c^2$, l'impulso dell'elettrone emesso è mediamente grande e si trova $F(\pm Z, \eta_0) \approx 1$.

$F(\pm Z, \eta_0)$ è significativamente diversa dall'unità soltanto per valori grandi di Z e piccoli delle energie.

Dalla [D.20](#), ricordando la [D.15](#), si può ottenere la forma dello spettro d'emissione β , come mostrato da Fermi.

In figura [D.1](#) sono mostrate le diverse forme delle distribuzioni d'impulso di e^- ed e^+ nei decadimenti β del rame.



Si noti come, nell'ipotesi fatta che la massa del neutrino sia nulla ($m_\nu = 0$), l'andamento della distribuzione verso l'estremo superiore dei valori di p_e sia quello di un avvicinamento dolce al valore nullo, che Fermi ha mostrato essere parabolico. Se viceversa la massa del neutrino non fosse nulla si può provare che tale avvicinamento sarebbe con derivata decrescente tendente a $-\infty$, tanto più marcato quanto maggiore fosse la massa del neutrino. I dati sperimentali sono compatibili con $m_\nu = 0$ o comunque con una m_ν inferiore a quanto rilevabile dai dati stessi.

Ciò rende chiaramente difficoltoso individuare sperimentalmente con precisione l'estremo superiore $p_{e,max}$ dei valori di p_e , ovvero il punto in cui la distribuzione incontra l'asse delle ascisse, e quindi anche $E_{e,max}$.

Un modo più accurato per determinare $E_{e,max}$ consiste nell'utilizzare i grafici di Kurie. Essi si ottengono dalla [D.14](#) considerando l'intensità $I(p_e)$ dell'emissione di elettroni con impulso p_e , che è una quantità misurabile,

$$I(p_e) = (E_{e,max} - E)^2 p_e^2 C(Z, p_e) \quad (\text{D.21})$$

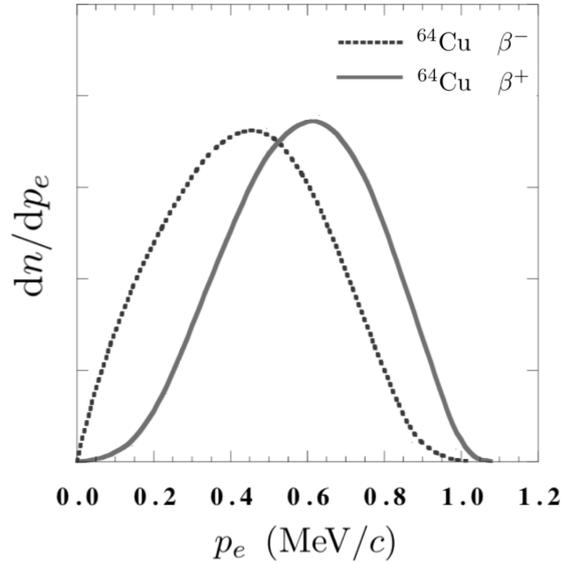


Figura D.1: Distribuzioni in impulso di e^- ed e^+ emessi nei decadimenti β del $^{64}_{29}\text{Cu}$.

dove $C(Z, p_e)$ include tutte le costanti e anche la dipendenza dalla carica Z del nucleo. Si ha quindi

$$\sqrt{\frac{I(p_e)}{p_e^2 C(Z, p_e)}} = (E_{e,max} - E) \quad (\text{D.22})$$

Graficando il radicale della [D.22](#) verso l'energia E si dovrebbe ottenere una retta di cui ottenere agilmente l'intercetta sull'asse orizzontale delle energie. Anche in questo caso una massa non nulla del neutrino darebbe luogo a un andamento del grafico di Kurie che intercetterebbe l'asse delle ascisse con pendenza infinita, come mostrato in figura [D.2](#)

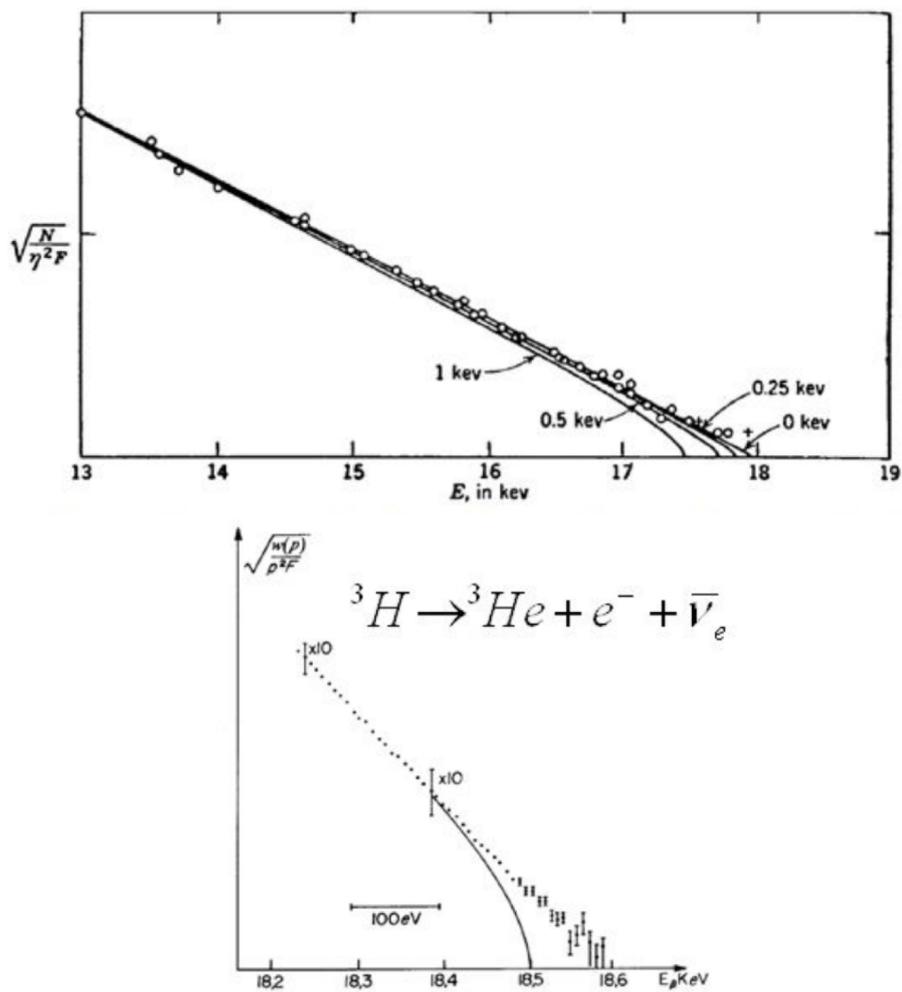


Figura D.2: Kurie-plot del decadimento β^- del tritio: ${}^3\text{H} \rightarrow {}^3\text{He} + e^- + \bar{\nu}_e$ del tritio. Assieme ai dati sperimentali, anche gli andamenti attesi in funzione di diverse ipotesi sulla massa dell'antineutrino dell'elettrone.

Appendice E

Instabilità di un nucleo prolato

Si parta da un nucleo genitore sferico di raggio $R_0 = r_0 A^{1/3}$ e si immagini di deformarlo leggermente, riferendosi a un sistema cartesiano ortogonale centrato nel suo baricentro, lungo un asse, ad esempio lungo z , in modo che assuma almeno approssimativamente la forma di un ellissoide di rotazione prolato di equazione

$$\frac{(x^2 + y^2)}{b^2} + \frac{z^2}{a^2} = 1 \quad (\text{E.1})$$

La supposta incomprimibilità della materia nucleare implica che la defor-

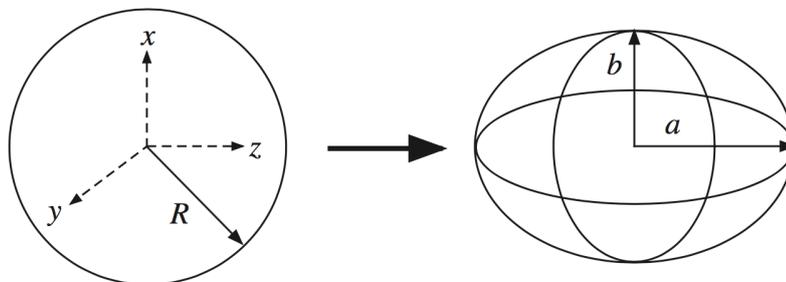


Figura E.1: Deformazione da sfera a ellissoide prolato.

mazione mantenga inalterato il volume

$$V = \frac{4}{3} \pi a b^2 = \frac{4}{3} \pi R_0^3 \quad (\text{E.2})$$

Indicando con ϵ il termine perturbativo positivo che interviene a modificare il raggio R_0 della goccia sferica si può allora scrivere

$$a = R_0 (1 + \epsilon) \quad (\text{E.3})$$

e di conseguenza, per la [E.2](#)

$$b = \frac{R_0}{(1 + \epsilon)^{1/2}} < a \quad (\text{E.4})$$

La deformazione produce una variazione dell'energia di legame del nucleo. Detta quindi $B^*(A, Z)$ l'energia del nucleo perturbato si ha che se la differenza

$$\Delta B^*(A, Z) = B(A, Z) - B^*(A, Z) \quad (\text{E.5})$$

è negativa, allora il nucleo è stabile rispetto alla deformazione e una volta cessata la perturbazione, diseccitandosi, ritorna all'originaria condizione di equilibrio con forma sferica di raggio R_0 . Se invece $\Delta B^*(A, Z) > 0$, allora il nucleo è instabile rispetto alla deformazione e se questa viene esaltata fino al punto da provocare la scissione del nucleo in due frammenti di masse confrontabili, si ha il processo di fissione indotto da una perturbazione esterna. Per proseguire ci si riferisca sempre alla formula semiempirica di Weizsäcker e si osservi che i termini di volume, di simmetria e di accoppiamento, essendo dipendenti dalla densità del nucleo che nell'ipotesi di incomprimibilità rimane immutata per deformazioni del volume, rimangono anch'essi sostanzialmente immutati dalla deformazione. Nel calcolo della differenza fra le energie di legame intervengono quindi attivamente soltanto i termini di superficie e coulombiano

$$\Delta B^*(A, Z) = B_S(A) + B_C(A, Z) - B_S^*(A) - B_C^*(A, Z) \quad (\text{E.6})$$

Il termine coulombiano del nucleo deformato è chiaramente minore di quello del nucleo sferico in quanto la deformazione implica un aumento delle distanze medie fra i protoni; il termine di superficie del nucleo deformato è invece maggiore del suo omologo per il nucleo non deformato, in quanto la deformazione implica un aumento della superficie.

Supponendo che la carica elettrica sia uniformemente distribuita entro il volume dell'ellissoide di rotazione si ha

$$\begin{cases} \rho_Z(\vec{r}) = \frac{3Ze}{4\pi ab^2} & \text{per, } \frac{(x^2 + y^2)}{b^2} + \frac{z^2}{a^2} \leq 1 \\ \rho_Z(\vec{r}) = 0 & \text{per, } \frac{(x^2 + y^2)}{b^2} + \frac{z^2}{a^2} > 1 \end{cases} \quad (\text{E.7})$$

Calcolando quindi le energie di superficie e coulombiana del nucleo deformato si ottiene

$$B_S^*(A) = \beta_S(\epsilon) B_S(A) \quad , \quad B_C^*(A, Z) = \beta_C(\epsilon) B_C(A, Z) \quad (\text{E.8})$$

con

$$\begin{cases} \beta_C(\epsilon) = \frac{1}{2} \frac{R_0}{(a^2 - b^2)^{1/2}} \ln \frac{a + (a^2 - b^2)^{1/2}}{a - (a^2 - b^2)^{1/2}} \\ \beta_S(\epsilon) = \frac{1}{2} \left(\frac{b^2}{R_0^2} + \frac{1}{2} \right) \frac{a^2 b}{R_0^2 (a^2 - b^2)^{1/2}} \arccos \left(\frac{b}{a} \right) \end{cases} \quad (\text{E.9})$$

Supposto ragionevolmente piccolo il parametro ϵ di deformazione, si possono sviluppare in serie le [E.9](#), ferdandosi al primo termine non nullo in potenze di ϵ

$$\begin{cases} \beta_C(\epsilon) \simeq 1 - \frac{1}{5}\epsilon^2 \\ \beta_S(\epsilon) \simeq 1 + \frac{2}{5}\epsilon^2 \end{cases} \quad (\text{E.10})$$

ottenendo quindi per $\Delta B^*(A, Z)$

$$\Delta B^*(A, Z) \simeq \frac{1}{5}\epsilon^2 A^{2/3} \left[2b_S - b_C \frac{Z^2}{A} \right] \text{ MeV} \quad (\text{E.11})$$

Per $\Delta B^*(A, Z) = 0$ la goccia di liquido nucleonico è in equilibrio instabile, da cui si ricava il valore critico del rapporto Z^2/A

$$\left(\frac{Z^2}{A} \right)_0 = \frac{2b_S}{b_C} \simeq 49.4 \quad (\text{E.12})$$

Appendice F

Richiami di Relatività ristretta

Qui di seguito sono richiamati in forma riassuntiva alcuni concetti fondamentali della relatività ristretta necessari alla trattazione di gran parte dei fenomeni che coinvolgono nuclei e particelle.

Si ricordano i postulati fondanti, ovvero che le leggi della fisica sono indipendenti dall'osservatore purchè questo sia solidale con un qualsiasi sistema di riferimento inerziale, e inoltre la velocità c della luce nel vuoto è la massima velocità raggiungibile in natura, è indipendente dal sistema di riferimento inerziale e costituisce una costante universale.

Scelti allora due sistemi di riferimento inerziali S ed S' , cartesiani ortogonali, con le origini O ed O' coincidenti all'istante $t = t' = 0$ ed S' in moto con velocità $v = v_z = \beta c$ rispetto ad S , la relazione fra le coordinate di un qualsiasi evento descritto rispetto a un sistema di riferimento o rispetto all'altro, è data dalle trasformazioni di Lorentz

$$\begin{cases} ct' = \gamma(ct - \beta z) \\ x' = x \\ y' = y \\ z' = \gamma(z - \beta ct) \end{cases} \quad (\text{F.1})$$

con $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$. Le trasformazioni inverse sono:

$$\begin{cases} ct = \gamma(ct' + \beta z') \\ x = x' \\ y = y' \\ z = \gamma(z' + \beta ct') \end{cases} \quad (\text{F.2})$$

Le componenti *covarianti* di un quadrivettore x sono indicate da apici in caratteri greci μ, ν , ecc., per cui: x^μ , $\mu = 0, 1, 2, 3$, e quindi: $x \equiv$

$$(x^0 = ct, x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z) \equiv (x^0, \vec{x}).$$

Le componenti *controvarianti* di un quadrivettore x sono invece indicate da pedici in caratteri greci, per cui: x_μ , $\mu = 0, 1, 2, 3$, e quindi: $x \equiv (x_0 = x^0 = ct, x_1 = -x, x_2 = -y, x_3 = -z) \equiv (x_0, -\vec{x})$.

Il prodotto scalare di due quadrivettori x ed y è dato, con la solita regola di Einstein di somma sugli indici ripetuti, da

$$x \cdot y = x^\mu y_\mu = x^0 y^0 - x^1 y^1 - x^2 y^2 - x^3 y^3 \quad (\text{F.3})$$

ed è una quantità invariante per le trasformazioni di Lorentz, che equivalgono alla composizione di una *rotazione* e di una *traslazione*; similmente nello spazio tridimensionale il prodotto scalare di due qualsiasi vettori è invariante per rotazioni.

Il segno "−" nel prodotto scalare implica che lo spazio quadrivettoriale non è Euclideo.

Quanto visto ora si può anche esprimere introducendo il tensore metrico $g^{\mu\nu}$ caratterizzato dall'aver i termini diagonali pari a $(1, -1, -1, -1)$ e uguali a 0 tutti i termini fuori dalla diagonale. I termini controvarianti del tensore metrico coincidono con quelli covarianti, cioè $g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu}$ e si ha

$$x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu \quad \text{e} \quad x^\mu = g^{\mu\nu} x_\nu \quad (\text{F.4})$$

Grazie al tensore metrico il prodotto scalare si può scrivere come

$$x \cdot y = g^{\mu\nu} x_\mu y_\nu = g_{\mu\nu} x^\mu y^\nu \quad (\text{F.5})$$

Il prodotto scalare di un quadrivettore per se stesso, $x^\mu x_\mu = x^2$ è anche una quantità Lorentz-invariante.

Nel caso sia $x^2 = x^\mu x_\mu > 0$ il quadrivettore è detto di tipo *tempo*, se invece $x^2 = x^\mu x_\mu = 0$ esso è detto di tipo *luce*, se infine $x^2 = x^\mu x_\mu < 0$ esso è detto di tipo *spazio*.

La trasformazione di Lorentz fra due sistemi di riferimento inerziali si può anche scrivere come

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = a^\mu_\nu x^\nu \quad (\text{F.6})$$

e l'invarianza del prodotto scalare fra due quadrivettori implica

$$a^\mu_\nu a^\lambda_\mu = \delta^\lambda_\nu \quad (\text{F.7})$$

con δ^λ_ν il simbolo di Kronecker.

Anche il vettore impulso \vec{p} e l'energia totale E di una particella definiscono un quadrivettore p , comunemente detto *quadrivettore energia-impulso* o *quadri-impulso*

$$p = \left(\frac{E}{c}, \vec{p} \right) = \left(\frac{E}{c}, p_x, p_y, p_z \right) = (p^0, p^1, p^2, p^3) \quad (\text{F.8})$$

Le trasformazioni di Lorentz correlano anche le singole componenti del quadrivettore energia-impulso di una particella fra due diversi sistemi inerziali S ed S' :

$$\begin{cases} \frac{E'}{c} = \gamma \left(\frac{E}{c} - \beta p_z \right) \\ p'_x = p_x \\ p'_y = p_y \\ p'_z = \gamma \left(p_z - \beta \frac{E}{c} \right) \end{cases} \quad (\text{F.9})$$

Similmente a quanto visto per le coordinate, presi due quadrivettori energia-impulso, $p = (p^0, \vec{p})$ e $q = (q^0, \vec{q})$, di due diversi sistemi fisici, o particelle, il prodotto scalare dei due, $p \cdot q = (p^0 q^0 - \vec{p} \cdot \vec{q})$ è Lorentz-invariante, ed è quindi una costante del moto. Nel caso particolare del prodotto scalare di un quadrivettore energia-impulso per se stesso si ha

$$p \cdot p = p^\mu p_\mu = p^2 = \frac{E^2}{c^2} - |\vec{p}|^2 = \text{cost.} \quad (\text{F.10})$$

che data l'indipendenza dal particolare sistema di riferimento inerziale, può essere considerato nel sistema a riposo con la particella, da cui $\vec{p} = 0$, e correlato con l'energia a riposo $E_0 = mc^2$ della particella

$$p \cdot p = \frac{E_0^2}{c^2} = m^2 c^2 \quad (\text{F.11})$$

con m la massa della particella.

L'impulso e l'energia totale di una particella di massa m , in moto con velocità \vec{v} rispetto a un osservatore inerziale sono dati da

$$\begin{cases} \vec{p} = m\gamma\vec{v} = m\gamma\vec{\beta}c \\ E = m\gamma c^2 \end{cases} \quad (\text{F.12})$$

e ne consegue

$$\vec{\beta} = \frac{c\vec{p}}{E} \quad \text{e} \quad \gamma = \frac{E}{mc^2} \quad (\text{F.13})$$

La più generale relazione fra impulso \vec{p} , energia E e velocità $\vec{\beta} = \vec{v}/c$ può quindi essere scritta in una forma valida sia per corpi dotati di massa che per corpi di massa nulla, come ad esempio il fotone

$$\vec{p} = \frac{E}{c} \vec{\beta} = \frac{E}{c^2} \vec{v} \quad (\text{F.14})$$

Si può anche definire l'energia cinetica E_k di una particella rispetto a un osservatore inerziale, come differenza fra la sua energia E rispetto a tale osservatore e la sua energia a riposo E_0 , indipendente dal particolare sistema di riferimento inerziale

$$E = m\gamma c^2 = E_0 + E_k = mc^2 + E_k \quad (\text{F.15})$$

da cui, ricordando che $E = \sqrt{|\vec{p}|^2 c^2 + m^2 c^4}$,

$$E_k = E - mc^2 = mc^2 (\gamma - 1) = \sqrt{|\vec{p}|^2 c^2 + m^2 c^4} - mc^2 \quad (\text{F.16})$$

e ancora

$$c |\vec{p}| = \sqrt{E_k^2 + 2mc^2 E_k} \quad (\text{F.17})$$

Considerando ora:

$$\frac{dE}{dp} = \frac{1}{2\sqrt{|\vec{p}|^2 c^2 + m^2 c^4}} 2pc^2 = \frac{c^2}{E} p = \frac{p}{m\gamma} \quad (\text{F.18})$$

si ottiene:

$$dE = \frac{p}{m\gamma} dp \implies dE = v dp \quad (\text{F.19})$$

La somma e la differenza fra quadrivettori sono ancora dei quadrivettori, ne consegue che moltiplicando scalarmente per se stesse, o elevando a quadrato, somme o differenze di quadrivettori, si ottengono delle quantità Lorentz-invarianti. Se ad esempio si considerano quattro quadrivettori $q_i = (q_i^0, q_i^1, q_i^2, q_i^3)$ e se ne definisce la somma $q = \sum_i q_i$, anche $q \cdot q = q^2$ è una quantità Lorentz-invariante

$$q^2 = \left(\sum_i q_i^0 \right)^2 - \left(\sum_i q_i^1 \right)^2 - \left(\sum_i q_i^2 \right)^2 - \left(\sum_i q_i^3 \right)^2 \quad (\text{F.20})$$

Se q_i è il vettore energia-impulso di un gruppo di particelle, allora $q \cdot q = q^2$ è connesso al quadrato dell'energia a riposo del sistema fisico costituito da quel gruppo di particelle.

F.1 Coordinate parallele e trasverse

Trattando di decadimenti o di interazioni fra particelle o fra particelle e nuclei, spesso ci si trova nella condizione in cui il sistema fisico e la struttura sperimentale sono meglio descritti se ci si riferisce a una geometria spaziale con simmetria cilindrica, in cui l'asse z di simmetria è parallelo alle velocità delle particelle incidenti o nel caso di decadimenti, è parallelo alla velocità della particella che decadrà, se questa è inizialmente in moto nel sistema di riferimento scelto.

È quindi utile riesprimere le trasformazioni di Lorentz e altri risultati già individuati in funzione di componenti parallele "||" e ortogonali, o trasverse, "⊥" alla direzione della velocità relativa \vec{v} fra due sistemi di riferimento inerziali. La [F.6](#) diventa allora, se le origini dei due sistemi coincidono per

$$t = t' = 0$$

$$\begin{cases} x^{0'} = \gamma(x^0 - \beta x_{\parallel}) \\ x'_{\parallel} = \gamma(x_{\parallel} - \beta x^0) \\ \vec{x}'_{\perp} = \vec{x}_{\perp} \end{cases} \quad (\text{F.21})$$

dove $\beta = |\vec{v}|/c$, $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$, x_{\parallel} è la componente di x nella direzione di \vec{v} , per cui $\vec{x}_{\parallel} = (\vec{x} \cdot \vec{v}) \vec{v}/v^2$, e $\vec{x}_{\perp} = \vec{x} - \vec{x}_{\parallel}$.

In questo caso la trasformazione di Lorentz è definita da tre soli parametri, ovvero le tre componenti di \vec{v} . Se i due sistemi di riferimento fossero anche ruotati uno rispetto all'altro si sarebbe nel caso più generale in cui la trasformazione dipende da sei parametri tre dei quali sarebbero gli angoli di Eulero.

Come già visto precedentemente la trasformazione di Lorentz inversa dal sistema accentato a quello non accentato si ottiene sostituendo nelle [F.21](#) i termini accentati con i non-accantati e cambiando il segno della velocità

$$\begin{cases} x^0 = \gamma(x^{0'} + \beta x'_{\parallel}) \\ x_{\parallel} = \gamma(x'_{\parallel} + \beta x^0) \\ \vec{x}_{\perp} = \vec{x}'_{\perp} \end{cases} \quad (\text{F.22})$$

Similmente si ha, per il quadrivettore energia-impulso

$$\begin{cases} \frac{E'}{c} \equiv p^{0'} = \gamma(p^0 - \beta p_{\parallel}) \\ p'_{\parallel} = \gamma(p_{\parallel} - \beta p^0) \\ \vec{p}'_{\perp} = \vec{p}_{\perp} \end{cases} \quad (\text{F.23})$$

Si introducono ora due variabili molto utili per l'analisi dei fenomeni dinamici relativistici. La prima è la *rapidità*, definita come

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2} \ln \frac{E + cp_{\parallel}}{E - cp_{\parallel}} \\ &= \frac{1}{2} \ln \frac{1 + cp_{\parallel}/E}{1 - cp_{\parallel}/E} = \operatorname{arctanh} \left(\frac{cp_{\parallel}}{E} \right) = \operatorname{arctanh} (\beta_L) \end{aligned} \quad (\text{F.24})$$

e che risulta più appropriata della componente *longitudinale*¹ ($\beta_L = cp_{\parallel}/E$) della velocità, in quanto ha il vantaggio di essere additiva per variazioni longitudinali della velocità. Una particella con rapidità y in un definito sistema inerziale presenta cioè una rapidità pari ad $y + dy$ in un sistema di riferimento che si muove con rapidità dy nella direzione $-z$, rispetto al sistema di riferimento originale, come si può dedurre dalla formula relativistica di addizione delle velocità.

¹Dalla [F.13](#) si ha: $\vec{\beta} = \vec{\beta}_L + \vec{\beta}_{\perp}$.

Nella fisica sperimentale delle particelle e degli ioni a energie relativistiche si utilizza comunemente un'altra grandezza, legata alla rapidità e detta *pseudorapidità*, indicata con η e definita come

$$\eta = -\ln\left(\operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2}\right) \quad (\text{F.25})$$

dove ϑ è l'angolo compreso fra il tri-impulso \vec{p} della particella e la direzione positiva dell'asse del fascio incidente. Solitamente la distribuzione dei prodotti di reazione in funzione dell'angolo polare varia molto e bruscamente in prossimità dei piccoli angoli in avanti e dei grandi angoli all'indietro, riferendosi alla pseudorapidità anzichè all'angolo polare si hanno andamenti più dolci.

La pseudorapidità può essere espressa in funzione del tri-impulso ottenendo

$$\eta = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{|\vec{p}| + p_{\parallel}}{|\vec{p}| - p_{\parallel}}\right) = \operatorname{arctgh}\left(\frac{p_{\parallel}}{|\vec{p}|}\right) \quad (\text{F.26})$$

Si osservi che la pseudorapidità η si ottiene dalla rapidità y al limite quando la particella considerata ha un'energia a riposo mc^2 trascurabile rispetto al proprio quadri-impulso p , per cui $E \simeq p$. Si noti che comunque la pseudorapidità dipende esclusivamente dall'angolo polare e non dall'energia della particella. La rapidità permette anche di costruire la variabile Lorentz-invariante

$$\Delta R = \sqrt{(\Delta y)^2 + (\Delta\varphi)^2} \quad (\text{F.27})$$

che rappresenta la separazione angolare fra gli impulsi di due particelle, con φ l'angolo azimutale.

F.2 Legge relativistica del moto di una particella

La legge relativistica del moto di una particella di massa m si ottiene dalla seconda legge di Newton, ricordando che $\vec{p} = m\gamma\vec{v}$

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m\vec{a} + m\frac{d\gamma}{dt}\vec{v} \quad (\text{F.28})$$

Sviluppando la derivata si ha

$$m\frac{d\gamma}{dt}\vec{v} = m\frac{d\left[(1-\beta^2)^{-1/2}\right]}{dt}\vec{v} = \frac{m}{2}\frac{\left(2\frac{v}{c^2}a_t\right)}{(1-\beta^2)^{3/2}}\vec{v} = m\gamma^3(\vec{a}\cdot\vec{\beta})\vec{\beta}$$

da cui

$$\vec{F} = m\gamma\vec{a} + m\gamma^3(\vec{a}\cdot\vec{\beta})\vec{\beta} \quad (\text{F.29})$$

La forza agente risulta quindi la somma di due termini, uno parallelo all'accelerazione e uno parallelo alla velocità. Non si può dunque definire alcuna

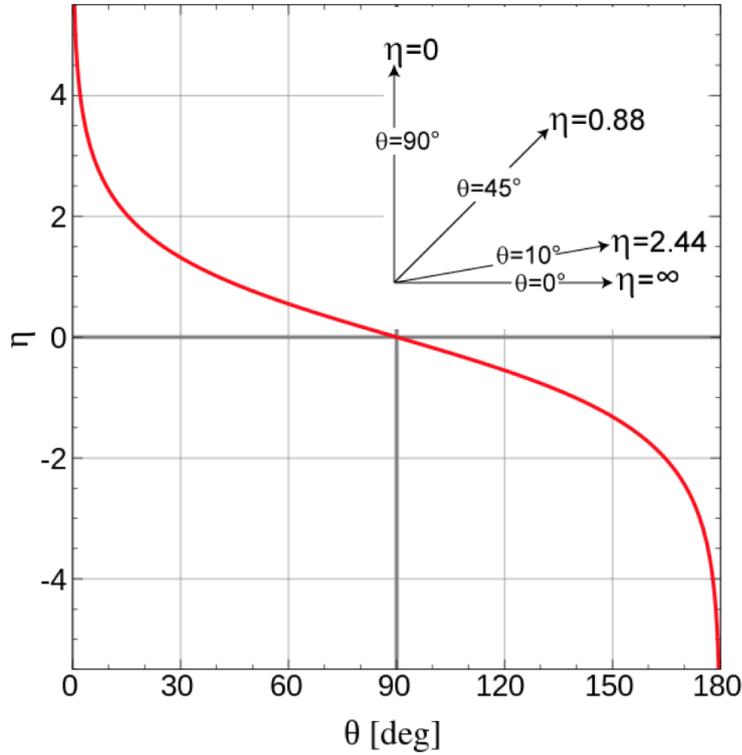


Figura F.1: Pseudorapidità η in funzione dell'angolo polare ϑ .

”massa” come il rapporto tra forza e accelerazione, e ne consegue che ad alte velocità la massa non rappresenta l'inerzia rispetto al moto. Moltiplicando scalarmente entrambi i membri della [F.29](#) per $\vec{\beta}$ si ottiene

$$\vec{F} \cdot \vec{\beta} = m\gamma \vec{a} \cdot \vec{\beta} + m\gamma^2 \beta^2 \vec{a} \cdot \vec{\beta} = m\gamma (1 + \gamma^2 \beta^2) \vec{a} \cdot \vec{\beta} = m\gamma^3 \vec{a} \cdot \vec{\beta}$$

da cui

$$\vec{a} \cdot \vec{\beta} = \frac{\vec{F} \cdot \vec{\beta}}{m\gamma^3} \quad (\text{F.30})$$

che sostituita in [F.29](#) dà

$$\vec{F} - (\vec{F} \cdot \vec{\beta}) \vec{\beta} = m\gamma \vec{a} \quad (\text{F.31})$$

L'accelerazione è quindi anch'essa la somma di due termini, uno parallelo alla forza e uno parallelo alla velocità.

Forza e accelerazione risultano parallele ed equiverse in due soli casi, ovvero quando forza e velocità sono parallele, per cui $\vec{F} = m\gamma^3 \vec{a}$, o quando forza e velocità sono ortogonali, per cui $\vec{F} = m\gamma \vec{a}$. Le costanti di proporzionalità sono diverse nei due casi.

Appendice G

Stato finale in tre corpi

Si consideri un'interazione che dia luogo a uno stato finale in tre corpi, di masse m_2 , m_3 ed m_4 , come una reazione o un decadimento $1 \rightarrow 2 + 3 + 4$, quale ad esempio

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e \quad \text{oppure,} \quad K^+ \rightarrow \pi^- + \pi^+ + \pi^+ \quad (\text{G.1})$$

Contrariamente al caso dello stato finale in due corpi, per il quale nel sistema del CM i prodotti hanno un'energia fissata, per uno stato finale in tre corpi questi presentano uno spettro di energie nel CM.

Pensando ad esempio a un decadimento, siano $m_1 c^2$ l'energia della particella madre a riposo nel CM, \vec{p}_i gli impulsi ed E_i le energie, con $i = 2, 3, 4$, delle tre particelle dello stato finale.

Fra queste variabili vi sono dei vincoli derivanti dal rispetto dei principi di conservazione e l'assegnazione delle masse implica che le energie siano determinate dagli impulsi. Le nove componenti degli impulsi devono soddisfare tre condizioni per la conservazione dell'impulso totale, $\sum_{i=2}^4 \vec{p}_i = 0$, e una per la conservazione dell'energia totale, $\sum_{i=2}^4 E_i = m_1 c^2$; restano quindi cinque variabili indipendenti.

La condizione di conservazione dell'impulso implica anche che i tre vettori \vec{p}_1 , \vec{p}_2 e \vec{p}_3 siano coplanari. Detto \vec{n} il versore ortogonale al piano che contiene i tre impulsi, si possono ad esempio scegliere come variabili indipendenti i due angoli che definiscono la direzione di \vec{n} . Il triangolo definito dai tre impulsi può ancora ruotare rigidamente nel piano appena definito e si può quindi scegliere l'angolo che ne definisce l'orientazione come una terza variabile indipendente.

Le restanti due variabili definiscono allora forma e dimensione del triangolo costituito dai tre impulsi.

Se non si è interessati all'eventuale polarizzazione dello stato iniziale, la dipendenza dai tre angoli dell'elemento di matrice che descrive la transizione è irrilevante per cui si può descrivere lo stato finale con le sole due ultime variabili indipendenti individuate. Ci sono a questo punto alcune scelte possibili equivalenti.

Un modo per definire utilmente il set di variabili è di partire dalla conservazione del quadri-impulso nel sistema del CM

$$p_1 = p_2 + p_3 + p_4 \quad (\text{G.2})$$

da cui, riordinando e quadrando

$$p_1^2 + p_2^2 - 2p_1 \cdot p_2 = p_3^2 + p_4^2 + 2p_3 \cdot p_4 \quad (\text{G.3})$$

Il quadri-impulso della particella 1 nel CM è $p_1 = (m_1 c, 0, 0, 0)$, per cui $p_1 \cdot p_2 = m_1 E_2$ e quindi, con le condizioni di *mass shell*, si ha per la [G.3](#)

$$\left(m_1^2 + m_2^2\right) c^2 - 2m_1 E_2 = \left(m_3^2 + m_4^2\right) c^2 + 2 \frac{E_3 E_4}{c^2} - 2|\vec{p}_3||\vec{p}_4| \cos\vartheta \quad (\text{G.4})$$

Ricordando che per $i = 3, 4$ si ha $|\vec{p}_i| = \sqrt{(E_i/c)^2 - m_i^2 c^2}$, e risolvendo per E_2 , si ha

$$E_2 = \frac{1}{2m_1} \left[\left(m_1^2 + m_2^2 - m_3^2 - m_4^2\right) c^2 - 2E_3 E_4 / c^2 + \right. \\ \left. + 2\sqrt{(E_3/c)^2 - m_3^2 c^2} \sqrt{(E_4/c)^2 - m_4^2 c^2} \cos\vartheta \right] \quad (\text{G.5})$$

relazione che lega le energie delle particelle prodotte con l'angolo fra le direzioni di due di esse. Essendo $-1 \leq \cos\vartheta \leq +1$ ne deriva che E_2 è anche compreso fra un valore massimo e uno minimo, dati da

$$E_{2,max/min} = \frac{\left(m_1^2 + m_2^2 - m_3^2 - m_4^2\right) c^2 - 2E_3 E_4 / c^2 \pm \sqrt{(E_3/c)^2 - m_3^2 c^2} \sqrt{(E_4/c)^2 - m_4^2 c^2}}{2m_1} \quad (\text{G.6})$$

Per l'analisi cinematica dei decadimenti in tre corpi si introducono delle quantità invarianti simili alle variabili di Mandelstam e definite come

$$s_1 = p_1^2 \quad s_{23} = (p_2 + p_3)^2 \\ s_{34} = (p_3 + p_4)^2 \quad s_{24} = (p_2 + p_4)^2 \quad (\text{G.7})$$

A meno di c^2 il primo invariante s_1 coincide con il quadrato della massa della particella iniziale mentre gli altri sono i quadrati delle masse invarianti delle particelle finali prese a coppie. Si può verificare che vale

$$s_{23} + s_{34} + s_{24} = s_1 + \left(m_2^2 + m_3^2 + m_4^2\right) c^4 \quad (\text{G.8})$$

La regione fisica del processo di decadimento in tre corpi nel piano (s_{23}, s_{34}) è detta *diagramma di Dalitz* e l'analisi della distribuzione degli eventi di decadimento in tale diagramma permette di studiare le interazioni tra le particelle finali e l'eventuale produzione di risonanze.

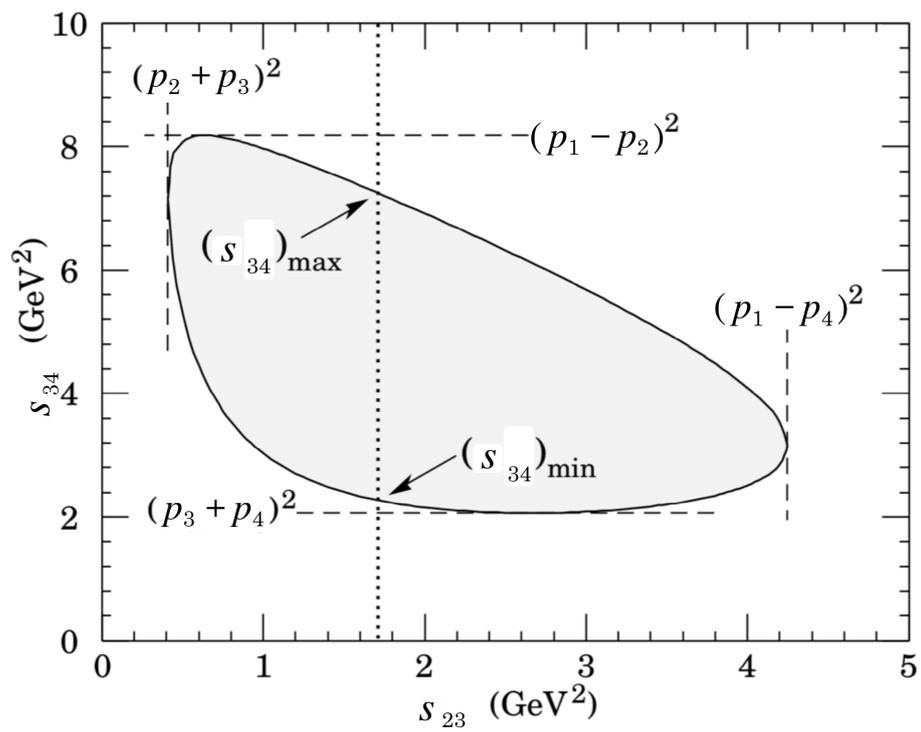


Figura G.1: Diagramma di Dalitz per lo stato finale in tre corpi relativo al caso $\pi^+ \bar{K}^0 p$ a 3 GeV. Per la conservazione del quadri-impulso i punti rappresentativi degli eventi risultano confinati entro la zona grigia.

Appendice H

Leggi di conservazione e loro violazioni

Conservation quantity or symmetry	Strong Interaction	EL-Mag	Weak
Mass m /Energy E	+	+	+
Momentum p			
Angular Momentum L, S			
Charge Q	+	+	+
Isospin T	+	-	-
Strangeness S	+	+	-
Charm C			
Beauty B , Topness T			
Parity P	+	+	-
Charge Conjugation C	+	+	-
Baryon Number B	+	+	+
Lepton Number (s)		+	+
Hypercharge Y	+	+	-
Time Reversal T	+	+	-
Charge Parity CP	+	+	-
CPT	+	+	+

Figura H.1: Leggi di conservazione e loro violazioni per le interazioni fondamentali: "+" significa conservazione e "-" significa violazione.

Appendice I

Acceleratori di particelle e nuclei

Ogni scienza richiede un adeguato armamentario di strumentazione sperimentale e la fisica nucleare e subnucleare è quella che ha dato luogo alla realizzazione delle strumentazioni più complesse e anche più imponenti, sia per analizzare i fenomeni e rivelarne e studiarne i prodotti, che per stimolare o provocare in modo controllato, i fenomeni da studiare. In pratica ciò significa che non paghi di utilizzare particelle o frammenti nucleari direttamente forniti dalla natura, tramite la radioattività o i raggi cosmici, si è cercato di produrre, in modo controllato sia in energia che in intensità, fasci di particelle o nuclei da far collidere con opportuni bersagli, o direttamente fra loro, onde studiarne le conseguenze. Ciò ha portato allo sviluppo delle cosiddette macchine acceleratrici di particelle o nuclei, che rappresentano lo strumento fondamentale di indagine nella fisica nucleare e subnucleare, anche se comunque le particelle di gran lunga più energetiche ci sono sempre fornite dai raggi cosmici, tramite meccanismi naturali di produzione e soprattutto di accelerazione che come si vedrà più avanti sono sostanzialmente spiegabili con un modello proposto da E. Fermi ^[1] nel 1949.

I fasci di particelle o nuclei prodotti dagli acceleratori sono dunque utilizzati come "sorgenti d'energia" e se indirizzati a urtare altri nuclei o particelle possono produrre stati eccitati e/o "frammenti" di questi, o anche nuove particelle, ma possono anche essere utilizzati come sonde con cui studiare la struttura dei bersagli. Nel caso della produzione di nuove particelle o dell'eccitazione di sistemi a livelli energetici superiori a quelli di partenza, la quantità fondamentale da considerare è l'energia E_{CM} disponibile nel cosiddetto *centro di massa* CM del sistema interagente ^[2], rappresentata dalla quantità \sqrt{s} . Considerando un fascio di particelle a , ognuna di energia

¹E. Fermi, "On the origin of the cosmic radiation" - Phys. Rev. 75 (1949) 1169

²Si veda in proposito il paragrafo ^[6.2]

totale E_a , incidenti su un bersaglio di particelle b , essendo s un invariante relativistico lo si può ad esempio esprimere nel sistema solidale col bersaglio, detto anche *sistema del laboratorio* o SL, in cui essendo b a riposo la sua energia è data totalmente dal solo contributo di massa

$$E_{CM} = \sqrt{s} = \sqrt{2E_a m_b c^2 + (m_a^2 + m_b^2) c^4} \quad (\text{I.1})$$

Nei casi in cui le energie cinetiche dei fasci in gioco siano molto alte, se confrontate con gli equivalenti energetici delle masse delle particelle coinvolte, queste possono essere trascurate e si ottiene

$$E_{CM} = \sqrt{s} \simeq \sqrt{2E_a m_b c^2} \quad (\text{I.2})$$

Ne deriva che nel caso di un bersaglio a riposo l'energia a disposizione nel centro di massa del sistema cresce proporzionalmente alla radice quadrata dell'energia delle particelle del fascio incidente.

Alla base della struttura e del funzionamento delle macchine acceleratrici vi sono opportune e ingegnose applicazioni di principi fisici e concetti di elettromagnetismo e nel seguito di questo capitolo, percorrendo in parte il filo storico del loro sviluppo, si presenteranno alcuni fra i principali tipi di macchine acceleratrici accennando alle loro caratteristiche e limiti in base appunto a tali principi fisici. Naturalmente, il fatto che si utilizzino campi elettrici e magnetici implica che per accelerare qualcosa bisogna che questo qualcosa possieda una carica elettrica non nulla.

I primi acceleratori di particelle specificamente progettati per esperimenti nucleari risalgono al 1928. Molti di questi si basavano sulla generazione di alte tensioni applicate a tubi a vuoto (Breit, Tuve, Lauritsen, Van de Graaff); le prime disintegrazioni nucleari prodotte da protoni accelerati artificialmente furono ottenute nel 1930 da Cockroft e Walton che presso il Laboratorio Cavendish avevano sviluppato un sistema in grado di accelerare protoni fino a 300 keV dando luogo a reazioni come $p + {}^7\text{Li} \rightarrow {}^4\text{He} + {}^4\text{He}$ ³. Operare con tensioni molto alte comporta difficoltà e problemi legati all'evitare il prodursi di scariche elettriche indesiderate, e ciò spinse ad escogitare macchine acceleratrici che non richiedessero campi elettrici troppo intensi. Le alte energie richieste per le particelle accelerate si ottengono in questi casi con accelerazioni multiple o per induzione elettromagnetica, come nei primi acceleratori multipli di Wideröe, nel 1928. Ma fu soprattutto Lawrence a Berkeley nel 1929 a dare una svolta significativa a queste tecnologie: egli ideò e sviluppò il primo *ciclotrone*, un acceleratore che utilizzando un campo

³La notazione adottata per indicare le reazioni nucleari in genere è mutuata da quella utilizzata in chimica in cui a sinistra vi è la somma dei soggetti che daranno luogo ad una certa "interazione", seguita da una freccia dopo la quale vi è la somma dei prodotti derivanti dall'interazione.

magnetico costringeva le particelle cariche in un'orbita a spirale facendole attraversare più volte lo stesso campo elettrico accelerante.

La configurazione originale del ciclotrone ha comunque delle limitazioni intrinseche che rendono impossibile accelerare particelle fino a energie relativistiche e che sono state superate grazie a ingegnosi schemi escogitati da Veksler nel 1945 e da McMillan nel 1946, sfruttando la cosiddetta *stabilità di fase*. Il principio del *gradiente alternato*, detto anche *focalizzazione forte* ⁴, pensato da Christophilos nel 1950 e indipendentemente da Courant, Livingston e Snyder nel 1952, ha poi permesso di superare pressochè completamente i problemi legati al crescere dell'energia.

Nel 1940 Kerst, usando l'induzione elettromagnetica nella configurazione di *betatrone*, accelerò elettroni a energie di molti MeV. Successivamente il principio del betatrone fu combinato col metodo del *sincrotrone*.

Fondamentale per ogni acceleratore è comunque la *sorgente* delle particelle cariche da accelerare: nel caso di elettroni si utilizza un filamento caldo, come nei tubi a raggi catodici; per ottenere invece protoni o ioni si utilizzano dei tubi a scarica o configurazioni più complesse, soprattutto nel caso di ioni pesanti. Una sorgente di protoni è ad esempio costituita da elettroni estratti da un catodo caldo che vengono quindi fatti oscillare entro un volume contenente idrogeno gassoso, di cui ne provocano la ionizzazione per urto; gli ioni così prodotti, cioè i protoni, vengono quindi estratti dal volume di ionizzazione tramite campi elettrici in grado di generare correnti ioniche di alcuni mA. Una sorgente può anche essere in grado di fornire ioni

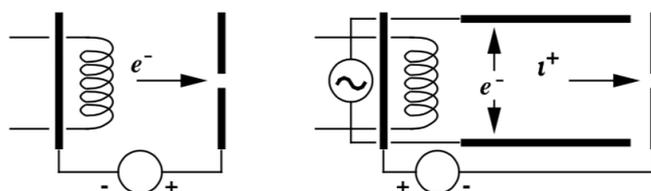


Figura I.1: Schema di sorgente di elettroni e di ioni.

polarizzati, il cui spin è cioè allineato secondo una opportuna direzione.

Fra le proprietà che caratterizzano un acceleratore, oltre alla tipologia di particelle e/o nuclei accelerabili, alle intensità fornibili e alle energie cinetiche massime raggiungibili, ve ne è un'altra molto importante detta *duty cycle*, che consiste nel rapporto fra il tempo durante il quale l'acceleratore emette un fascio utile di particelle, rispetto al tempo totale di funzionamento (a volte si considera il tempo di funzionalità ⁵).

⁴Si veda in proposito: E.D. Courant H.S. Snyder, "Theory of the Alternating-Gradient Synchrotron" - Ann. Phys. 3 (1958) 1-48

⁵Il tempo di funzionalità è semplicemente quello durante il quale l'acceleratore potrebbe

I.1 Acceleratori a caduta di potenziale

R.J. Van de Graaff nel 1931 ⁶ propose una configurazione di acceleratore a caduta di potenziale come quella illustrata in figura I.2, anche se non fu il primo acceleratore utilizzato per sperimentazioni nucleari, primato che spetta a Cockroft e Walton nel 1932.

Lo schema di funzionamento per l'accelerazione di ioni positivi consta di un elettrodo a forma di spazzola, collegato a un generatore ad alta tensione positiva, che asporta elettroni dagli atomi superficiali di una cinghia isolante posta in movimento in modo da scorrere in prossimità di un altro elettrodo a spazzola, elettricamente solidale con un conduttore isolato. In tal modo la cinghia asporta elettroni da questo conduttore che di conseguenza si carica raggiungendo potenziali V_{ac} fino ad un massimo di circa 15 MV. Un opportuno tubo a vuoto, collegato a questo conduttore e a una sorgente di ioni positivi, rappresenta quindi la cosiddetta *linea di fascio* lungo la quale, accelerate da V_{ac} , si incanalano le particelle o ioni con cui si vuole sperimentare.

L'energia cinetica delle particelle accelerate con la tecnica di Van de Graaff

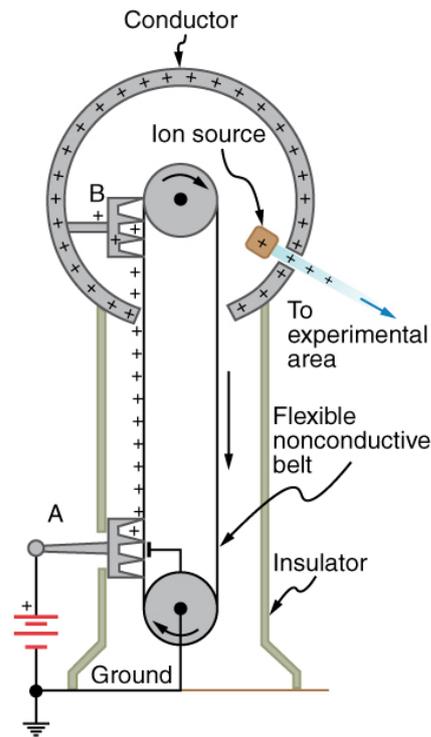


Figura I.2: Schema di acceleratore Van de Graaff.

tecnicamente funzionare!

⁶R.J. Van de Graaff, - Phys. Rev. 38 (1931) 1919.

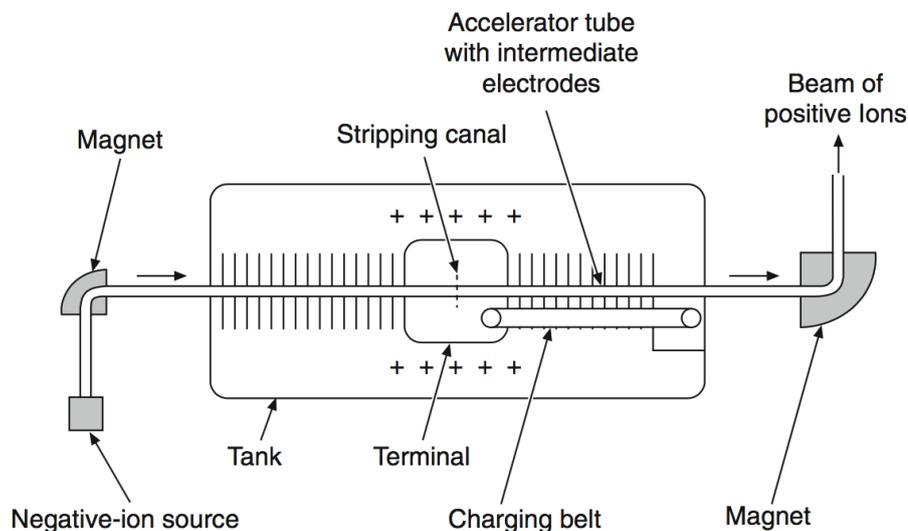


Figura I.3: Schema di acceleratore Tandem.

può essere raddoppiata adottando una configurazione detta a *tandem*, come illustrato in figura [I.3](#). In tal caso si sfrutta sempre lo stesso terminale ad alta tensione caricato tramite la cinghia che risulta però qui posizionato al centro dell'intera struttura. La prima fase di accelerazione agisce su ioni negativi che in prossimità del terminale ad alto potenziale vengono fatti passare attraverso un opportuno *stripper*; questo li priva dei loro elettroni trasformandoli in ioni positivi che vengono quindi respinti del terminale a potenziale positivo, sottoponendoli in tal modo a un'ulteriore accelerazione che dipende naturalmente anche dal valore assoluto della loro carica e quindi da quanti elettroni sono stati "strappati" durante il passaggio attraverso lo *stripper*.

Lo schema di Cockroft e Walton [7](#) si basa invece sul principio del raddrizzamento di correnti alternate con l'opportuno uso di diodi. Se ne vede uno schema nell'immagine in figura [I.4](#). Il primo in alto dei grafici in figura [I.4](#)(b) mostra lo sviluppo temporale di una tensione alternata sinusoidale $V(t) = V_0 \sin(\omega t)$ che viene fornita in ingresso al circuito schematizzato nella parte (a) della figura. Qui si suppone che la tensione sinusoidale abbia fin dal primo ciclo il valore massimo di ampiezza che poi conserva inalterato, ma nella realtà un'opportuna combinazione di resistenze fa sì che il valore massimo d'ampiezza venga raggiunto dopo un certo numero di cicli per non danneggiare il trasformatore e le altre parti circuitali. Durante il primo mezzo ciclo a potenziale positivo la corrente fluisce attraverso i diodi e carica tutti i punti al potenziale $+V_0$. Nel corso del successivo mezzo

⁷J.D. Cockroft, E.T.S. Walton - Proc. Roy. Soc. A136 (1932) 619

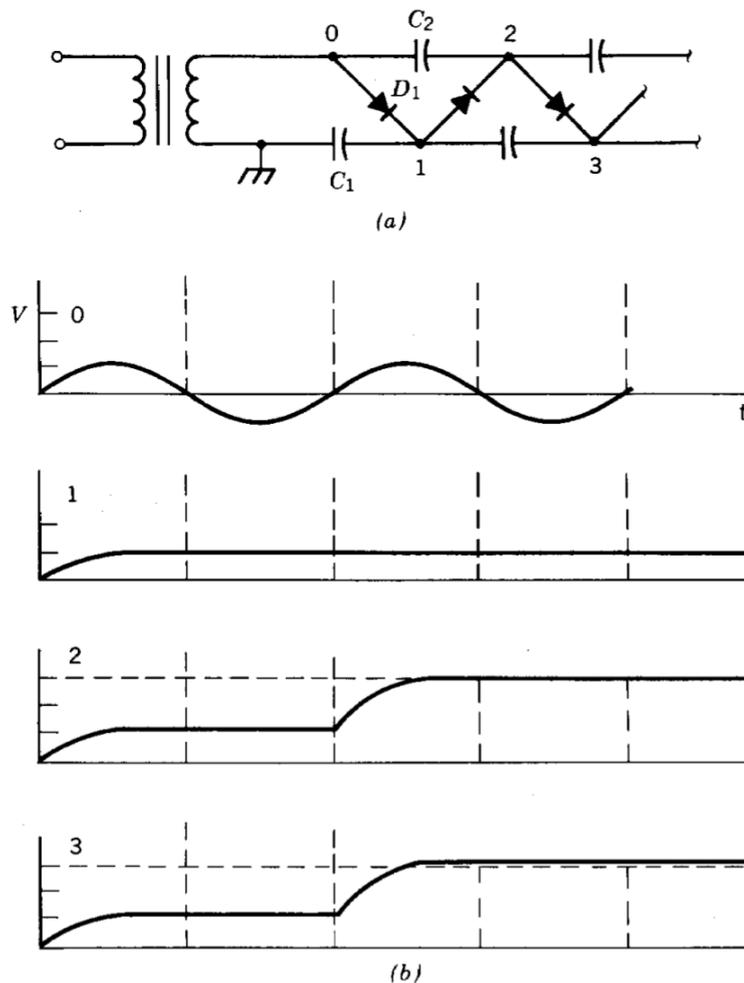


Figura I.4: Schema di acceleratore Cockroft-Walton e illustrazione del meccanismo di moltiplicazione della tensione al terminale. Non è evidenziato l'effetto del *ripple*.

ciclo a potenziale negativo il voltaggio al punto 1 si mantiene positivo in quanto la corrente non può fluire a ritroso attraverso il diodo D_1 , ora polarizzato inversamente. Il voltaggio nel punto 2 è mantenuto positivo in virtù della conducibilità fra C_1 e C_2 attraverso il diodo D_2 . In corrispondenza del momento in cui il valore assoluto del voltaggio negativo in ingresso è massimo, la differenza di voltaggio fra le piastre di C_2 è maggiore di V_0 e tende progressivamente al valore $2V_0$. Durante il secondo ciclo a tensione positiva la tensione in corrispondenza del punto 2 del circuito viene portata al valore $3V_0$, e anche la tensione al punto 3 tende al valore $3V_0$ per il caricamento tramite D_3 . Il ragionamento può essere esteso a più elementi in serie e in teoria permetterebbe di far raggiungere tensioni massime pari

a $V_{Max} = 2nV_0$ all'ultimo terminale dopo n stadi rettificatori successivi. Il



Figura I.5: L'acceleratore Cockcroft-Walton che ha funzionato al CERN portando i protoni fino all'energia di 800 keV prima di iniettarli in un successivo acceleratore LINAC.

vantaggio di questa configurazione consiste soprattutto nell'utilizzo di trasformatori che non dovendo lavorare fra differenze di tensioni troppo alte non richiedono soluzioni complicate e problematiche di isolamento.

Si deve però tener conto che c'è sempre una corrente inversa di perdita attraverso i diodi polarizzati inversamente, che porta a un conseguente parziale scaricamento dei condensatori riducendo la tensione massima generabile a valori inferiori a quanto si potrebbe desumere dalla semplice proporzionalità col numero n di stadi rettificatori. Supponendo condensatori tutti uguali e detta I la corrente di carico, si può ottenere per V_{Max} un'espressione che tiene conto dell'effetto citato e anche del *ripple* effettivamente associato alla

fase di rettificazione ⁸

$$V_{Max} = 2nV_0 - \frac{2\pi I}{\omega C} \left(\frac{2}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{6}n \right) \quad (I.3)$$

La dipendenza dalla terza potenza di n del termine aggiuntivo mostra come V_{Max} risulti sempre più perturbata e distorta al crescere del numero di stadi rettificatori, tanto da non poterla più considerare in buona approssimazione come costante.

Un acceleratore di Crockroft-Walton permette in pratica di raggiungere tensioni fino a circa 4 MV all'ultimo terminale con correnti di fascio fino ad alcune centinaia di mA.

Questo tipo di acceleratori, anche grazie alle alte correnti che riescono a fornire, è ancor'oggi utilizzato come primo stadio di pre-iniezione per molti tipi di acceleratori ad alte e altissime energie.

I.2 Acceleratori lineari

Quanto visto in merito ai massimi valori ottenibili e governabili di differenza di potenziale suggerisce che per ottenere particelle accelerate con valori finali di energia cinetica dell'ordine del GeV o superiori, bisogna necessariamente ricorrere a più fasi di accelerazione successive.

Una configurazione che si presta a questo è quella pensata originalmente da Wideröe, in cui si ha, in un ambiente opportunamente svuotato da gas residui, un sistema di tubi conduttori allineati coassialmente e connessi a un generatore di alta tensione ad alta frequenza, come schematicamente illustrato in figura I.6. Si fa in modo che le particelle da accelerare percorrano

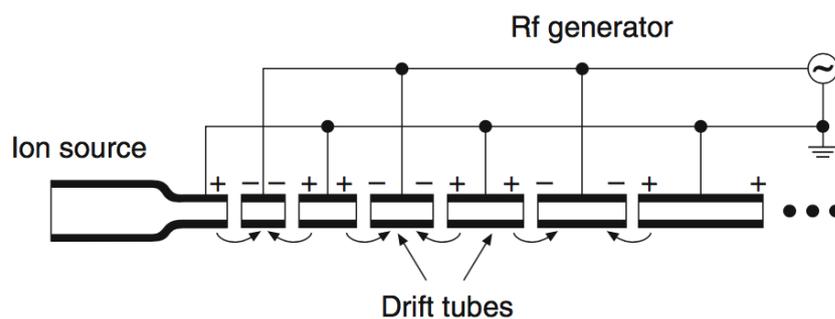


Figura I.6: Schema della configurazione accelerante lineare alla Wideröe.

una traiettoria lineare il più possibile prossima all'asse di simmetria dei tubi e ogni coppia di tubi contigui è collegata al generatore in modo che

⁸Si veda l'esercizio ??

essi siano ad opportuni potenziali di segno opposto quando una particella percorre lo spazio che separa un tubo da quello adiacente, e risulti così accelerata dalla differenza di potenziale ivi presente. Se il campo elettrico all'interno di ogni tubo è in buona approssimazione trascurabile, si può pensare di collegare opportunamente la sequenza di tubi a un generatore ad alta frequenza ω in modo che le particelle che percorrono la sequenza di tubi allineati si trovino nella condizione di subire un'accelerazione ogni volta che percorrono lo spazio che separa un tubo da quello adiacente successivo. Fissata la frequenza ω del generatore, la condizione descritta richiede che i tubi in successione siano di lunghezza via via crescente, proporzionalmente alle velocità raggiunte dopo ogni fase di accelerazione subita. Se si indica con L_i la lunghezza dell' i -mo segmento di tubo, detto v_i il modulo della velocità con cui ogni particella lo percorre, affinché il sistema funzioni come descritto deve valere la relazione

$$L_i = \frac{\pi v_i}{\omega} \quad (\text{I.4})$$

Detta ΔV la differenza di potenziale fra ogni coppia di tubi adiacenti prodotta dal generatore si ha che dopo aver attraversato n coppie di tubi adiacenti consecutive, ogni particella accelerata di carica q ha acquisito un'energia cinetica pari ad $E_k = nq\Delta V$.

Un simile tipo di acceleratore non è ovviamente in grado di produrre fasci continui, ma pacchetti di particelle in fase con la frequenza ω del generatore. Attualmente l'acceleratore lineare più grande funzionante, lungo oltre 3 km e in grado di produrre fasci di elettroni fino a circa 50 GeV è lo Stanford Linear Accelerator Center (SLAC), in California (USA).

I.3 Orbite in campi magnetici

Prima di passare alla descrizione degli specifici sistemi acceleranti che sfruttano il moto delle particelle su traiettorie chiuse, conviene analizzare alcuni aspetti relativi alla stabilità di tali traiettorie.

Il moto più semplice che in un campo magnetico uniforme può compiere una particella di carica q e massa m che soddisfi l'equazione

$$\frac{d(m\vec{v})}{dt} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (\text{I.5})$$

è un moto circolare uniforme in un piano ortogonale al campo magnetico \vec{B} . L'equazione del moto in coordinate cilindriche è

$$mr \frac{d\vartheta}{dt} = mr\omega = qrB \quad (\text{I.6})$$

con $B = -B_z = \text{cost}$. L'impulso della particella, $mr\omega = mv$, è quindi proporzionale al prodotto rB . In figura [I.7](#) è illustrata con tratto continuo

un'orbita circolare di raggio r , centrata sullo stesso asse dell'orbita indicata con linea tratteggiata e descritta dalla I.6, ma giacente su un piano inclinato rispetto a quello ortogonale al campo magnetico dove z è la massima distanza fra punti delle due orbite con uguali r e ϑ . Essa rappresenta un'orbita *perturbata*. La frequenza di rivoluzione dell'orbita imperturbata è

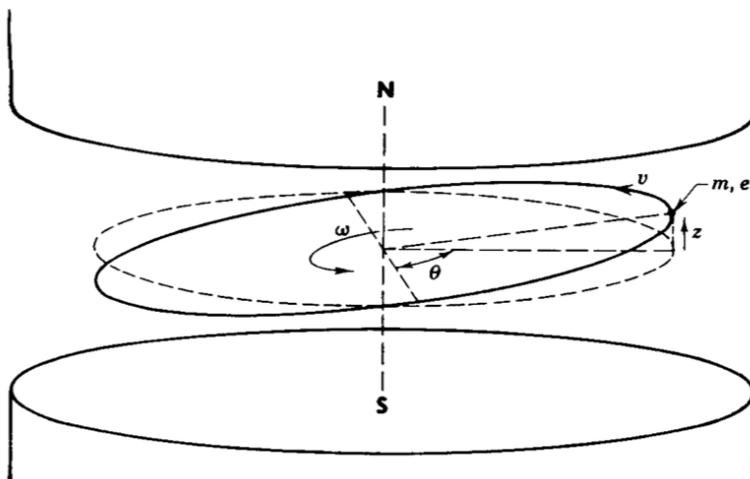


Figura I.7: Didascalia ...

$$\nu_c = \frac{1}{2\pi} \frac{d\vartheta}{dt} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{qB}{2\pi m} \quad (\text{I.7})$$

Questo risultato classico mostra che in un campo magnetico uniforme e costante anche la frequenza di rivoluzione è costante, e viene detta *frequenza di ciclotrone*. Per ioni positivi con energie inferiori a circa 20 MeV si può continuare ad utilizzare l'approssimazione classica e scrivere, per l'energia cinetica

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{q^2 r^2 B^2}{2m} \quad (\text{I.8})$$

che si vede così crescere con la seconda potenza di B e di r . Per il raggio si ottiene quindi direttamente, in approssimazione non relativistica

$$r = \left(\frac{2mE_k}{q^2 B^2} \right)^{1/2} \quad (\text{I.9})$$

Se si considera il corretto approccio relativistico si ha, per l'energia totale E_{tot} della particella

$$E_{tot} = m\gamma c^2 = mc^2 + E_k \quad (\text{I.10})$$

con

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \text{e} \quad \beta = \frac{v}{c} = \left(1 - \frac{m^2 c^4}{E_{tot}^2} \right)^{1/2} \quad (\text{I.11})$$

L'impulso relativistico p della particella è dunque

$$p = m\gamma v = \frac{1}{c} [E_{tot}^2 - m^2 c^4]^{1/2} = \frac{1}{c} [E_k (E_k + 2mc^2)]^{1/2} \quad (\text{I.12})$$

Il corretto raggio relativistico dell'orbita risulta quindi, dalla [I.6](#)

$$r = \frac{p}{qB} = \frac{1}{cqB} [E_k (E_k + 2mc^2)]^{1/2} \quad (\text{I.13})$$

Risolvendo per l'energia cinetica E_k si ottiene

$$E_k = (m^2 c^4 - c^2 q^2 B^2 r^2)^{1/2} - mc^2 \quad (\text{I.14})$$

da cui si deduce che per energie cinetiche E_k crescenti e molto maggiori di mc^2 , che quindi diviene trascurabile, le energie cinetiche stesse tendono a dipendere quasi linearmente dal prodotto Br , ovvero le energie cinetiche tendono a una dipendenza quasi lineare dall'impulso.

L'espressione relativistica per le frequenze di rivoluzione si ottiene dalle [I.10](#) e [I.13](#)

$$\nu_{cr} = \frac{p}{2\pi m\gamma r} = \frac{qB}{2\pi m\gamma} = \frac{qB}{2\pi m} \frac{mc^2}{E_{tot}} = \frac{\nu_c}{1 + E_k/mc^2} \quad (\text{I.15})$$

Dove ν_c è la frequenza di ciclotrone non relativistica. Si noti che la frequenza di ciclotrone relativistica ν_{cr} tende ad essere costante soltanto nel limite $E_k \ll mc^2$.

Le frequenze di rivoluzione possono anche essere espresse in funzione del raggio orbitale in base alla seconda delle [I.11](#)

$$\nu_{cr} = \frac{v}{2\pi r} = \frac{c}{2\pi r} \left[1 - \left(\frac{mc^2}{mc^2 + E_k} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (\text{I.16})$$

Si noti che al crescere delle energie i valori delle frequenze di rivoluzione di qualsiasi particella tendono a convergere verso $c/2\pi r$.

Le relazioni ricavate danno le informazioni necessarie a descrivere il moto di particelle orbitanti su traiettorie che giacciono su un piano ortogonale ad un campo magnetico uniforme e costante. La semplicità descrittiva derivante da questa geometria ha condotto a sceglierla sostanzialmente per tutti i tipi di acceleratori basati su campi magnetici.

Un'ulteriore importante richiesta per un acceleratore di particelle basato sul moto delle stesse su orbite in un campo magnetico è poi che sia in grado di generare forze che agiscono sulle particelle che deviano dal piano orbitale riconducendole ad esso. Tipicamente le particelle accelerate percorrono infatti molte orbite nell'acceleratore prima di essere dirette contro dei bersagli

e quindi, anche accumulando minime deviazioni durante ognuna di esse, potrebbero integrare rapidamente effetti di deviazioni macroscopiche. In un campo magnetico perfettamente uniforme l'insorgenza di una componente di velocità parallela al campo, per una particella in moto orbitale, la porterebbe e percorrere un'orbita elicoidale di passo pari al prodotto fra il periodo di rotazione e l'entità della componente di velocità parallela al campo, con un conseguente progressivo allontanamento trasversale dal piano dell'orbita circolare originaria. Ciò causerebbe la conseguente perdita della particella quando prima o poi urterebbe il metallo di uno dei due poli del magnete che genera il campo. Per generare delle forze con proprietà tali da bilanciare questo effetto si può agire sulle caratteristiche del campo magnetico stesso dandogli una struttura come in figura I.8, dove grazie alla forma dei poli N-S del magnete il campo generato è simmetrico rispetto all'asse z e decresce al crescere della distanza radiale da esso con una forma delle linee di campo che mostrano concavità rivolta verso l'asse z . In figura I.8 sono qualitativamente indicate anche le direzioni e versi delle forze che il campo così strutturato produce su particelle cariche che si muovano lungo orbite al di sopra o al di sotto del piano mediano. La direzione di tali forze, in base

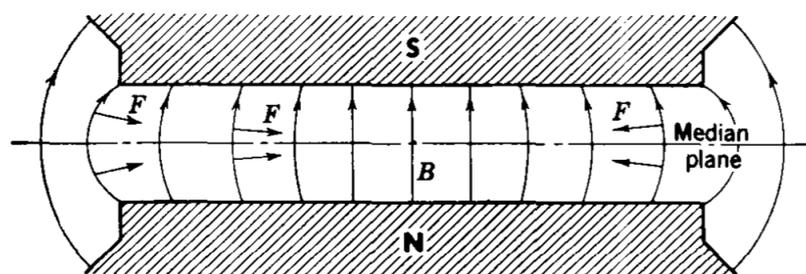


Figura I.8: Didascalia ...

alla legge di Lorentz, è sempre ortogonale alla direzione *locale* del flusso di campo magnetico e queste forze presentano quindi, con tale configurazione geometrica di campo, una componente diretta ortogonalmente al piano mediano e orientata verso esso, di modulo crescente al crescere della distanza dal piano mediano stesso. Un campo siffatto realizza quindi la configurazione cercata che previene la *fuga* dal piano mediano, lungo la direzione ad esso ortogonale, delle particelle orbitanti.

La perdita di particelle potrebbe avvenire naturalmente anche per una loro *fuga radiale*, pur mantenendosi su orbite giacenti sul piano mediano. Per capire come la configurazione del campo magnetico possa agire per prevenire questa eventualità, si parta dal considerare le equazioni generali del moto

delle particelle orbitanti espresse in coordinate cilindriche a partire dalla [I.5](#)

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \left(m \frac{dr}{dt} \right) - mr \left(\frac{d\vartheta}{dt} \right)^2 &= qE_r + qr \frac{d\vartheta}{dt} B_z - q \frac{dz}{dt} B_\vartheta \\ \frac{1}{r} \frac{d}{dt} \left(mr^2 \frac{d\vartheta}{dt} \right) &= qE_\vartheta + q \frac{dz}{dt} B_r - q \frac{dr}{dt} B_z \\ \frac{d}{dt} \left(m \frac{dz}{dt} \right) &= qE_z + q \frac{dr}{dt} B_\vartheta - qr \frac{d\vartheta}{dt} B_r\end{aligned}\tag{I.17}$$

che nel caso qui considerato in cui $\vec{E} = 0$ e $B_\vartheta = 0$, si riducono a

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \left(m \frac{dr}{dt} \right) - mr \left(\frac{d\vartheta}{dt} \right)^2 &= qr \frac{d\vartheta}{dt} B_z \\ \frac{1}{r} \frac{d}{dt} \left(mr^2 \frac{d\vartheta}{dt} \right) &= q \frac{dz}{dt} B_r - q \frac{dr}{dt} B_z \\ \frac{d}{dt} \left(m \frac{dz}{dt} \right) &= -qr \frac{d\vartheta}{dt} B_r\end{aligned}\tag{I.18}$$

Se inoltre si fa la ragionevole ipotesi che gli spostamenti verticali e radiali delle particelle rispetto all'orbita circolare ideale siano piccoli, se confrontati col raggio di questa, allora si può anche assumere in prima approssimazione che essi non modifichino la velocità angolare $d\vartheta/dt$ del moto orbitale, per cui si possono trascurare le variazioni azimutali e porre:

$$r \frac{d\vartheta}{dt} = v = \text{cost.}$$

Si è detto che per stabilizzare verticalmente l'orbita il campo magnetico deve diminuire al crescere di r . Si può esprimere ciò in forma analitica ponendo

$$B_z = B_{z0} \left(\frac{r_0}{r} \right)^n\tag{I.19}$$

dove n è una costante positiva ed r_0 e B_{z0} sono i valori rispettivamente del raggio e della componente B_z del campo magnetico per l'orbita stabile di equilibrio. L'assunzione che le possibili variazioni $r - r_0 = \Delta r$ siano piccole rispetto ad r_0 conduce a porre, fermandosi con l'approssimazione al primo termine dello sviluppo in serie della [I.19](#)

$$B_z \simeq B_{z0} \left(1 - \frac{n\Delta r}{r_0} \right)\tag{I.20}$$

La componente radiale B_r si ottiene dall'equazione di Maxwell per il rotore del campo magnetico che in questo caso fornisce $\vec{\nabla} \times \vec{B} = 0$, da cui

$$\frac{\partial B_z}{\partial r} = \frac{\partial B_r}{\partial z}\tag{I.21}$$

quindi dalle [I.20](#) e [I.21](#) si ha

$$B_r \simeq -\frac{nB_{z0}z}{r_0} \quad (\text{I.22})$$

Trascurando quindi in base a quanto detto, l'equazione per il moto azimutale e sostituendo quanto ora trovato si ha, per le equazioni del moto

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[m \frac{d}{dt} (\Delta r) \right] - \frac{mv^2}{r_0} \left(1 - \frac{\Delta r}{r_0} \right) &= qvB_{z0} \left(1 - \frac{n\Delta r}{r_0} \right) \\ \frac{d}{dt} \left(m \frac{dz}{dt} \right) &= \frac{qvnz}{r_0} B_{z0} \end{aligned} \quad (\text{I.23})$$

Esprimendo la condizione di *orbita stabile di equilibrio*, come quella dell'orbita per cui valgono contemporaneamente $d(\Delta r)/dt = 0$ e $\Delta r = 0$, si ottiene, per la prima delle [I.23](#)

$$\frac{mv^2}{r_0} = qvB_{z0} \quad (\text{I.24})$$

equivalente alla [I.6](#) che descrive il moto su un'orbita puramente circolare e ortogonale a z ; quest'ultima, nelle approssimazioni fatte, rappresenta quindi l'orbita stabile di equilibrio anche per il caso più generale del *moto perturbato* descritto. Sostituendo ulteriormente quanto espresso dalla [I.24](#) e ponendo $\omega = v/r_0$ per la velocità angolare, le [I.23](#) diventano

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[m \frac{d}{dt} (\Delta r) \right] &= -m\omega^2 (1-n) \Delta r \\ \frac{d}{dt} \left(m \frac{dz}{dt} \right) &= -m\omega^2 n z \end{aligned} \quad (\text{I.25})$$

ed esprimono le forze che agiscono sulle particelle rispingendole verso o allontanandole dall'orbita stabile di equilibrio. Fintantoché il segno risulta negativo per scostamenti Δr positivi o viceversa, la particella si troverà costantemente rispinta verso l'orbita di equilibrio ogni volta che se ne allontanerà, e ciò vale chiaramente se sia n che $(1-n)$ sono entrambi positivi, cioè se $0 < n < 1$.

La necessità della positività di n appariva chiara da quanto detto più sopra per la stabilità dell'orbita lungo z , richiedendo di conseguenza la diminuzione di B al crescere di r . Non è invece altrettanto immediato legare la stabilità radiale dell'orbita alla condizione $(1-n) > 0$. A tal proposito si osservi che dal punto di vista del sistema di coordinate della particella in moto, la forza centrifuga mv^2/r deve risultare bilanciata dalla forza magnetica qvB_z . Graficando questi due termini in funzione del raggio r come in figura [I.9](#), si nota l'esistenza di un valore di r in cui i due grafici si incontrano, ovvero i due termini di forza si bilanciano, fintantoché B_z non diminuisce con rapidità

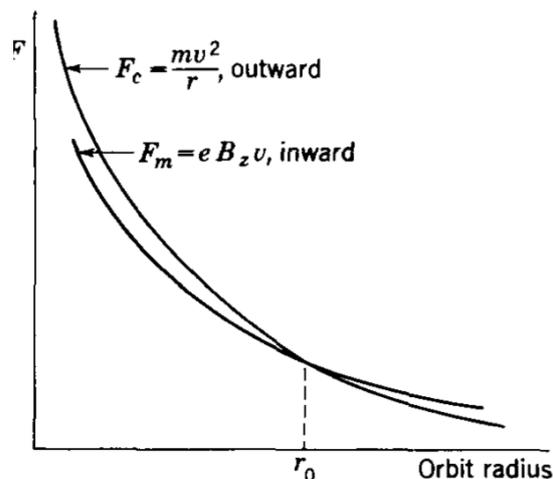


Figura I.9: Didascalia ...

maggiore o uguale di $1/r$ e ciò, nell'ipotesi espressa dalla [I.19](#), avviene per $(1-n) \leq 0$. Il valore di r in corrispondenza al quale i due grafici si incontrano corrisponde al raggio r_0 dell'orbita stabile di equilibrio.

Per valori di r maggiori prevale quindi la forza magnetica che rispinge la particella all'interno, mentre per valori minori prevale la forza centrifuga, e in tal modo c'è sempre una forza netta che agisce rispingendo la particella verso l'orbita stabile di equilibrio.

È interessante osservare che l'intensità di tali forze è notevole e in grado di ricondurre rapidamente una particella verso la condizione di stabilità: per elettroni da 300 MeV su un'orbita di raggio pari ad 1 m, in un campo magnetico per cui sia $n = 0.5$, la forza di ripristino su un elettrone che modifichi di 1 cm il raggio della propria orbita equivale a circa 1.5 MV/m.

I.4 Il betatrone

Il betatrone, che come dice il nome accelera elettroni, sfrutta il principio dell'induzione magnetica e potrebbe essere schematicamente visto come un *trasformatore* in cui il circuito secondario è sostituito da un fascio di elettroni circolanti. Il primo esemplare funzionante fu sviluppato da D.W. Kerst⁹ nel 1940.

Per capirne il funzionamento si consideri un campo magnetico variabile nel tempo $\vec{B}(t)$, prodotto da un elettromagnete come quello illustrato in figura [I.10](#) in modo da risultare simmetrico attorno all'asse z cosicché il suo modulo dipenda soltanto dalla distanza r da tale asse di cui \hat{n} sia il versore.

⁹D.W. Kerst, "Acceleration of electrons by magnetic induction" - Phys. Rev. 58 (1940) 841

Si supponga quindi che un elettrone di massa m_e e carica q_e si muova in questo campo magnetico, all'interno di un tubo a vuoto e lungo una traiettoria circolare di raggio r_0 , con centro sull'asse z del campo $\vec{B}(t)$ e giacente su un piano ortogonale allo stesso e quindi a \hat{n} .

La variazione di $\vec{B}(t)$ nel tempo determina l'insorgenza di un campo elettrico $\vec{E}(t)$, tangente all'orbita dell'elettrone e che lo accelera lungo la traiettoria circolare.

Data la supposta simmetria di $\vec{B}(t)$, fissato un qualunque istante t^* , $\vec{E}(t^*)$ ha lo stesso modulo in ogni punto dell'orbita.

L'integrale di linea di $\vec{E}(t)$ lungo l'orbita circolare coincide con la variazione di flusso del campo magnetico attraverso la circonferenza nell'unità di tempo. Ma se l'orbita dell'elettrone ha raggio r_0 l'integrale di linea di \vec{E}

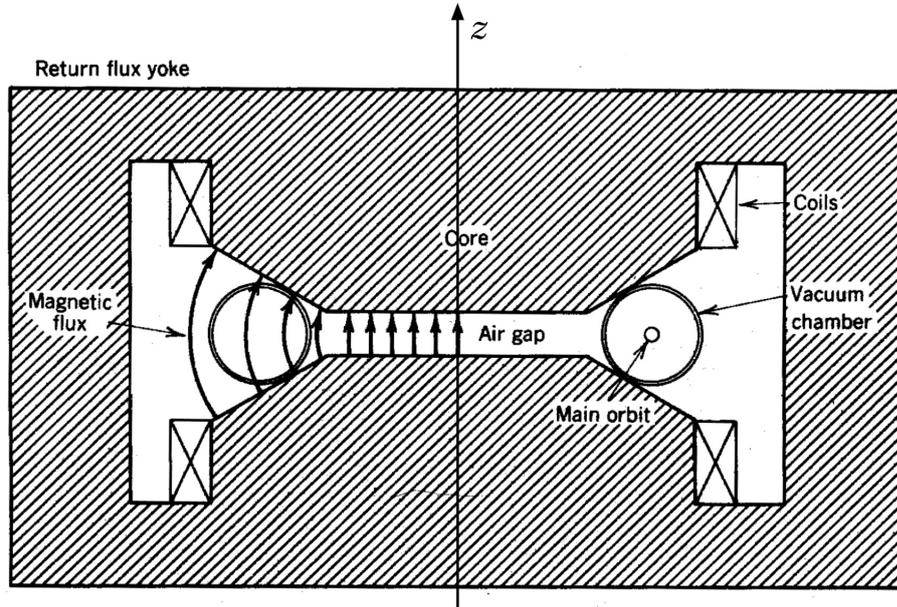


Figura I.10: Schema di un betatrone.

coincide col prodotto del suo modulo per la lunghezza $2\pi r_0$ della circonferenza. Detto \vec{B}_m il campo magnetico medio all'interno della circonferenza, con

$$B_m = \frac{1}{\pi r_0^2} \int_A \vec{B} \cdot d\vec{\sigma} \quad (\text{I.26})$$

dove A è l'intera superficie piana racchiusa dalla circonferenza e $d\vec{\sigma} = \hat{n}d\sigma$ è un'area elementare orientata ortogonalmente alla superficie A , si può esprimere il flusso di \vec{B} attraverso la circonferenza come $\Phi_{\vec{B}} = \pi r_0^2 B_m$. Si ha quindi

$$2\pi r_0 \left| \vec{E} \right| = \frac{\partial}{\partial t} (\pi r_0^2 B_m) \quad (\text{I.27})$$

Siccome si è supposto di mantenere costante il raggio r_0 della traiettoria si ha, per $|\vec{E}|$

$$|\vec{E}| = \frac{r_0}{2} \frac{dB_m}{dt} \quad (\text{I.28})$$

La forza che accelera l'elettrone lungo l'orbita è dunque pari a $q_e \vec{E}$, sempre tangente alla traiettoria per cui, detto $p_e(t)$ il modulo dell'impulso dell'elettrone lungo l'orbita circolare,

$$q_e E = \frac{q_e r_0}{2} \frac{dB_m}{dt} = \frac{dp_e(t)}{dt} \quad (\text{I.29})$$

Integrando rispetto al tempo

$$p_e(t) = p_e(0) + \frac{q_e r_0}{2} \Delta B_m \quad (\text{I.30})$$

dove $p_e(0)$ rappresenta il modulo dell'impulso con cui un elettrone comincia a muoversi lungo l'orbita circolare e ΔB_m è l'incremento del valor medio di campo magnetico nell'intervallo di tempo t .

Questo è sostanzialmente il principio fisico su cui si basa il funzionamento del *betatrone* come acceleratore.

Resta da spiegare come si può mantenere l'elettrone sulla stessa orbita circolare mentre lo si accelera. A tale scopo, tenendo conto di quanto riportato nel paragrafo precedente, si sfrutta sempre il campo magnetico. Detto $\vec{B}(r_0)$ il campo magnetico in corrispondenza della traiettoria circolare di raggio r_0 percorsa dagli elettroni, dalla configurazione illustrata in figura si nota che esso è in ogni punto ortogonale alla velocità \vec{v} degli elettroni. Ogni elettrone sente allora una forza diretta verso il centro della traiettoria di modulo

$$F_c = \frac{dp_t}{dt} = q_e v B(r_0) \quad (\text{I.31})$$

essendo p_t il modulo dell'impulso trasverso di ogni elettrone orbitante. Daltronde si ha anche relativisticamente che se una particella si muove lungo una circonferenza, la derivata temporale del suo impulso trasverso è pari al modulo del suo impulso totale moltiplicato per la velocità angolare ω di rotazione che in un moto circolare di raggio r_0 vale: $\omega = v/r_0$,

$$\frac{dp_t}{dt} = p \omega = p \frac{v}{r_0} \quad (\text{I.32})$$

Quindi dalle [I.31](#) e [I.32](#) si ottiene

$$\frac{p}{r_0} = q_e B(r_0) \quad (\text{I.33})$$

Inoltre dalla [I.30](#) si ha che l'impulso dell'elettrone cresce nel betatrone proporzionalmente al crescere di B_m . Se man mano che $p_e(t)$ cresce si vuole che

l'elettrone permanga stabilmente sull'orbita di raggio r_0 , bisogna che il suo moto soddisfi contemporaneamente la [I.33](#) e la [I.30](#) per cui, detto $\Delta B(r_0)$ l'incremento del valore del campo magnetico agente sull'orbita nell'intervallo di tempo t , si ottiene

$$\frac{q_e r_0}{2} \frac{\Delta B_m}{r_0} = q_e \Delta B(r_0)$$

ovvero,

$$\Delta B_m = 2 \Delta B(r_0) \quad (\text{I.34})$$

detta anche *condizione di betatrone*. Per garantire il funzionamento del betatrone su un'orbita stabile e costante è dunque necessario che il campo magnetico medio internamente all'orbita cresca con rapidità doppia rispetto al campo sull'orbita, e ciò si può ottenere sagomando opportunamente i poli dell'elettromagnete, come ad esempio in figura [I.10](#). L'impulso dell'elettrone sull'orbita d'equilibrio di raggio r_0 è quindi: $p_e(r_0) = p_e(0) + q_e r_0 \Delta B(r_0)$.

È daltronde importante osservare alcuni fatti legati al funzionamento di uno strumento reale, in cui bisogna anche pensare al modo in cui iniettare gli elettroni da accelerare poi sull'orbita circolare e a quello con cui estrarli una volta accelerati. Un iniettore standard di elettroni consiste tipicamente, come schematizzato in figura [I.11](#), in una sorgente termoionica ad alta tensione continua ($20 \div 120$ kV) abbinata a elettrodi estrattori, che non può ovviamente estendersi geometricamente fino a invadere la zona occupata dalle orbite che gli elettroni compiranno dopo essere stati iniettati compresa l'orbita stabile di raggio r_0 . L'iniettore è tipicamente posizionato ortogonalmente rispetto al piano dell'orbita stabile in modo da rilasciare elettroni a una distanza $r' = r_0 + \Delta r$ dall'asse z , con $|\Delta r| \ll r_0$. Detto quindi $p_e(r_0) + \Delta p$ l'impulso dell'elettrone appena iniettato, dove $p_e(r_0)$ è l'impulso per l'orbita stabile di raggio r_0 , si ha

$$p_e(r_0) + \Delta p = q_e B(r) (r_0 + \Delta r) \quad (\text{I.35})$$

Non essendo in questo caso soddisfatta la condizione di betatrone si ha che il raggio dell'orbita cambia durante il ciclo di accelerazione al crescere di B_m . L'orbita "quasi circolare" con raggio lentamente variabile che ne deriva viene anche detta *orbita istantanea*.

Si consideri dunque un elettrone su un'orbita circolare di raggio $r' = r_0 + \Delta r$. Il flusso di $\vec{B}(r)$ attraverso questa circonferenza può essere scritto come

$$\Phi_{\vec{B}}(r_0 + \Delta r) = B_m \pi r_0^2 + \int_{r_0}^{r_0 + \Delta r} 2\pi B(r) r dr \quad (\text{I.36})$$

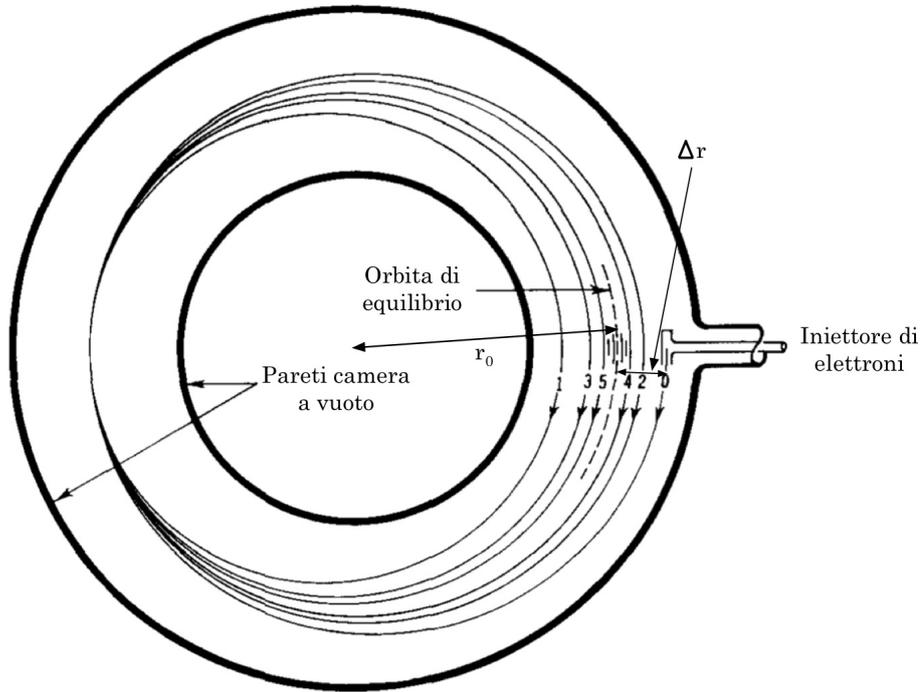


Figura I.11: Iniezione di un betatrone.

Dato che per $r_0 \leq r \leq (r_0 + \Delta r)$ risulta $B(r) \simeq B(r_0)$, e ricordando la condizione di betatrone, il flusso si può approssimare come

$$\begin{aligned} \Phi_{\vec{B}}(r_0 + \Delta r) &\simeq B_m \pi r_0^2 + 2\pi r_0 B(r_0) \Delta r = 2B_0 \pi r_0^2 + 2\pi r_0 B(r_0) \Delta r = \\ &= 2\pi r_0 B(r_0) (r_0 + \Delta r) = 2\pi r_0 r' B(r_0) \end{aligned} \quad (\text{I.37})$$

Applicando quindi la [I.27](#) all'elettrone sull'orbita istantanea di raggio r' si ottiene, nelle approssimazioni fatte

$$\begin{aligned} 2\pi r' E &= 2\pi r' r_0 \frac{dB(r_0)}{dt} \\ \text{da cui: } E &= r_0 \frac{dB(r_0)}{dt} = \frac{r_0}{2} \frac{dB_m}{dt} \end{aligned} \quad (\text{I.38})$$

che coincide con la [I.28](#). Quindi, al variare del campo magnetico, l'impulso dell'elettrone iniettato sull'orbita di raggio $r_0 + \Delta r$ cambia in buona approssimazione come quello di un elettrone che si muova lungo l'orbita stabile di raggio r_0 . In conseguenza di ciò l'elettrone iniettato tenderà gradualmente a raggiungere lo stesso impulso di un elettrone che si muova sull'orbita stabile in quanto un'eventuale lieve differenza iniziale in impulso diviene alla fine trascurabile dato il grande valore finale di impulso raggiunto. L'indipendenza dal raggio dell'orbita che in prima approssimazione ne risulta per la

rapidità di cambiamento dell'impulso implica, per la [I.35](#)

$$d[B(r_0 + \Delta r)] = r_0 dB(r_0) \quad (\text{I.39})$$

da cui, potendosi assumere come già visto, $B(r) \simeq B(r_0)$

$$\frac{d(\Delta r)}{\Delta r} = - \frac{dB(r_0)}{B(r_0)} \quad (\text{I.40})$$

L'iniezione, per ottenere il massimo dell'efficacia, deve avvenire quando il campo magnetico sull'orbita e quello medio sul piano dell'orbita sono al loro valore minimo, idealmente nulli, mentre l'estrazione deve avvenire in corrispondenza dei massimi valori ottenibili per tali campi. Una tipica sequenza di cicli di accelerazione è illustrata in figura [I.12](#), supponendo l'elettromagnete alimentato da una corrente alternata sinusoidale e con un'isteresi trascurabile. Solo un quarto dell'intero periodo di ogni ciclo è quindi utile al processo d'accelerazione, e il fascio prodotto è pulsato con frequenza pari a quella della corrente di alimentazione dell'elettromagnete. La configurazione

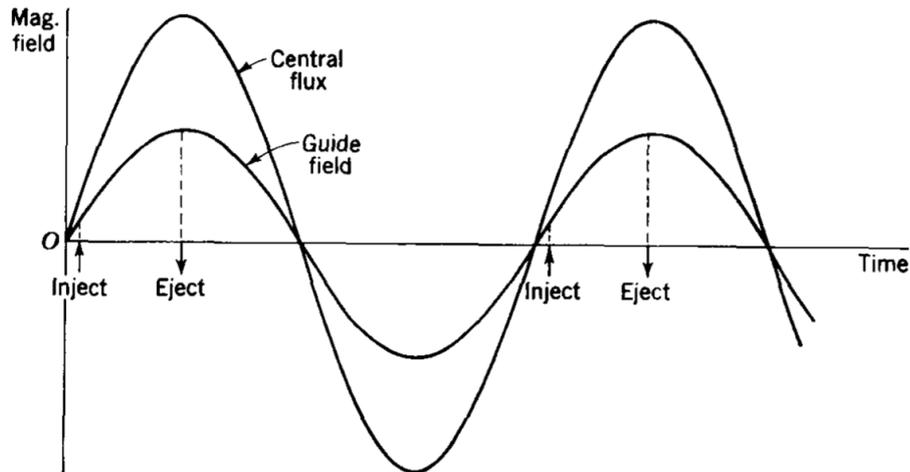


Figura I.12: Tipico andamento nel tempo dei campi magnetici $B(r_0)$ e B_m , in fase durante i cicli d'accelerazione di un betatrone.

di betatrone qui descritta permette di accelerare elettroni fino a energie di poche centinaia di MeV. Limitazioni a superare tali valori sono dovute sia alla difficoltà nel raggiungere gli elevati valori di campo magnetico medio richiesti, sia soprattutto al fatto che la [I.32](#) non tiene conto delle perdite d'energia per unità di tempo degli elettroni accelerati a causa della *radiazione di sincrotrone*, che sono proporzionali alla quarta potenza del rapporto fra l'energia cinetica raggiunta dalle particelle in moto su orbita circolare e la loro massa.

I.5 Il ciclotrone

L'idea del ciclotrone fu suggerita a Lawrence dai risultati già citati e ottenuti da Wideröe nel 1928 accelerando al doppio della tensione massima fornita da un generatore oscillante degli ioni sodio e potassio. Egli aveva ottenuto il risultato facendo attraversare agli ioni due elettrodi tubiformi allineati e spazialmente separati, collegati al generatore di tensione oscillante che determinava il campo accelerante fra i due elettrodi e aggiustando opportunamente la frequenza di oscillazione in modo che fosse in fase con la presenza degli ioni in transito nei tratti di separazione fra i due elettrodi.

Lawrence immaginò una variante di questa configurazione "risonante", con l'utilizzo di un campo magnetico che deflette le particelle secondo orbite circolari che le costringessero a ripassare successivamente entro gli stessi elettrodi in modo da riutilizzare la stessa tensione accelerante ad ogni successivo passaggio nello spazio di separazione fra i due elettrodi.

Lo studio del problema lo portò a scoprire che le equazioni del moto delle particelle accelerate predicono un periodo di rivoluzione costante permettendo in tal modo di accelerarle in una configurazione dinamica risonante con un opportuno campo elettrico. La configurazione geometrica che mise a punto per ottenere questo risultato che sperimentò poi con successo assieme a S. Livingston è illustrata nelle figure [I.13](#) e [I.14](#). Il campo magnetico utilizzato è prodotto da un elettromagnete tra le facce piane e parallele dei suoi poli cilindrici e in questa zona la geometria scelta ne garantisce quindi l'uniformità. Fra i poli è posizionata una camera a vuoto che ospita due elettrodi cavi in rame come schematizzato in figura [I.14](#). La loro forma è semicircolare e sono affacciati l'uno all'altro, elettricamente indipendenti, lasciando scoperta una fessura diametrale. Per la loro forma venivano chiamati elettrodi a "D".

Un generatore di tensione a radiofrequenza produce un campo elettrico alternato nello spazio libero diametrale fra i due elettrodi a D, ed è questo il campo utilizzato per accelerare gli ioni.

La sorgente di ioni positivi è posizionata poco discosta dal centro della camera, lungo un diametro al centro della zona di separazione fra i due elettrodi, per cui gli ioni appena prodotti vengono accelerati dal campo verso l'elettrodo a D in quel momento caricato negativamente. Opportune collimazioni sull'ugello della sorgente fanno sì che la traiettoria degli ioni sia fin dalla loro emissione ortogonale al campo magnetico. All'interno dell'elettrodo a D, data la sua geometria, il campo elettrico è praticamente nullo per cui ogni ione che vi entra percorre un arco di traiettoria semicircolare di raggio definito dalla sua velocità di ingresso e dall'intensità del campo magnetico presente, fissate che siano la sua massa e la sua carica.

Completato questo primo tratto semicircolare ogni ione si ritrova nella zona di separazione fra i due elettrodi a D e subisce dunque nuovamente l'effetto del campo elettrico.

Le condizioni di funzionamento desiderate si ottengono se il campo magne-

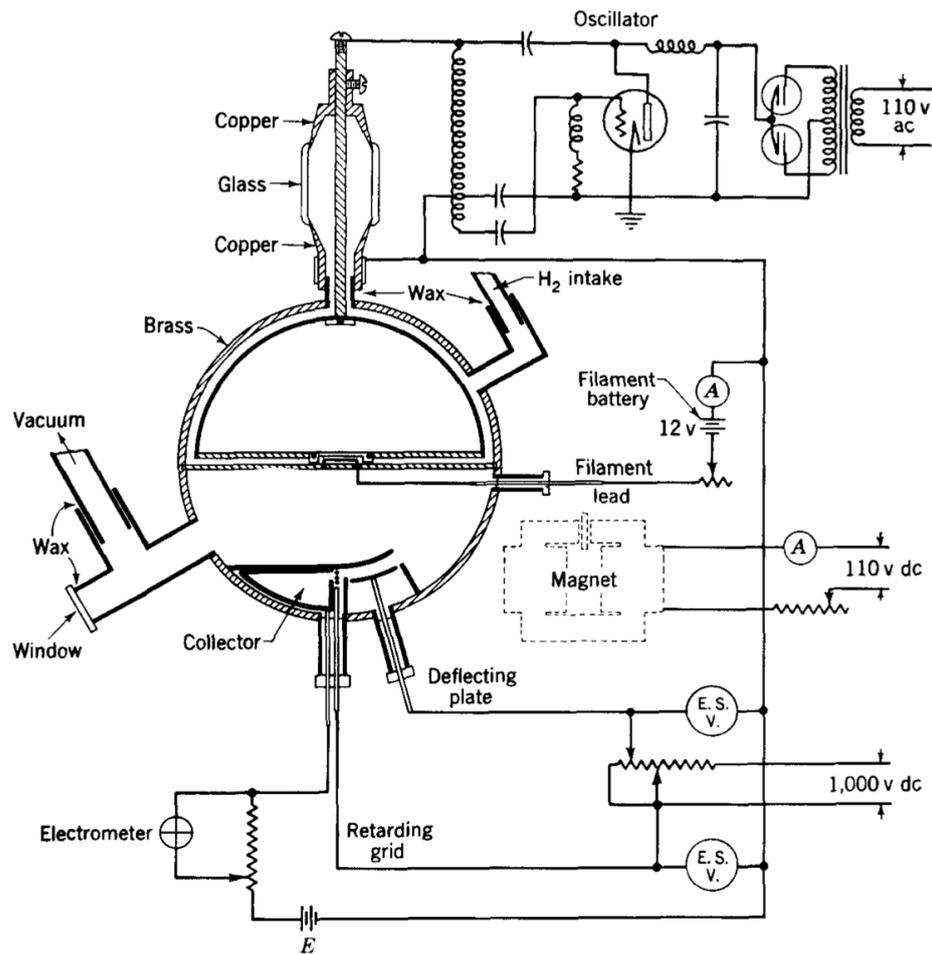


Figura I.13: Schema della "camera ciclotrone" originariamente utilizzata da Livingston e Lawrence per provare la fattibilità del processo d'accelerazione risonante.

tico è regolato in modo tale che il tempo necessario affinché uno ione compia un tratto semicircolare di traiettoria coincida con la metà dell'inverso della frequenza di oscillazione del campo elettrico, e vengono dette condizioni di risonanza. In questo caso, dopo aver compiuto il primo semicerchio di traiettoria uno ione viene nuovamente accelerato dal campo passando nella zona di separazione fra i due elettrodi a D. Quindi la traiettoria semicircolare che compirà nel secondo elettrodo in cui entrerà sarà caratterizzata da un raggio maggiore, e così via fino al raggiungimento delle zone periferiche degli elettrodi, da dove gli ioni accelerati possono infine essere estratti con opportuni campi elettrici devianti per essere poi utilizzati.

Per quanto concerne la stabilità planare delle semiorbite successive valgono

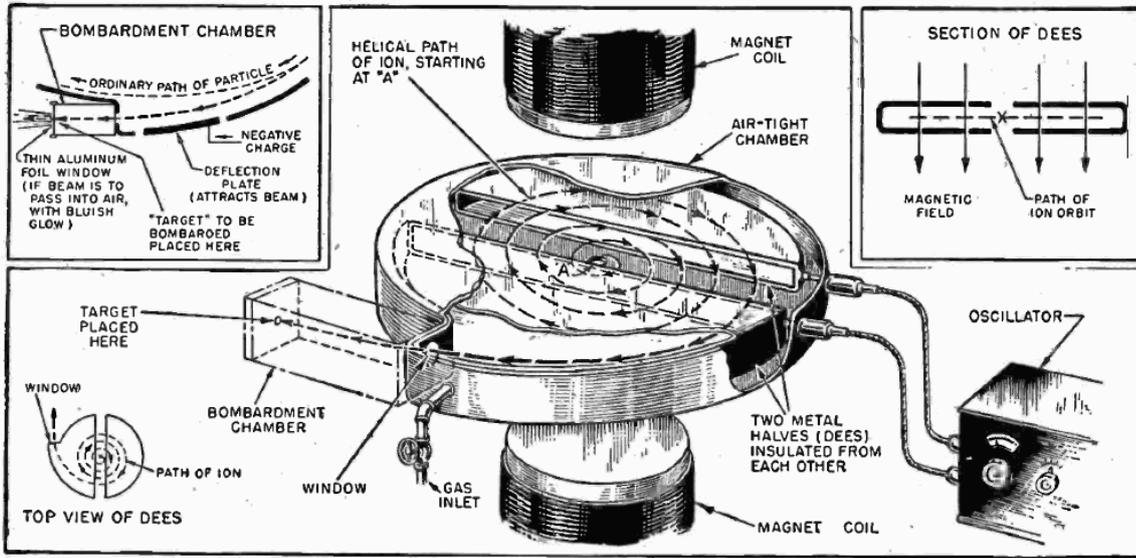


Figura I.14: Illustrazione delle fasi di funzionamento di un ciclotrone.

considerazioni simili a quelle espone nei paragrafi precedenti, in particolare nel paragrafo I.3 "Orbite in campi magnetici".

Come già visto, la forza di Lorentz agente in questa configurazione su uno ione di massa m , carica Ze e velocità di modulo v , orientata ortogonalmente ad un campo magnetico uniforme di modulo B , vale $ZevB$ e agisce in direzione ortogonale sia al campo magnetico che alla velocità dello ione. Tale forza costringe lo ione su una traiettoria circolare di raggio r , il cui valore dipende dal bilanciamento tra essa e la reazione centrifuga

$$\frac{mv^2}{r} = ZevB \quad (I.41)$$

La frequenza di rivoluzione dello ione sull'orbita è dunque data da

$$\omega_{cl} = 2\pi\nu_{cl} = \frac{v}{r} = \frac{ZeB}{m} \quad (I.42)$$

Se si ragiona in approssimazione non relativistica tale frequenza resta costante finchè lo sono anche il campo magnetico \vec{B} , la massa m e la carica Ze dello ione. Per ottenere l'accelerazione quindi, in un ciclotrone in cui le velocità finali raggiunte permettano di ragionare in approssimazione non relativistica, la frequenza del campo elettrico alternato applicato agli elettrodi deve essere scelta uguale a quella di rivoluzione degli ioni da accelerare. La relazione lineare esistente fra ω_{cl} e B è detta *equazione di risonanza di ciclotrone classica*.

Il corretto approccio relativistico richiede però di considerare anche il fattore

$\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$ con $\beta = v/c$. In tal caso si ha, per la corretta frequenza relativistica di ciclotrone

$$\omega = \frac{ZeB}{m\gamma} = \frac{ZeB}{m} \sqrt{1 - \beta^2} \quad (\text{I.43})$$

Il raggio dell'orbita della particella in funzione della sua velocità, è quindi dato da

$$r = \frac{v}{\omega} = \frac{\beta c}{\omega} = \frac{\beta\gamma mc}{ZeB} \quad (\text{I.44})$$

Per tener conto degli effetti relativistici si possono realizzare due varianti della configurazione classica del ciclotrone: con la prima, il *sincro-ciclotrone*, si fa in modo che la frequenza del campo elettrico vari come $\omega = \omega_{cl}/\gamma$ per compensare gli effetti relativistici; con la seconda, il *ciclotrone isocrono*, si sagoma l'elettromagnete in modo che il campo magnetico aumenti in modulo al crescere del raggio delle orbite. Il ciclotrone isocrono è in grado di fornire fasci di intensità superiore rispetto al sincro-ciclotrone richiedendo però condizioni più stringenti per garantire la stabilità e la focalizzazione dei fasci prodotti.

I.6 Il sincrotrone e il proto-sincrotrone

In un acceleratore lineare standard ogni settore accelerante viene sfruttato un'unica volta. Col ciclotrone si è trovato un modo di utilizzare più volte lo stesso potenziale accelerante con la stessa coppia di elettrodi, anche se vi sono comunque delle limitazioni legate a problemi di isocronia, soprattutto al crescere delle energie, come visto col sincrociclotrone. Queste limitazioni sono principalmente dovute al fatto che il crescere delle energie raggiungibili implica campi magnetici e quindi magneti, di dimensioni sempre maggiori, rendendo di conseguenza sempre più difficoltoso realizzare tali magneti e governare le variazioni isocrone del loro campo magnetico. L'utilizzo di magneti superconduttori con valori di campo molto maggiori di quelli degli elettromagneti standard, permette di contenere parzialmente il problema delle dimensioni.

La soluzione radicale a questi problemi è venuta dall'adozione di una nuova configurazione di elettrodi acceleranti e campi magnetici, detta *sincrotrone*, che permette l'accelerazione delle particelle cariche mantenendole su una traiettoria chiusa di dimensioni e forma costanti, con i campi magnetici che agiscono solo lungo la traiettoria delle particelle, alleggerendo in tal modo il problema legato alle dimensioni fisiche dei magneti. Nel sincrotrone il tubo a vuoto percorso dal fascio di particelle o nuclei attraversa successivamente le stazioni acceleranti, tipicamente rettilinee, alternate a magneti focalizzatori e magneti deflettori, in modo da costituire una tipica forma poligonale mistilinea chiusa che se di grandi dimensioni tende ad approssimare una circonferenza, un cui tipico settore parziale è schematicamente mostrato in

figura I.15. Il principio di funzionamento del sincrotrone consiste nel mo-

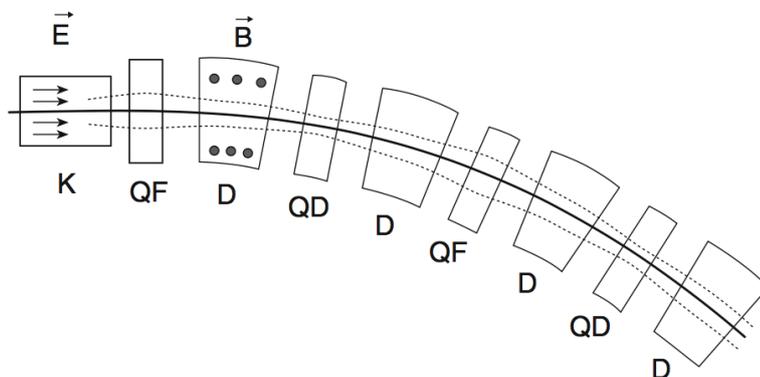


Figura I.15: Schema di un tratto della linea di un sincrotrone: K rappresenta una stazione accelerante, seguita da un insieme di magneti che hanno il compito sia di focalizzare le particelle del fascio, come i quadrupoli QF, che di defletterle lungo la traiettoria dell'intero sincrotrone, come i dipoli D.

dificare in modo sincrono la frequenza ω del generatore che crea i campi elettrici acceleranti assieme al campo magnetico $|\vec{B}|$, in modo tale da far sí che le particelle, la cui frequenza orbitale e il cui impulso $|p|$ crescono con l'accelerazione impressa, continuino a sentire una forza che le accelera mantenendo nel contempo inalterata la propria orbita entro il tubo a vuoto. Ciò richiede il contemporaneo soddisfacimento delle seguenti due relazioni

$$\begin{cases} \omega = n \frac{pc^2}{RE} \\ B = \frac{p}{ZeR} \end{cases} \quad \text{con } n = \text{intero positivo} \quad (\text{I.45})$$

dove R è il raggio di curvatura dell'ideale traiettoria circolare percorsa dalla particelle accelerate, E e Ze sono la loro energia totale e carica elettrica¹⁰. Il termine n tiene conto del fatto che l'azione accelerante del campo elettrico sul fascio circolante può agire un numero intero ≥ 1 di volte per ogni giro

¹⁰Per un'orbita circolare stabile di raggio R si ha

$$m\gamma \frac{v^2}{R} = ZevB, \text{ inoltre } p = m\gamma v \text{ e } \omega = \frac{v}{R} \text{ per cui } m\gamma\omega = ZeB$$

Moltiplicando entrambi i membri per R si ottiene $m\gamma\omega R = m\gamma v = p = ZeBR$, da cui la seconda delle I.45. Moltiplicandone invece entrambi i membri per c^2 e dal risultato appena ottenuto si ha

$$m\gamma c^2 \omega = Ze c^2 B, \text{ ovvero } \omega = \frac{ZeBc^2}{E}$$

da cui discende, a meno di n , la prima delle I.45.

completo (potrebbe anche agire una volta ogni alcuni giri completi ...). Motivi tecnici richiedono che per un corretto funzionamento le particelle devano essere iniettate nel sincrotrone già una certa velocità, per cui devono essere "pre-accelerate", ad esempio tramite acceleratori elettrostatici, o lineari, o sincrotroni più piccoli. Da quanto detto appare chiaro che anche i sincrotroni forniscono fasci a pacchetti di particelle, e non in modo continuo.

Ogni particella accelerata perde parte dell'energia fornita sotto forma di *radiazione di sincrotrone*, cosiddetta proprio perché il fenomeno è stato messo in forte evidenza con le notevoli accelerazioni raggiungibili grazie ai sincrotroni. Il fenomeno in un acceleratore ad orbita chiusa concerne l'emissione di fotoni non solo nelle fasi di accelerazione mirate all'aumento dell'energia cinetica delle particelle, ma anche durante il percorrimto delle orbite che per essere mantenute richiedono una costante accelerazione centripeta. Se si vuole quindi che le particelle mantengano tale orbita bisogna compensare le perdite d'energia durante le fasi d'accelerazione.

L'energia persa per radiazione di sincrotrone, lungo ogni orbita di raggio R da particelle altamente relativistiche, è data da

$$- \Delta E = \frac{4\pi\hbar c}{3R} \beta^3 \gamma^4 \quad (\text{I.46})$$

con α la costante di struttura fine. La dipendenza dalla massa contenuta in $\gamma = E/(mc^2)$ mostra come il tasso di perdita d'energia sia circa 1.6×10^{13} volte maggiore per elettroni rispetto a protoni della stessa energia. L'energia massima che si riesce attualmente a raggiungere in elettro-sincrotroni è di circa 100 GeV. La radiazione di sincrotrone non gioca invece un ruolo fondamentale nel determinare i limiti energetici raggiungibili con i proto-sincrotroni, che vedono la limitazione più importante alle energie massime raggiungibili dettata dai valori massimi conseguibili con i magneti deflettori dipolari utilizzati. L'uso di tecniche superconduttrici per i magneti permette oggi di ottenere fasci di protoni fino a 7 TeV presso l'acceleratore LHC del CERN, su orbite di circa 4.3 km di raggio.

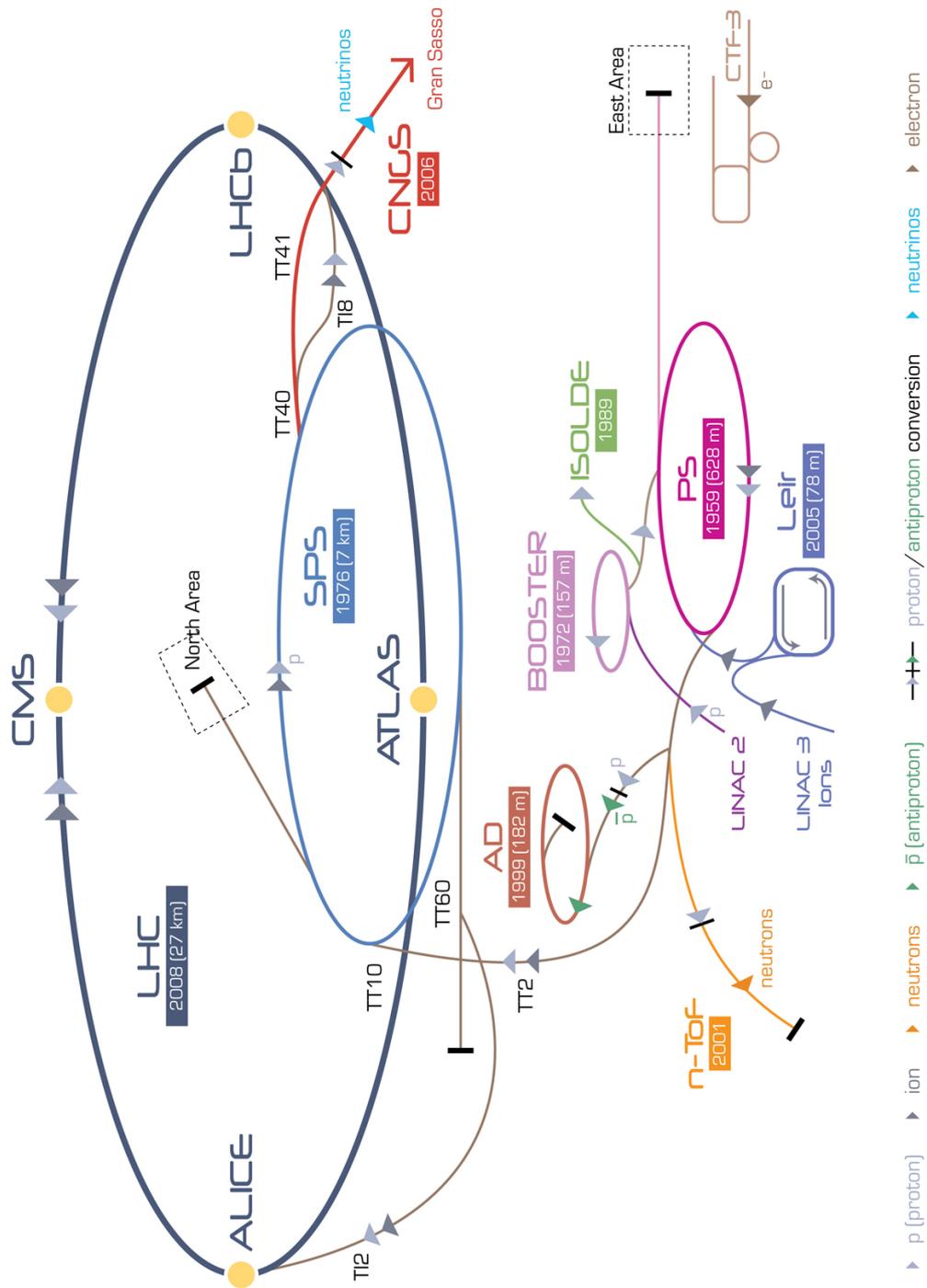
I fasci accelerati dai sincrotroni possono essere utilizzati in diversi modi:

- possono essere estratti con campi deflettori e inviati a urtare opportuni bersagli fissi posti al di fuori dell'anello di accelerazione;
- possono essere accumulati e mantenuti in circolazione entro il "tubo a vuoto" dell'acceleratore che in tal caso viene anche detto *anello ad accumulazione*, facendoli attraversare, ad ogni passaggio, sottili bersagli che possono essere sia in forma solida che gassosa, grazie all'utilizzo di opportuni sistemi di pompaggio differenziale;

- possono essere accumulati e mantenuti in circolazione entro il "tubo a vuoto" dell'acceleratore, portandoli quindi ad incrociare, in opportune zone della traiettoria, un altro fascio circolante nello stesso tubo.

Quest'ultima possibilità porta notevoli guadagni all'energia disponibile per le reazioni, oltre che a un incremento del *duty cycle* dell'acceleratore. Questa configurazione elimina tra l'altro la necessità di distinguere fra proiettili e bersagli e gli acceleratori sono detti collisori. Se si accumulano in un sincrotrone, in orbite stabili e adiacenti, pacchetti di particelle e delle loro antiparticelle di uguale energia cinetica, ma che avendo cariche di segno opposto circolano nell'acceleratore con sensi di rotazione opposti, facendoli incontrare in una o più zone dell'orbita si determina l'insorgenza di urti per i quali l'energia a disposizione nel sistema CM è esattamente la somma delle energie di ognuna delle due particelle urtanti. Naturalmente è importante in questo caso anche conoscere il numero di urti che possono aver luogo nell'unità di tempo, che viene detto "luminosità" e sarà definita più oltre, nel paragrafo [6.1](#).

Nell'acceleratore LHC del CERN, grazie a particolari configurazioni di campo con magneti superconduttori, si possono accelerare, in tubi a vuoto adiacenti, fasci controrotanti di particelle o ioni con cariche dello stesso segno per farli poi collidere in opportune zone delle loro orbite.



LHC Large Hadron Collider SPS Super Proton Synchrotron PS Proton Synchrotron
 AD Antiproton Decelerator CTF-3 Clic Test Facility CNGS Cern Neutrons to Gran Sasso ISOLDE Isotope Separator OnLine DEvice
 LEIR Low Energy Ion Ring LINAC LINear ACcelerator n-ToF Neutrons Time Of Flight

Figura I.16: Il complesso degli acceleratori oggi operativi al CERN. Le connessioni fra essi li rendono mutuamente sinergici.

Appendice J

I raggi cosmici

I raggi cosmici sono particelle e nuclei in movimento nello spazio; la loro natura e origine sono varie e l'intensità dei flussi misurati copre 32 ordini di grandezza con energie cinetiche che si distribuiscono su uno spettro di circa quattordici ordini di grandezza, il cui estremo superiore raggiunge i 10^{22} eV (figura [J.2](#)). Ve ne sono di carichi e di neutri: la componente carica investe la Terra in media con un cosmico al secondo per cm^2 per steradiante.

La quasi totalità dei raggi cosmici che arrivano sulla superficie terrestre sono però in realtà prodotti secondari delle interazioni fra raggi cosmici primari, provenienti dallo spazio esterno e molecole dell'atmosfera terrestre, come è schematicamente illustrato in figura [J.1](#). Il cammino libero medio di un raggio cosmico fra due successive interazioni con nuclei degli atomi di molecole dell'atmosfera terrestre è pari a circa $\lambda_0 = 750$ m, in condizioni di atmosfera normale standard.

L'atmosfera agisce come un "calorimetro" e l'energia di un raggio cosmico primario può essere dedotta dallo studio dello spettro energetico dello sciamme che produce. Da alcuni anni vi sono anche sistemi di rivelazione diretta dei raggi cosmici primari, situati nello spazio esterno all'atmosfera terrestre, su satelliti o ospitati dalla stazione orbitale internazionale.

Uno sciamme include svariati prodotti secondari, alcuni anche a vita media così breve da decadere prima di aver percorso il tragitto che li separa dal suolo. Considerando che le energie cinetiche di tali oggetti sono alte e che quindi le loro velocità sono prossime a c , la dilatazione relativistica delle loro vite medie osservate dal suolo gli permette comunque spesso di giungere a terra. Li si può quindi osservare e studiare anche con apparati situati a terra; questo li rende però anche una sorgente di fondo spesso difficile da controllare, per altri tipi di esperimenti. La storia della scoperta dei raggi cosmici, delle loro caratteristiche e proprietà fisiche, delle loro origini e di come siano accelerati nel percorrere l'universo, del loro fondamentale contributo allo sviluppo di tecniche e strumenti d'indagine poi divenuti fondamentali per la fisica nucleare, subnucleare e stellare, per la cosmologia e per l'intero

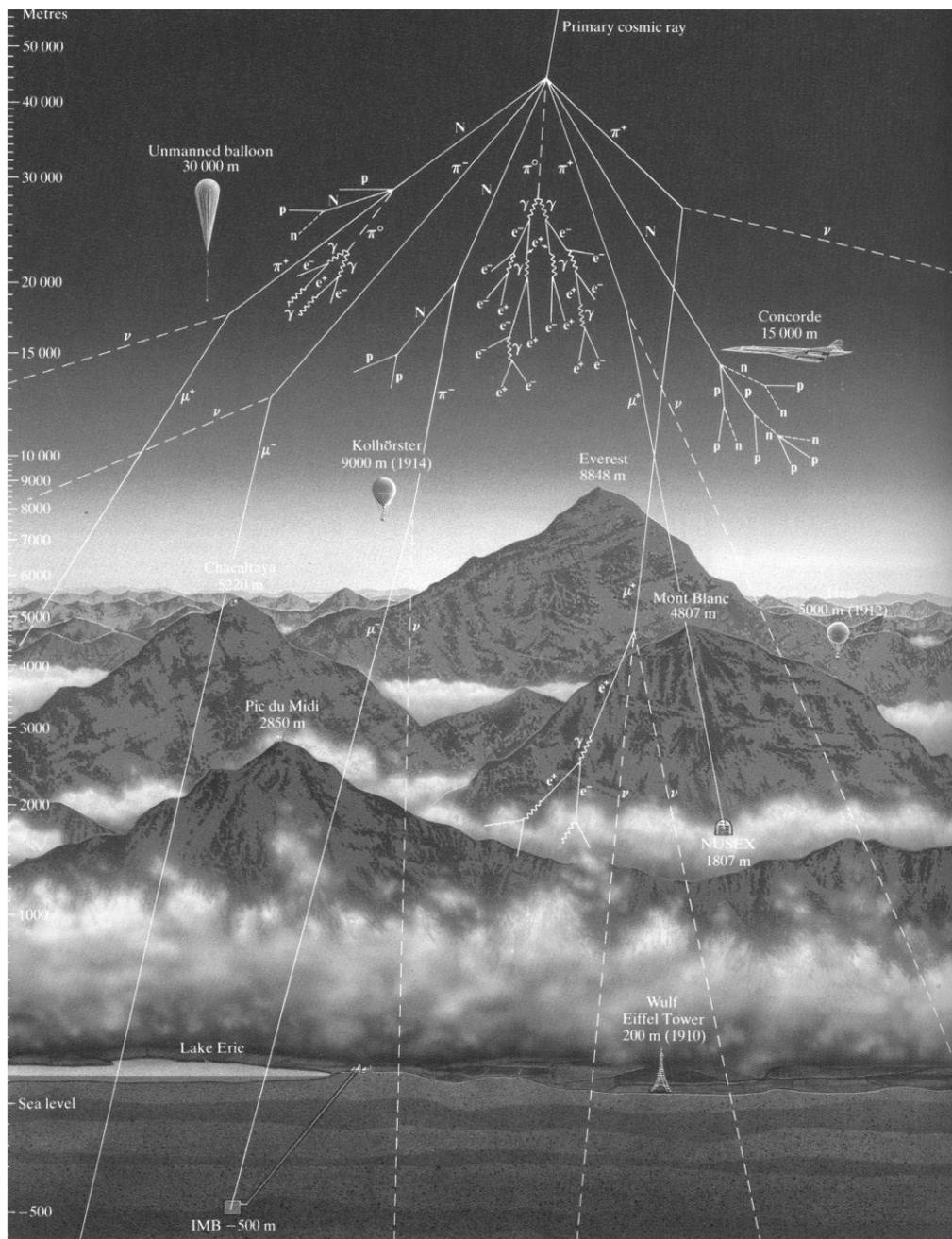


Figura J.1: Schema di sciame atmosferico prodotto da un protone cosmico primario di grande energia cinetica.

ambito scientifico, è un argomento affascinante e interessantissimo che non può essere compendiato in un capitolo. Qui si danno alcune informazioni sulle loro caratteristiche e ci si sofferma sui meccanismi di accelerazione

che li portano a energie oltre 10^7 volte superiori alle più alte ottenibili con gli acceleratori esistenti. L'individuazione di tali meccanismi è dovuta a E. Fermi¹. È interessante osservare che fino ai tardi anni '50, i raggi cosmici hanno rappresentato l'unica sorgente in grado di fornire particelle con energie superiori a 1 GeV.

Una bellissima trattazione storico-scientifica è: B. Rossi, "Cosmic Rays" - McGraw-Hill Book Company Inc. 1964, reperibile gratuitamente in rete; una panoramica aggiornata si trova in "M.Tanabashi et al. (Particle Data Group), Phys.Rev.D 98 (2018) 030001".

J.1 Alcune caratteristiche dei raggi cosmici

È interessante analizzare con un certo dettaglio la forma dello spettro energetico misurato dei raggi cosmici primari, riportato in figura J.2. Alle energie più basse i raggi cosmici sentono l'effetto del *vento solare* e dei campi magnetici terrestri e solari. Nell'intervallo energetico compreso fra 100 GeV e 10^6 GeV la discesa è ripida e descritta da una legge di potenza

$$N(E)dE \propto E^{-2.6}dE \quad (\text{J.1})$$

mentre il flusso primario cala di circa 10 ordini di grandezza. In corrispondenza all'estremo di tale intervallo, detto *ginocchio*, la pendenza diviene più pronunciata, circa $\propto E^{-3.1}$, e di conseguenza il flusso di cosmici primari cala più rapidamente. Questo andamento prosegue fino a circa 10^{10} GeV. In corrispondenza a questo punto, detto *caviglia*, la discesa guadagna ulteriore rapidità divenendo circa $\propto E^{-3.7}$, e a questo punto si raggiungono anche i limiti sperimentali di misurabilità del rateo. Per energie fino a 10^{15} eV il flusso è ancora abbastanza intenso da permettere di studiare la composizione dei raggi cosmici carichi primari che comprendono protoni (circa 87 %), particelle α (circa 12 %), e una residua percentuale del 1 % di nuclei più pesanti e si tratta sempre di strutture completamente ionizzate, in quanto gli elettroni che le completavano come atomi sono stati strappati dai processi di accelerazione subiti nel corso del tempo trascorso in moto nell'universo. Fra i cosmici primari vi sono anche elettroni in quantità pari al 2 % dei protoni. Le abbondanze relative delle particelle costituenti il flusso primario sono approssimativamente confrontabili con quelle individuate nella composizione del Sole e ciò suggerisce che i fenomeni di produzione e successiva accelerazione cosmica dei primari siano associati al collasso di supernove galattiche di età evolutiva medio-alta, com'è appunto per il Sole. Tali raggi cosmici giungono però sulla Terra attraversando il campo magnetico galattico di $\sim 10^{-7}$ Gauss, e ciò devia le loro velocità significativamente, tanto da non poter più ricostruire una correlazione con la posizione della loro supernova

¹E. Fermi, "On the origin of the cosmic radiation" - Phys. Rev. 75 (1949) 1169; "Galactic magnetic fields and the origin of cosmic radiation" - Ap. J. 119 (1954) 1.

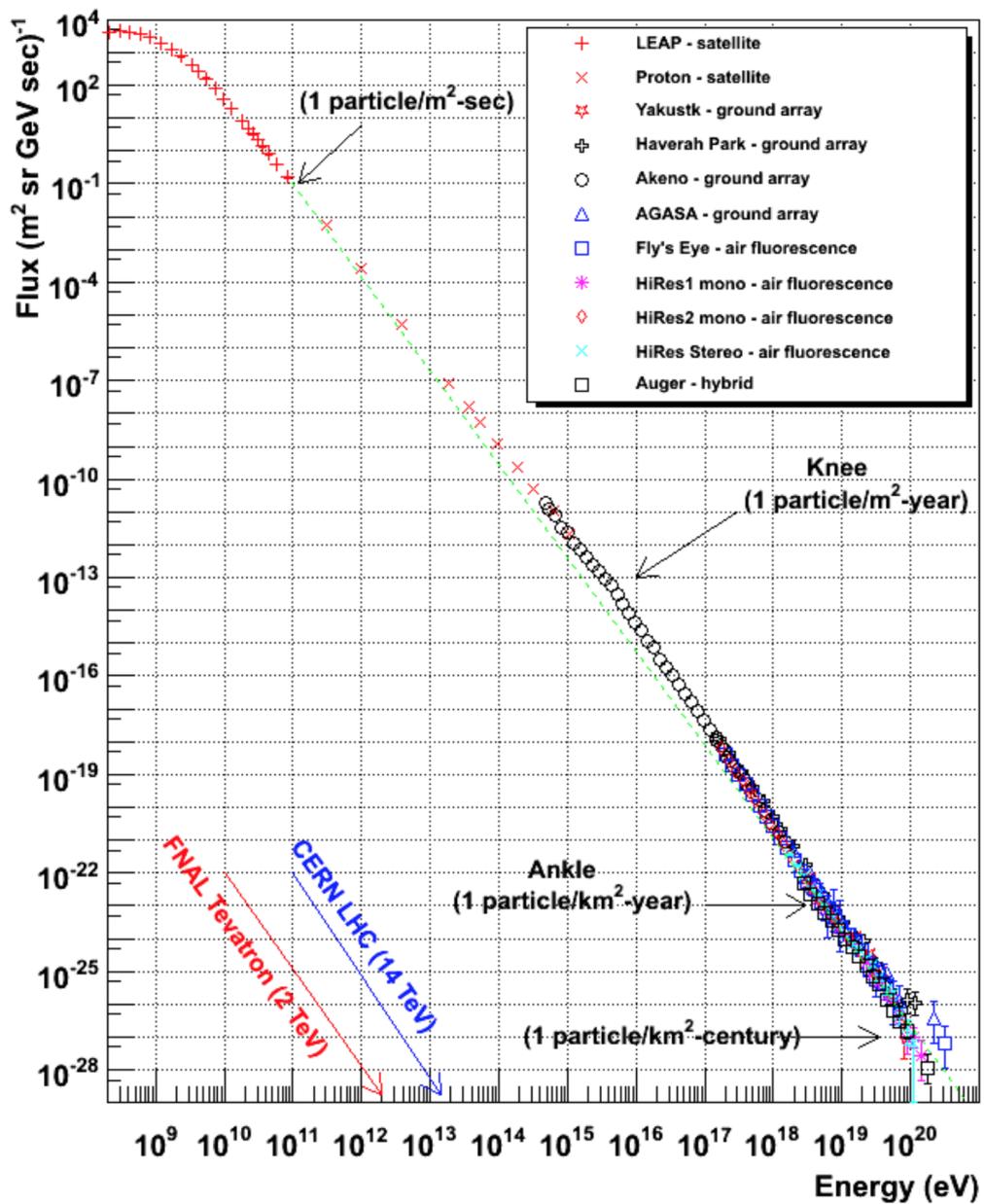


Figura J.2: Spettro in energia dei raggi cosmici.

d'origine.

Si ritiene che il ginocchio a 10^6 GeV nello spettro energetico sia correlabile a una sorta di limite massimo per il meccanismo d'accelerazione dovuto a supernove, anche se non ne è completamente chiaro il meccanismo.

L'idea generale per queste particelle primarie è che siano prevalentemente

confinare entro la nostra galassia dal suo campo magnetico, con una possibilità di sfuggirne ridotta, abbinata a un tempo medio di permanenza nella galassia di circa 2×10^7 anni.

Detti p e q l'impulso e la carica di un raggio cosmico, B ed R il modulo del campo magnetico galattico medio e il raggio della traiettoria seguita in esso dal raggio cosmico, dalla forza di Lorentz si ha

$$p \sim qBR \quad (\text{J.2})$$

da cui si deduce che ad esempio protoni da 10^5 GeV percorrono traiettorie con raggi dell'ordine di $R \sim 3 \times 10^{16}$ m.

Per capire gli ordini di grandezza in gioco si sa che il raggio galattico è stimato in circa 10^{20} m, e i resti di supernova della Nebulosa del Granchio distano dalla Terra circa 2×10^{19} m. Si può dunque dedurre che raggi cosmici di energie $\gtrsim 10^9$ GeV non possano restare confinati nella nostra galassia e se individuati dovrebbero quindi essere di origine extragalattica. Data la debolezza dei campi magnetici da essi attraversati, le deviazioni impresse alle loro estreme velocità potrebbero quindi essere così ridotte da far sì che esse puntino a ritroso con una certa probabilità verso le sorgenti di provenienza. Se i meccanismi di produzione e confinamento corrispondono a quanto descritto, non dovrebbero essere peculiari della sola nostra galassia, e una conferma di ciò viene dall'aver scoperto radiazione di sincrotrone nelle bande radio dello spettro elettromagnetico di molte altre galassie; la radiazione di sincrotrone, come visto, è infatti un effetto che si produce quando particelle cariche relativistiche si muovono ad esempio lungo traiettorie curve in campi magnetici.

Per quanto concerne la conferma dell'individuazione nelle supernovae della principale fucina di produzione e accelerazione di raggi cosmici galattici, si è ottenuto un brillante risultato osservativo grazie al telescopio spaziale "Fermi". Supponendo infatti che l'esplosione di una supernova generi molti protoni che vengono poi accelerati dall'onda d'urto dell'esplosione con meccanismi suggeriti da Fermi e che tratteremo, si ha che l'interazione di questi protoni energetici col gas interstellare produce pioni neutri² π_0 che date le energie in gioco, hanno impulsi fortemente allineati con quelli dei protoni che li hanno generati. Questi π_0 decadono rapidamente³ e prevalentemente in coppie di raggi γ , ognuno d'energia pari a circa 67.49 MeV, di impulso tanto più allineato con quello del π_0 genitore quanto maggiore è l'energia cinetica di questo. In definitiva dovrebbe esserci un fiotto di γ da circa 67.49 MeV proveniente da ogni supernova e abbastanza ben allineati otticamente con la direzione di provenienza della luce visibile della supernova. I risultati ottenuti dal satellite "Fermi" concernono proprio l'individuazione di due di

²Si veda: F.W. Stecker, S. Tsuruta, G.G. Fazio, "The production of cosmic gamma rays in interstellar and intergalactic cosmic-ray collisions" - SAO Special Report 259 (1967).

³La vita media del pione neutro π_0 è: $\tau_{\pi_0} = 8.4 \times 10^{-17}$ s.

queste sorgenti da resti di supernova⁴, e sono stati scherzosamente definiti "prova della pistola fumante".

Tornando allo spettro in energia dei raggi cosmici, si può senz'altro dire che una sua peculiarità è di avere un andamento a legge di potenza, e lo scopo di una teoria sui meccanismi di produzione e accelerazione dei raggi cosmici dovrebbe essere primariamente di spiegare l'origine di questo andamento e riprodurlo qualitativamente e quantitativamente.

J.2 Meccanismi d'accelerazione alla Fermi

Fermi propose nel 1949 un meccanismo di accelerazione delle particelle cosmiche dovuto a campi magnetici variabili. Considerando le nuvole di gas interstellare presenti nella galassia come strutture di materia completamente ionizzata, quindi plasma, si deduce che in esse non si possono mantenere campi elettrici stazionari, data la presenza di cariche libere che in tal caso si ricombinerebbero annullando i campi elettrici stessi. Il meccanismo di accelerazione deve quindi essere riconducibile all'effetto di soli campi magnetici variabili nel tempo che determinano quindi campi elettrici indotti. Questo suggerisce che le accelerazioni possano dunque prodursi sia in sorgenti estese con campi magnetici relativamente deboli, come le nubi interstellari derivanti da onde d'urto dovute a esplosioni di supernovae, che in prossimità di oggetti estremamente compatti e con campi magnetici rapidamente variabili, quali stelle a neutroni rotanti, pulsar,

Il fenomeno di accelerazione può inoltre essere sia diretto che stocastico. In quest'ultimo ogni particella carica è supposta accrescere gradualmente la propria energia per attraversamenti successivi di una regione con disuniformità del campo magnetico, tipicamente presenti entro una nuvola di gas ionizzato interstellare. Una disuniformità di campo magnetico in una nuvola di plasma può infatti agire come "specchio magnetico" che riflette la particella carica.

Sia $V = \beta c$ la velocità della nuvola di gas ionizzato, e quindi di uno "specchio magnetico" solidale con essa, rispetto a un osservatore inerziale, e si supponga inoltre ragionevolmente che la massa della nuvola sia enormemente maggiore di quella di qualsiasi particella carica interagente con un suo specchio magnetico.

Si pensi inoltre l'accadere di questa interazione di riflessione come un fenomeno puramente stocastico durante il quale la particella carica acquisisce energia e sia τ_{esc} il tempo di permanenza della particella carica entro la nuvola, durante il quale subisce interazioni. Con queste ipotesi si può dedurre uno spettro energetico a legge di potenza ma il meccanismo non risulta

⁴M.Ackermann et.al, "Detection of the Characteristic Pion-Decay Signature in Supernova Remnants" - Science 339 (2013) 807.

abbastanza efficiente da giustificare le energie più elevate dello spettro misurato, in quanto il guadagno d'energia per interazione risulta, come si vedrà, proporzionale a β^2 .

Per ottenere un risultato più completo e giustificare le parti più energetiche dello spettro riproducendone la pendenza media, bisogna immaginare che le particelle cariche siano accelerate anche da riflessioni su specchi magnetici trasportati da onde d'urto dirette, e in tal caso si trova che i guadagni d'energia subiti sono proporzionali a β .

Si consideri una regione di spazio in una nuvola ionizzata, contenente un numero N_0 grande di particelle cariche accelerabili supponendo che posseggano tutte la stessa energia iniziale E_0 . Si scriva l'energia E_a di una di queste particelle dopo ogni collisione con uno specchio magnetico come

$$E_a = E_b (1 + \delta) \quad \text{da cui,} \quad \frac{\Delta E}{E_b} = \frac{E_b - E_a}{E_b} = \delta \quad (\text{J.3})$$

con E_b l'energia della stessa particella prima della collisione. Questa scelta troverà giustificazione nei processi d'interazione fra particella e le disuniformità di campo magnetico ... che si descriveranno. Dopo le prime k collisioni la particella avrà quindi un'energia

$$E_k = E_0 (1 + \delta)^k \quad (\text{J.4})$$

Detta P_{esc} la probabilità che la particella sfugga dalla regione d'accelerazione dopo ogni processo di guadagno energetico, si calcoli la probabilità $P_{esc,k}$ che essa sfugga dopo k interazioni, quando dunque ha raggiunto un'energia E_k

$$P_{esc,k} = \underbrace{(1 - P_{esc}) \dots (1 - P_{esc})}_{k \text{ volte}} P_{esc} = P_{esc} (1 - P_{esc})^k \quad (\text{J.5})$$

Il numero n_k di particelle che fuoriescono dalla regione d'accelerazione con energia E_k è dunque

$$n_k = N_0 P_{esc,k} = N_0 P_{esc} (1 - P_{esc})^k \quad (\text{J.6})$$

che esprimendo k dalla [J.4](#) come $k = \ln(E_k/E_0) / \ln(1 + \delta)$, si può scrivere

$$\begin{aligned} n_k &= N_0 P_{esc,k} = N_0 P_{esc} (1 - P_{esc})^{\frac{\ln(E_k/E_0)}{\ln(1+\delta)}} = \\ &= N_0 P_{esc} \left(\frac{E_k}{E_0} \right)^{\frac{\ln(1-P_{esc})}{\ln(1+\delta)}} = n(E_k) \end{aligned} \quad (\text{J.7})$$

Ricordando quindi che per la [J.4](#) si ha $\Delta E_k \propto E_k$, si ottiene, per la distribuzione delle particelle che subiscono un processo di accelerazione come quello ipotizzato

$$\frac{dn}{dE} \simeq \frac{n(E_k)}{\Delta E_k} \propto \frac{n(E_k)}{E_k} \propto E^{\frac{\ln(1-P_{esc})}{\ln(1+\delta)} - 1} \quad (\text{J.8})$$

Posto $\xi = 1 - \frac{\ln(1 - P_{esc})}{\ln(1 + \delta)}$, si ha

$$\frac{dn}{dE} \propto E^{-\xi} \quad (\text{J.9})$$

che ha la forma di legge di potenza cercata. Essendo poi sia $P_{esc} \ll 1$ che $\delta \ll 1$, si ottiene

$$\frac{\ln(1 - P_{esc})}{\ln(1 + \delta)} \simeq -\frac{P_{esc}}{\delta} \quad \text{da cui,} \quad \xi \simeq 1 + \frac{P_{esc}}{\delta} \quad (\text{J.10})$$

Se si indica con T_r la durata media caratteristica di un processo di accelerazione per riflessione su specchio magnetico, il numero di processi d'accelerazione subiti da una particella in una singola nuvola sarà mediamente $\langle k \rangle = \tau_{esc}/T_r$, per cui l'energia massima raggiungibile dalla particella carica in una nuvola di gas ionizzato in cui permanga per un tempo τ_{esc} sarà

$$E_{max} \lesssim E_0 (1 + \delta)^{\tau_{esc}/T_r} \quad (\text{J.11})$$

Si osservi che anche la vita media di ogni perturbazione magnetica accelerante entro una nuvola di gas ionizzato, gioca un ruolo, se inferiore a τ_{esc} .

Si consideri ora specificamente il modo, immaginato da Fermi, in cui una particella carica di energia, velocità e impulso iniziali E_1 , \vec{v}_1 e \vec{p}_1 , rispetto a un osservatore inerziale, può essere accelerata dalla collisione con una disuniformità del campo magnetico entro una nuvola di gas ionizzato interstellare, in movimento con velocità $\vec{V} = \vec{\beta}c$ rispetto allo stesso osservatore inerziale.

Siano ϑ_1 l'angolo fra \vec{p}_1 e \vec{V} , e ϑ_2 l'angolo fra \vec{p}_2 e \vec{V} , dove il pedice "2" indica i valori delle grandezze dinamiche dopo la collisione. Si indichino inoltre con l'apice le grandezze riferite al sistema solidale con la nuvola, e quindi con la disuniformità di campo magnetico, supposta come detto di massa molto maggiore di quella m della particella che subisce accelerazione, quindi sostanzialmente coincidente con il sistema del centro di massa.

Si ha in tal caso, in approssimazione ultra-relativistica⁵ ($E_i \gg mc^2$)

$$E'_1 \simeq \gamma E_1 (1 - \beta \cos \vartheta_1) \quad , \quad \text{con} \quad \gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2} \quad (\text{J.12})$$

Nel sistema del centro di massa l'energia cinetica della collisione si conserva, per cui $E'_2 = E'_1$ e riconducendosi al sistema di riferimento dell'osservatore inerziale

$$E_2 = \gamma E'_2 (1 + \beta \cos \vartheta'_2) = \gamma^2 E_1 (1 - \beta \cos \vartheta_1) (1 + \beta \cos \vartheta'_2) \quad (\text{J.13})$$

⁵Per la trattazione relativistica degli urti si veda l'Appendice ??.

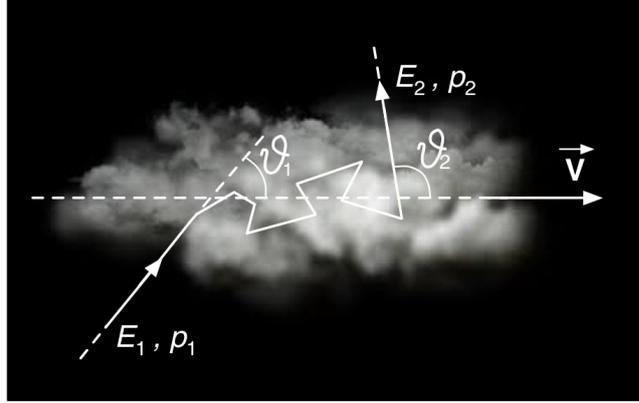


Figura J.3: Interazione fra raggio cosmico e disuniformità di campo magnetico in nuvola di gas interstellare in moto con velocità $\vec{V} = \vec{\beta}c$.

L'incremento medio di energia della particella si ha mediando su tutti i possibili angoli, per cui

$$\langle \cos\vartheta_1 \rangle = 0 \quad (\text{J.14})$$

e di conseguenza

$$\langle E_2 \rangle = \gamma^2 E_1 (1 - \beta \langle \cos\vartheta_1 \rangle) \quad \text{con,} \quad -1 < \cos\vartheta_1 < 1 \quad (\text{J.15})$$

Si osservi che la probabilità P_{int} dell'interazione fra una particella e una disuniformità magnetica è proporzionale alla loro velocità relativa $|\vec{V} - \vec{v}_1|$

$$P_{int} \propto |\vec{V} - \vec{v}_1| \propto (\beta^2 + \beta_1^2 - 2\beta\beta_1 \cos\vartheta_1)^{1/2}$$

che se la particella è relativistica e $V \ll c$ diventa

$$P_{int} \propto (1 - 2\beta \cos\vartheta_1)^{1/2} \simeq 1 - \beta \cos\vartheta_1 \quad (\text{J.16})$$

Quindi si ha, per il valor medio di $\cos\vartheta_1$

$$\langle \cos\vartheta_1 \rangle \simeq \frac{\int_{-1}^1 (1 - \beta \cos\vartheta_1) \cos\vartheta_1 d(\cos\vartheta_1)}{\int_{-1}^1 (1 - \beta \cos\vartheta_1) d(\cos\vartheta_1)} = -\frac{1}{3} \frac{V}{c} = -\frac{1}{3} \beta \quad (\text{J.17})$$

Sostituendo quanto ottenuto nella [J.15](#) si ha, per il guadagno medio in energia

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{E_2}{E_1} \right\rangle &\sim \gamma^2 (1 - \beta \langle \cos\vartheta_1 \rangle) \simeq (1 - \beta^2)^{-1} \left(1 + \frac{1}{3} \beta^2 \right) \simeq \\ &\simeq (1 + \beta^2) \left(1 + \frac{1}{3} \beta^2 \right) = 1 + \frac{4}{3} \beta^2 + O(\beta^4) \end{aligned} \quad (\text{J.18})$$

da cui

$$\left\langle \frac{\Delta E}{E} \right\rangle \simeq \frac{4}{3} \beta^2 \quad (\text{J.19})$$

Essendo tipicamente $\beta^2 \sim 10^{-2}$, data la relativamente piccola velocità casuale media delle disuniformità magnetiche del mezzo interstellare rispetto a c , si deduce che il meccanismo originale di Fermi non è efficiente quanto serve per giustificare gli alti valori energetici coperti dallo spettro dei raggi cosmici. Inoltre il valore che ne deriva per la pendenza ξ della legge di potenza, detto indice spettrale, è almeno un ordine di grandezza maggiore di quanto trovato sperimentalmente, ovvero di ≈ 2.6 .

Un risultato quantitativamente in grado di giustificare le zone alte dello spettro energetico almeno fino a valori di circa 10^{14} eV/nucleone, si ha immaginando che sempre con un meccanismo tipo Fermi, le disuniformità magnetiche su cui si riflettono le particelle acquisendo energia siano associate non a nubi interstellari in moto casuale nella galassia, ma a onde d'urto il cui fronte possa essere immaginato localmente "piano", che si trasmettono nel mezzo interstellare con velocità supersonica $U \gg v_s$, con v_s la velocità del suono nel mezzo, come le onde d'urto associate a esplosioni di supernovae. Trattando il problema in questi termini si ottiene, per l'incremento medio di energia delle particelle cariche interagenti con fronti d'onda supersonici

$$\left\langle \frac{\Delta E}{E} \right\rangle \simeq \frac{U}{c} \equiv \beta \quad (\text{J.20})$$

e l'indice spettrale che si ricava di conseguenza per l'andamento a legge di potenza vale ≈ 2 .

Il motivo fondamentale per cui neppure questi meccanismi risultano però abbastanza efficienti da giustificare le zone ai più energetiche dello spettro è sostanzialmente dovuto alla non sufficiente durata dell'azione dei meccanismi stessi, a sua volta dovuta alla vita media delle disuniformità magnetiche entro le onde d'urto. Le energie più alte rivelate sono probabilmente dovute sia a meccanismi più efficienti, anche nel breve termine, come quelli presenti in corrispondenza di stelle a neutroni, con intensi campi magnetici associati, sia a strutture acceleranti più durature, sia alla concomitanza delle due cose. Il cosmo e i processi che si producono in esso costituiscono quindi, ai fini delle energie raggiungibili, il più efficiente sistema d'accelerazione di particelle cariche, anche se non si è in grado di poterne governare direzione e collimazione.

Bibliografia

- [1] A. Bettini, Introduction to Elementary Particle Physics, Cambridge University Press, 2014, (2a edizione)
- [2] B.R. Martin G. Shaw, Particle Physics, Wiley, 2008, (3a edizione)
- [3] A. Das T. Ferbel, Introduction to Nuclear and Particle Physics, World Scientific, 2003, (2a edizione)
- [4] E. Fermi, Nuclear Physics, University of Chicago Press, 1950, (Edizione R.)
- [5] B. Povh et al., Particles and Nuclei - An introduction to the physical concepts, Springer, 2015, (7a edizione)
- [6] E. Segrè, Nuclei e Particelle, Zanichelli, 1982, (2a edizione)
- [7] M. Stanley Livingston, Particle Accelerators, McGraw-Hill, 1962
- [8] C. Villi et al., Lezioni di Istituzioni di Fisica Nucleare, CLEUP - PD, 1976, (Edizione aggiornata)